UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **Unité 3MA11**
Département de Mathématiques **2008-2009**

Feuille 1 - Algèbre

Matrices et Déterminant

1. (i) Calculer tous les produits de deux matrices choisies parmi :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Mêmes questions avec les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. a) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & 0 & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & c & e \\ -a & 0 & f & d \\ -c & -f & 0 & b \\ -e & -d & -b & 0 \end{vmatrix}.$$

b) Soit A une matrice d'ordre n *antisymétrique*, c'est-à dire telle que ${}^tA = -A$. Montrer que A n'est pas inversible si n est impair .

4. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_0 & x+a_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & x+a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & x+a_3 \end{vmatrix}.$$

5. a) Etablir une formule pour le déterminant d'ordre n général

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \alpha \end{vmatrix}.$$

b) Etablir une formule pour le *déterminant de Vandermonde* général

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

6. On pose $V_1 = (1, -2, 1, 0)$, $V_2 = (-1, 0, 2, 1)$, $V_3 = (2, -6, 5, 1)$ et $V_4 = (2, -8, 8, 2)$. Calculer le déterminant de ce système de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dans la base canonique. Déterminer la dimension de $Vect(V_1, V_2, V_3, V_4)$.

7. Montrer que les determinants ci-dessous sont nuls:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos 3\alpha \\ \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cos 4\alpha \end{vmatrix}.$$

8. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix} = \sin(b-c) + \sin(c-a) + \sin(a-b) = -4 \sin\frac{b-c}{2} \sin\frac{c-a}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

9. Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A \ \det B = \det AB$ et que $A^2 - (trA)A + (\det A)I_2 = 0$. En déduire que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$ alors $A^2 = 0$.

10. On considère les deux matrices A et J de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}, \quad j = exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right).$$

Calculer $\det J$. Calculer AJ et en déduire $\det A$.

11. Calculer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse de A

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(i) Calculer $A^t A$.
(ii) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Systèmes linéaires

1. Montrer que le système d'équations linéaires suivant est de Cramer. Le résoudre par la méthode de Gauss et par la méthode de Cramer. Que constate-t-on?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}\right.$$

2. Soit a un réel donné. On considère le système linéaire suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-2a)z & = & 2(1+a) \\ (1+a)x & - & (1+a)y & + & (2+a)z & = & 0 \\ 2x & - & 2ay & + & 3z & = & 2(1+a). \end{array}\right.$$

(a) Calculer le déterminant du système.

(b) Pour quelles valeurs de a le système est-il de Cramer? Le résoudre dans ce cas.

(c) On suppose maintenant que le système n'est pas de Cramer. Pour quelle valeurs de a est-il compatible? Déterminer les solutions lorsque le système est compatible.

3. Déterminer la dimension et une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par les équations

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & - & t & + & u & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & - & 2t & + & 2u & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & + & u & = & 0. \end{array}\right.$$

4. (i) Résoudre les sytèmes suivants. Pour chacun d'eux on commencera par déterminer le rang, les équations et variables principales.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \qquad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1+i)x & + & (1-2i)y & + & (-1+3i)z & = & 2+i \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ ix & + & (2-i)y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \\ 8x & - & y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ x & + & y & - & z & + & 2t & = & 1 \\ & & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

(ii) Pour chaque $j \in \{1, \cdots 5\}$, on note A_j la matrice de chacun des systèmes linéaires précédents. Calculer une matrice inversible P_j telle que $P_j A_j$ soit échelonnée. Parmi ces matrices, quelles sont celles qui sont inversibles? En cas d'inversibilité, calculer l'inverse par la méthode de Gauss et la méthode des déterminants. Peut-on trouver une méthode plus courte?

5. Etudier de même le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + a\,y - z = 1 \\ x + y + a\,z = a \end{cases}$$

où a est un nombre réel.

6. Etudier de même le système

$$\begin{cases} 4bc\,x - ac\,y + 3ab\,z = a \\ 5bc\,x + 2ac\,y + 7ab\,z = b \\ 3bc\,x + ac\,y + 4ab\,z = c \end{cases}$$

où a, b et c sont trois nombres réels non nuls.

Sous-espaces vectoriels et Applications linéaires

1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, preciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base :
a)$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 3x - y + t = 0\}$;
b)$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + 2z + t = 1\}$;
c)$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + t$ et $2x + y - z = 0\}$;
d)$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (3a + b, a - b, a + 5b, 2a + b)\}$.

