Feuille 3

Diagonalisation-Trigonalisation

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E_1, \dots, E_n$, n sous-espaces de E.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - $E_1, \dots, E_n$ sont en somme directe.
   - $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad E_i \cap \mathrm{Vect}(\cup_{j>i} E_j = \{0\}$.
   - L'application linéaire φ de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans E définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ est injective.
2. Montrer que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ si et seulement si l'application φ précédente est un isomorphisme.
3. Exhiber trois sous-espaces E_1, E_2 et E_3 de $\mathbb{R}^2$ qui sont deux à deux en somme directe (i.e. $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, $E_1 \cap E_3 = \{0\}$ et $E_2 \cap E_3 = \{0\}$) mais tels que E_1, E_2 et E_3 ne sont pas en somme directe.
4. On se place dans $E = \mathbb{R}^3[X]$, l'espace vectoriel des fonctions polynômiales réelles. On rappelle la conséquence suivante du théorème de division euclidienne :
   $$\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{est racine de } P \in E \Longleftrightarrow \exists Q \in E, \quad P = (X - \alpha)Q.$$
   Soient $E_1 = \{P \in E,\ P(-1) = P(1) = P(2)\}$, $E_2 = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2)\}$ et $E_3 = \{P \in E,\ \forall t \in \mathbb{R} \quad P(-t) = P(t)\}$.
   (a) Montrer que E_1 et E_2 sont en somme directe et que $E_1 \oplus E_2 = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = 0\}$.
   (b) Montrer que $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E$.

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme de E.

1. