Département de Mathématiques
Université d'Orléans

SCL3 MT02
1er semestre, 2008/2009

Feuille d'exercices 3 : Variables aléatoires discrètes

1. Soient B, C deux évènements tels que $P(C) \neq 0$. Montrer $P(B|B \cup C) \geq P(B)$, puis $P(B|B \cup C) \geq P(B|C)$.
2. Une urne U_1 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3, 4. Une urne U_2 contient 5 jetons ; 3 numérotés 2, 2 numérotés 3. On tire un jeton de l'urne U_1 et un jeton de l'urne U_2. On suppose, pour chaque urne, l'équiprobabilité de tirage d'un jeton. Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des nombres portés par les jetons choisis.
Déterminer la loi de probabilité de X et la fonction de répartition de X.
3. Deux enfants disposent chacun d'une boite contenant 10 jetons de forme identique, numérotés de 1 à 10. A un signal, chaque enfant prend un jeton dans sa boite et le dépose sur une table . On désigne par E l'événement "les 2 jetons déposés sur la table ont le même numéro".
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'événement E se réalise ?
   (b) On répète de façon indépendante dix fois l'épreuve et on désigne par X le nombre de fois où l'événement E se réalise. Quelle est la probabilité pour que E se réalise au moins une fois au cours de ces dix expériences ?
   (c) Caculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}[X]$ et $\sigma[X]$
   (d) Combien faudrait-il faire d'expériences pour que l'on ait au moins 99 chances sur 100 de voir E se réaliser au moins une fois ?
4. On effectue n jets d'une pièce de monnaie "équilibrée".
   (a) Quelle est la probabilité :
      (i) d'obtenir k fois "Pile" ?
      (ii) d'obtenir k fois "Face" ?
   (b) Donner l'espérance de la v.a.r X correspondant au nombre de "Faces" obtenues.
   (c) A l'issue de chaque épreuve de n jets le joueur reçoit 1 euro par "Face" et donne 1 euro par "Pile". On appelle G la variable aléatoire résultat : nombre d'euros reçus moins nombre d'euros donnés.
      (i) Quelle est la probabilité que G soit égale à 0 ?
      (ii) Montrer que $P(G = l) = P(G = -l)$. En déduire $\mathbb{E}[G]$.
      (iii) Donner la loi de G. Pour $n = 4$ donner les valeurs numériques de $P(G = l)$. Calculer l'écart-type de G.
5. Tracer les fonctions de répartition des variables aléatoires suivantes.

   (a) X est une constante.
   (b) X suit une loi de Bernouilli de paramètre p.
   (c) X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

6. Soit A un évènement. Montrer que $X = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A^c}$ est une variable aléatoire. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$. Montrer que X et $2Y - 1$ ont la même loi.
7. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1; +1\}$. On pose $A = XY$,$B = YZ$, $C = ZX$.
   (a) Montrer que A et B sont indépendantes.
   (b) Montrer que B et C sont indépendantes.
   (c) Montrer que A et C sont indépendantes.
   (d) Que vaut la variable aléatoire ABC ? Les trois variables aléatoires A, B et C sont elles indépendantes ?
8. Une urne contient N boules, $N \geq 2$. On a écrit sur chaque boule un nombre k dans $\{1, \dots, n\}$. On note b_k le nombre de boules numérotées k. On tire au hasard deux boules de l'urne, sans remise. Soit A l'évènement {les deux boules portent le même numéro} et $X = \mathbf{1}_A$. Montrer que X suit une loi de Bernouilli de paramètre
$$p = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k(b_k - 1)}{N(N-1)}.$$
9. Vous jettez deux dés. Si les résultats des deux dés sont identiques, vous perdez la somme indiquée par un des deux dés. Si par contre les résultats des deux dés sont différents, vous gagnez un euros.
   (a) Modélisez l'expérience aléatoire par un espace probabilisé.
   (b) Construisez une variable aléatoire G sur l'espace probabilisé modélisant le gain après cette expérience aléatoire.
   (c) Donnez la loi de cette variable aléatoire et calculez son espérance et sa variance.
10. Deux personnes A et B ont chacune une pièce de monnaie, qu'elles lancent successivement et simultanément jusqu'à ce que A ait pile ou B ait face. Le premier qui a réussi gagne la partie. La partie est nulle s'ils réussissent en même temps.
   (a) Soit T_A l'instant où le joueur A réussit, et T_B l'instant où le joueur B réussit. Démontrer que ces variables aléatoires sont indépendantes et calculer leur loi.
   (b) Le jeu s'arrête-t-il ?
   (c) On suppose que les pièces sont identiques et non truquées. Quelle est la probabilité que la partie soit nulle ?
   (d) Calculer cette probabilité lorsque les deux pièces sont identiques et truquées. Montrer qu'elle est majorée par $\frac{1}{3}$.

