Département de Mathématiques
Université d'Orléans

SCL3 MT02
1er semestre, 2006/2007

Feuille d'exercices 1 : Formalisme probabiliste, Dénombrement

1. Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F.
   (a) Montrer que si A et B sont des parties de E on a,
   $$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ et } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
   Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte, montrer que si f est injective on a l'égalité.
   (b) Soient A' et B' des parties de F. Montrer les relations
   $$f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \text{ et } f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B').$$
2. Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F. Etablir les résultats suivants :
   (a) La fonction f est injective si et seulement si, pour toute partie $A \subset E$, on a $f^{-1}(f(A)) = A$;
   (b) La fonction f est surjective si et seulement si, pour toute partie $B \subset F$, on a $f(f^{-1}(B)) = B$;
3. (a) A et B étant deux parties d'un ensemble Ω, exprimer les indicatrices de A^c, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \Delta B := \{x \in A; x \notin B\} \cup \{x \in B; x \notin A\}$ en fonction des indicatrices de A et B.
   (b) * Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties d'un ensemble Ω. Montrer que la suite des indicatrices des A_n converge simplement vers l'indicatrice de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
   (c) Soit f une application d'un ensemble Ω dans un ensemble Ω' et A une partie de Ω' . Montrer que $\mathbf{1}_A \circ f = \mathbf{1}_{f^{-1}(A)}$.
4. Trois boules sont tirées successivement d'une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. On définit les évènements :
   $$\begin{aligned} A &= \{\text{la première boule est blanche}\}, \\ B &= \{\text{la deuxième boule est blanche}\}, \\ C &= \{\text{la troisième boule est blanche}\}. \end{aligned}$$
   (a) Exprimer à l'aide des évènements A, B et C les évènements suivants :
   $$\begin{aligned} D &= \{\text{toutes les boules tirées sont blanches}\}, \\ E &= \{\text{les deux premières sont blanches}\}, \\ F &= \{\text{au moins une est blanche}\} \\ G &= \{\text{seule la troisième est blanche}\} \\ H &= \{\text{une seule boule est blanche}\}. \end{aligned}$$

(b) Calculer les probabilités de ces évènements lorsque l'on suppose que l'urne contient 3 boules rouges et 3 boules blanches.

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On rappelle que

$$\liminf_n A_n := \cup_n \cap_{k\geq n} A_k, \ \limsup_n A_n := \cap_n \cup_{k\geq n} A_k.$$

   (a) Exprimer à l'aide des A_n les évènements suivants :

      i. Tous les A_n se réalisent.

      ii. L'un au moins des A_n se réalisent.

      iii. Une infinité de A_n se réalisent.

      iv. Tous les A_n se réalisent sauf un nombre fini d'entre eux.

      v. Seul un nombre fini de A_n se réalisent.

   (b) Montrer que :

$$\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n \text{ et } (\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c.$$

   (c) Soit E et F deux évènements de $\mathcal{A}$. On pose $A_n = E$ si n est pair, $A_n = F$ si n est impair. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.

   (d) Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans le cas où la suite (A_n) est croissante et dans le cas où elle est décroissante.

6. Est-il plus probable d'avoir un six en lançant un dé 4 fois de suite ou un double six en lançant deux dés 24 fois de suite ?

7. Grigori vous impose de jouer à la roulette russe avec lui.

   (a) Il vient pour cela de placer deux balles côte à côté dans le barillet (préalablement vide) d'un revolver. Il a ensuite fait tourné ce barillet. Préférez-vous jouer en premier, en deuxième ou cela vous indiffère-t-il ?

   (b) Même questions si vous ne savez pas comment Grigori a placé les balles dans le barillet avant de le faire tourner.

8. Dans une assemblée de 50 personnes, quelle est la probabilité que deux personnes fêtent leur anniversaire le même jour ?

9. Soient n et r deux entiers $(1 \leq r \leq n)$. On forme tous les sous-ensembles à r éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et on considère pour chacun de ces sous-ensembles son plus petit élément. On appelle $f(n, r)$ la moyenne arithmétique de tous les nombres ainsi obtenus. On veut prouver que $f(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$.

