UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL3 MT02
Département de mathématiques 2008-9

Devoir sur table (1h).

Pour la rédaction, on prendra soin de justifier tous les résultats.

Exercice 1. On considère $E = \{1; 2; ...n\}$. On fixe $k = 0; 1; ...n$.

(1) Décrivez, dans le formalisme mathématique, l'ensemble des sous-ensembles (i.e. parties) de taille k dans E.

(2) Combien y-a-t-il de sous-ensembles de taille k dans E?

(3) Combien y-a-t-il de sous-ensembles dans E? (En comptant l'ensemble vide et l'ensemble E lui-même).

(4) Pour A une partie de E. On note $x_A = (x_1, x_2, ..., x_n)$ avec $x_j = \mathbf{I}_A(j), j : 1...n$ où $\mathbf{I}_A$ désigne l'indicatrice de A.

(a) Pour $n = 5$, que vaut x_A lorsque $A = \{1, 3\}$? lorsque $A = \{1; 4; 5\}$?

(b) Montrer que $\phi : \mathcal{P}(E) \to \{0; 1\}^n$ défini par $A \to \phi(A) = x_A$ est une bijection. ($\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E).

(c) En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

(d) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

Exercice 2. Un libraire a reçu p exemplaires d'un livre d'un auteur à succés. Ces exemplaires sont numérotés (car signés par l'auteur). Le libraire regroupe ces livres avec q autres exemplaires non numérotés du même ouvrage.

(1) Combien de paquets de $q+1$ livres peut-on faire contenant l'exemplaire numéro i et ne contenant pas les numéros suivants dans ce regroupement de livres numérotés et non numérotés? *On note A_i l'ensemble de ces paquets.*

(2) Déduire de ce qui précède la relation suivante où on a posé $n = p + q - 1$,

$$(eq) \quad C_q^q + C_{q+1}^q + C_{q+2}^q + ...C_n^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

(On justifiera la réponse).

(3) Démontrer directement (eq) avec la propriété $C_k^q + C_k^{q+1} = C_{k+1}^{q+1}$.

Exercice 3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y-a-t-il de solutions $(x_1, x_2, ...x_n)$ avec x_i des entiers positifs ou nuls de l'équation

$$x_1 + x_2 + ...x_n = p \quad ?$$