11. On lance deux fois un dé à 6 faces non truqué. On note X le résultat du premier lancer et Y le résultat du second lancer.
    (a) On pose $Z = \max(X, Y)$. Pour $k \in \{1, \ldots, 6\}$, calculer $P(Z \leq k)$.
    (b) En déduire la loi de Z.
12. Le quart d'une population de cardinal n a été vacciné contre une maladie contagieuse M. Lors d'une épidémie, on constate que parmi les malades il y a 20% de vaccinés, et que sur l'ensemble des vaccinés il y a un malade sur 10 .
    (a) Quelle est la probabilité qu'un non vacciné tombe malade ? Le vaccin est-il efficace ?
    (b) On note X la variable aléatoire représentant le nombre de malades au cours d'une épidémie.
        (i) Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner son espérance mathématique et sa variance.
        (ii) Lorsque $n = 500$, calculer une valeur approchée de $P(X > 200)$.
13. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs α et β. Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$.
14. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Quelle est sa moyenne ? Montrer pour tout n,

$$P(X \geq n) \leq \frac{\lambda^n}{n!}$$

    Indication : utiliser l'identité $\frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{1}{n!}\frac{1}{k!}$.
15. Soient $(A_1, \ldots, A_{2n})$ $2n$ événements mutuellement indépendants de même probabilité $p \in]0, 1[$. On pose $X = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$, $Y = \sum_{k=n+1}^{2n} \mathbf{1}_{A_k}$ et $Z = X + Y$. Calculer de deux manières différentes $P(Z = n)$. En déduire l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

16. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $\{X = 0\} \cap \{Y = 0\} \subset \{X = Y\}$.
    En utilisant le fait que $\forall x \geq 0, e^{-x} \geq 1 - x$, en déduire

$$P(X \neq Y) \leq 2\lambda.$$

17. Deux personnes A et B jettent chacune n fois une pièce de monnaie équilibrée. On note X le nombre de "pile" obtenus par A, et Y le nombre de "pile" obtenus par B.
    (a) Loi de X ? Loi de Y ?
    (b) Calculer $P(X = Y)$. Quelle est sa limite quand n tend vers l'infini ?
18. **La propriété d'absence de mémoire**

(a) Montrer que si X est une v. a. de loi géométrique, elle vérifie la propriété d'absence de mémoire suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k). \tag{1}$$

(b) Trouver toutes les lois qui vérifient la propriété (1).

19. **Mélange de lois**
On supose que le nombre N d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre α :

$$P(N = k) = \frac{\exp(-\alpha)\alpha^k}{k\,!} \qquad k \in \mathbb{N}$$

On suppose également que la probabilité de développement d'un oeuf est p et que les oeufs sont mutuellement indépendants. On note S le nombre (aléatoire) de survivants. Montrer que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\alpha$.

20. Soit $s > 1$. On dit que X suit une loi ζ de paramètre s si l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s},$$

où l'on a posé

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Soit donc X suivant une loi ζ de paramètre s.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $p\mathbb{N}^* = \{np; n \in \mathbb{N}^*\}$.

(a) Calculer $P(X \in 2\mathbb{N}^*)$, puis pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X \in p\mathbb{N}^*)$.

(b) Énoncez une condition nécessaire et suffisante sur (p, q) pour que les événements $\{X \in p\mathbb{N}^*\}$ et $\{X \in q\mathbb{N}^*\}$ soient indépendants et démontrez-la.

(c) On tire Y au hasard – c'est à dire avec équiprobabilité – entre 1 et X. Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k|X = n)$.

(d) On pose $Z = \frac{Y}{X}$. Montrer que la fonction de répartition F_Z est strictement croissante sur $[0, 1]$.

(e) Soient p, q deux entiers positifs premiers entre eux, avec $p \leq q$. Calculer $P(Z = \frac{p}{q})$.

(f) On rappelle que $\phi(n)$ désigne le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers avec n. Déduire de ce qui précède une preuve probabiliste de l'identité

$$\zeta(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{n^{s+1}} = \zeta(s).$$

(g) Montrer
$$(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2})(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{n^3})(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{n^4}) = \int_2^3 x\, dx.$$
(On pourra admettre que $5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2$.)

21. On dispose de b boules blanches et n boules noires – au moins une de chaque –, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elles ne soit vide ; on note s le nombre de boules dans la première, et r celui de celles qui sont blanches. L'événement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes choisie au hasard. Le but de l'exercice est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité p de tirer une boule blanche.
    (a) Exprimer p en fonction de b, n, r et s.
    (b) Dans cette question, l'on fixe la valeur de s ; comment choisir r pour augmenter p ?
    (c) Résoudre l'exercice.
    (d) Quelles généralisations proposez-vous en augmentant les nombres de couleurs et d'urnes ?
22. Un avion a disparu et la région où il s'est écrasé est divisée pour sa recherche en trois zones de même probabilité. Pour $i = 1, 2, 3$, notons $1-\alpha_i$ la probabilité que l'avion soit retrouvé par une recherche dans la zone i s'il est effectivement dans cette zone. Les constantes α_i représentent les probabilités de manquer l'avion et sont généralement attribuables à l'environnement de la zone (relief, végétation,...). On notera A_i l'événement *l'avion est dans la zone i*, et R_i l'événement *l'avion est retrouvé dans la zone i* ($i = 1, 2, 3$).
    (a) Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer les probabilités que l'avion soit dans la zone i sachant que la recherche dans la zone 1 a été infructueuse.
    (b) Etudier brièvement les variations de ces trois probabilités conditionnelles considérées comme fonctions de α_1 et commenter les résultats obtenus.
23. Des étudiants se préparent à un examen. Le sujet sera fabriqué par l'un de leurs trois professeurs : Xxxx, Yyyy ou Zzzz.
    Or, les étudiants redoutent qu'un certain chapitre soit posé à l'examen et ils évaluent à 10% la probabilité pour que le chapitre en question sorte si c'est Xxxx qui fait le sujet, 40% si c'est Yyyy qui le fait, et 80% si c'est Zzzz (Inutile de dire à quel prof vont les sympathies des étudiants...).
    Yyyy leur a dit : Il y a une chance sur deux pour que ce soit moi qui fasse le sujet, et si je ne le fais pas il y a trois chances sur cinq pour que ce soit Xxxx. Le jour J arrive, et le chapitre fatidique est posé à l'examen ! Sachant cela, calculer les probabilités pour que l'examen ait été posé par Xxxx, Yyyy ou Zzzz.
24. Dans un élevage de moutons, on décèle 15% d'animaux malades. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas malade ait une réaction négative à un test donné est 0.90. Par contre, s'il est malade, la réaction sera positive avec une probabilité 0.80. Quelle est la probabilité qu'un mouton choisi au hasard et ayant une réaction positive au test soit malade ?

25. **Rhumes**
Le nombre de fois où un individu attrape un rhume en une année donnée est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Un nouveau médicament vient d'être mis sur le marché. Il réduit le paramètre de Poisson à $\lambda = 3$ pour 75% de la population. Pour le reste de la population, le médicament est sans effet notable sur les rhumes. Si un individu essaie le médicament pendant un an et attrape 2 rhumes au cours de cette période, quelle est la probabilité que le médicament lui ait été bénéfique ?

26. Un garage peut réparer huit voitures par jour. Chaque jour, huit conducteurs indépendants ont rendez-vous, chacun ayant une probabilité de 90% de venir effectivement.
   (a) Quelle est la loi du nombre X de voitures présentes au garage un jour donné ? En déduire la probabilité que le garage ne soit pas plein (moins de huit voitures à réparer).
   (b) Un véhicule qui entre a 70% de chances d'être réparé (tous ne sont pas réparables). On note Y le nombre de voitures réparées un jour donné. Calculer $P(Y = k|X = n)$ (distinguer le cas $0 \leq k \leq n$ du cas $k > n$). En déduire que la loi de Y est une binômiale dont on précisera les paramètres.
   (c) Pour i de 1 à 8, on définit la variable Z_i par :
   $Z_i = 0$ si la i-ème voiture ne vient pas ou n'est pas réparable.
   $Z_i = 1$ si la i-ème voiture se présente et est réparée.
   En exprimant Y en fonction des Z_i, retrouver la loi de Y.