UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **Unité 3MT01**
Département de Mathématiques **2008-2009**

Suites - Feuille 2

1. (a) Soit A un ensemble non vide et majore de $\mathbb{R}$. Montrer que $a = supA$, borne superieure de A, si et seulement si:

pour tout x dans A on a $x \leq a$ et il existe une suite (x_n) de A telle que $\lim_n x_n = a$.

(b) Donner un exemple d'ensemble majoré qui ne contient pas sa borne sup.

(c) Que dire si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{N}$?

(d) Que dire si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$?

2. Soient A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$ et $AB = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majoré et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Montrer que AB n'est pas nécessairement majoré. Quelle condition peut-on rajouter pour avoir AB majoré et $\sup(AB) = \sup A \sup B$?

3. (a) Montrer que si une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle vraie?

(b) Montrer qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si la suite de réels positifs $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.

4. (a) Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que si (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ alors sa limite ℓ est positive. Si tous les u_n sont strictement positifs, la limite est-elle nulle?

(b) Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de réels telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$.

5. Montrer que toute suite convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie?

6. Etudier la convergence des suites de terme général $u_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n}$ et $v_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$.

7. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage de a. Montrer que f est continue en a si et seulement si la condition suivante est réalisée : " Pour toute suite (x_n) du domaine de f, si (x_n) converge vers a alors $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$". Cette propriété reste-t-elle valide pour les fonctions complexes?

8. (Suite géometrique). Soit a un nombre complexe fixé. Etudier, suivant les valeurs de a, la convergence de la suite (a^n). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$. Montrer que $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (S_n) suivant les valeurs de a?

9. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Montrer que :

(i) s'il existe un réel k et un entier p tels que $\forall n > p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;

(ii) s'il existe un réel k et un entier p tels que $\forall n > p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(iii) Application : $u_n = \frac{n^\alpha}{n!}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, et en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

10. Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite réelle. Que pensez-vous des propositions suivantes:

a) Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
b) Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
c) Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.
d) Que peut-on dire d'une suite périodique et convergente?

11. Etudier la convergence des suites de terme général

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{2n+1}{2n+6} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

12. Soit q un entier ≥ 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right).$$

i) Montrer que $u_{n+q} = u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
ii) Calculer les suites extraites $(u_{nq})_n$ et $(u_{nq+1})_n$.
Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_n$.

13. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites complexes telles que la suite $(|u_n - v_n|)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Montrer que la suite (u_n) converge si la suite (v_n) converge.

14. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$ pour tout n et en déduire que la suite (u_n) n'est pas de Cauchy. Est-elle convergente ?

15. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k}{k!}$. Montrer que la suite est de Cauchy.

16. Montrer que la suite $\left(\dfrac{\sin n}{2^n}\right)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, que la suite $\left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy.

17. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $(2 < e < 3)$.

18. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ et converge vers e^x.

19. On considère une suite de nombres complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $k \in [0, 1[$ tel que, $\forall n \geq 1$, on ait $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$. Montrer que (x_n) converge en utilisant le critère de Cauchy.

20. Etudier la convergence des suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$