   (a) Combien y a-t-il de tels ensembles ?

   (b) Pour k donné entre 1 et $n - r + 1$, montrer qu'il y a $\binom{n-k}{r-1}$ tels ensembles dont le plus petit élément est k.

   (c) En déduire que

$$f(n, r) = \frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}}.$$

(d) Notons E l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n+1\}$ avec $r+1$ éléments, et $\mathcal{A}_k$ les éléments de E dont le deuxième élément dans l'ordre croissant est $k+1$.

i. Montrer que les $(\mathcal{A}_k)_{1 \leq k \leq n-r+1}$ forment une partition de E.

ii. Montrer que $|\mathcal{A}_k| = k\binom{n-k}{r-1}$.

iii. Montrer que $|E| = \sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}$.

(e) Conclure.

10. 16 contributions générales sont proposées au vote des militants d'un parti politique. Dans un esprit de synthèse, le premier secrétaire du parti demande à chaque militant de cocher "plutôt favorable" ou "plutôt pas favorable" pour chacune des contributions. Sachant que le parti comprend 120038 adhérents à jour de cotisation, montrer qu'il y a au moins deux militants qui ont rendu exactement le même bulletin.

11. Considérons un dé en forme de tétraèdre régulier. On s'intéresse aux manières de le peindre, chaque face étant peinte entièrement d'une seule couleur

(a) Combien y a t'il de manières de le peindre en utilisant deux couleurs données (et en les utilisant toutes les deux ?).

(b) Combien y a t'il de manières de le peindre en utilisant trois couleurs données (et en les utilisant toutes les trois ?).

(c) Combien y a t'il de manières de le peindre en utilisant quatre couleurs données (et en les utilisant toutes les quatre ?).

(d) Combien y a t'il de manières de le peindre en utilisant une palette de n couleurs ?

On prendra bien garde au fait que la position du dé n'est pas fixée ; il peut être déplacé dans l'espace. Ainsi, il n'y a qu'une seule manière de colorier le dé avec trois faces rouges et une face verte.

12. Le chevalier de Méré, contemporain de Pascal, analysant un grand nombre de parties de "passe dix" (on lance 3 dés et on observe si la somme S des dés dépasse ou non 10) remarque que la fréquence de l'événement $\{S = 11\}$ est systématiquement différente de celle de l'événement $\{S = 12\}$. Explicitant la liste des cas où $S = 11$, il trouvait :

$$641\ 632\ 551\ 542\ 533\ 443,$$

soit 6 cas ; et pour $S = 12$

$$651\ 642\ 633\ 552\ 543\ 444,$$

donc encore 6 cas, d'où son étonnement d'observer des fréquences différentes alors que les deux sommes considérées correspondent à un même nombre de cas. On demande de calculer les deux probabilités à l'aide d'un modèle raisonnable afin de résoudre le paradoxe.

13. Soit p un entier positif. Montrer que le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leq p$ est égal à

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} \binom{n}{i} \binom{p}{n-i}.$$

14. Combien existe-t-il de mots de n lettres construits avec l'alphabet $\{a; b\}$ et ne comportant pas deux "a" consécutifs ?
Indication : montrer que si u_n est le nombre de tels mots se terminant par "a" et v_n est le nombre de tels mots se terminant par "b", on a la récurrence

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

15. 5 prévenus sont amenés à choisir un avocat dans une liste de 10 avocats commis d'office.
    (a) Combien y a-t-il de choix possibles ?
    (b) Combien y a-t-il de choix tels que les 5 prévenus choisissent le même avocats ?
    (c) Combien y a-t-il de choix tels que 2 avocats soient appelés ?
16. Quelle est la probabilité qu'un entier pris au hasard entre 0 et $10^n - 1$ contienne un nombre pair de "1" dans son écriture décimale ?
17. Cet exercice est sans doute difficile. On fixe p un nombre premier impair. On cherche le nombre de sous-ensembles A de $\{1, 2, ..., 2p\}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
    (a) Le cardinal de A est p ;
    (b) La somme des éléments de A est divisible par p.