2. (i) Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = 1\} \quad \text{et} \quad A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x = 0\}.$$

(ii) Soit $B = \{(1, 1, 0, -1), (2, 0, 1, 2), (1, -1, 1, 3), (4, 2, 1, 0)\}$. On pose $E = Vect(B)$. Déterminer une base de E puis en donner une équation cartésienne.

3. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1, 1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1, 1)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$ et la projection sur F associée.

4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 2z = 0$. Quelle est la dimension de F? Déterminer un supplémentaire de F et les deux projections sur F associées.

5. Même question pour le sous-espace $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$.

6. Dans la liste des applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires. Pour chacune des fonctions linéaires, donner leur matrice dans les bases canoniques.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (x - 2y, x + y, x); \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x, y, z) = 2x - y - 3z;$$

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ h(x, y, z) = (x - z, y - z, y); \quad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ k(x) = (-x, x, 2x);$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x, y) = (x - y^2, x + 3y); \quad \Psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ \Psi(x, y, z, t) = (x - y + 2z, y + z - t).$$

Dans chacune des lignes précédentes quelles sont les applications composables? En cas de linéarité calculer,dans les bases canoniques, la matrice des composées obtenues.

7. On note u et v les applications de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui même déterminées par

$$u(P) = P + (X - \mathbf{1})P' - (X^2 - \mathbf{1})P'' \quad \text{et} \quad v(P) = (X - \mathbf{1})P' - \frac{1}{2}X^2P''.$$

Montrer que ces applications sont linéaires et calculer leurs déterminants. Que peut-on en déduire pour ces apllications? Calculer leur noyau et leur inverse (s'il existe).

8. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. Considérons l'application

$$T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \to (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Montrer que T est un isomorphisme d'espaces vectoriels et donner sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

9. (i) On pose $\epsilon_1 = (1,1,1)$, $\epsilon_2 = (1,0,1)$, et $\epsilon_3 = (1,1,0)$. Montrer que $B = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base B. Pourquoi est-on sûr que P est inversible? Calculer son inverse.

(iii) On consière l'application u de $\mathbb{R}^3$ dans lui même définie par

$$u(x,y,z) = (4x - y - 2z, x + y - z, -y).$$

Montrer que u est linéaire. Calculer ses matrices représentatives dans la base canonique puis dans la base B.

10. On pose $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-1,1)$, $w_1 = (1,1,1)$, $w_2 = (-1,1,1)$, et $w_3 = (-1,1,1)$. Montrer que $B = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $B' = (w_1, w_2, w_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer dans le couple de bases (B, B') la matrice de l'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(x,y) = (x+y, x, x-y)$.

11. On fixe les fonctions numériques f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = e^{-x},\ f_2(x) = (x+1)e^{-x},\ f_3(x) = (x^2+1)e^{-x}$$

et on note F le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R})$ engendré par ces trois fonctions.

(i) Montrer que $B = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de F.

(ii) Soit δ l'application définie sur F par $\delta(f) = f'$. Montrer que δ est un automorphisme de F. Donner sa matrice relativement à la base B.

(iii) Calculer la matrice de δ^{-1} dans cette base.

(iv) On note N la matrice de $\delta + Id$ relativement à B. Calculer N^2 et N^3 en utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(v) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}*$.

(vi) Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$. Calculer la dérivée n^{eme} de f à l'aide de la question précédente.

12. On note encore δ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même défini par $\delta(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(i) Donner la matrice D associée à δ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(ii) Cette application δ est-elle bijective? Déterminer son noyau et son image ainsi que les dimensions de ces sous-espaces.

(iii) Calculer $(Id - \delta)(Id + \delta + \cdots + \delta^n)$. En déduire que $Id - \delta$ est inversible et calculer son inverse.

13. Considérons l'application τ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui même défini par $\tau(P)(x) = P(x+1)$ pour tout $p \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que τ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, et déterminer son application inverse τ^{-1}.

(ii) Déterminer la matrice M de τ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer M^{-1}.

(iii) Suivant les notations de l'exercice précédent, calculer $\tau \circ \delta$ et $\delta \circ \tau$ ainsi que les matrices associées dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.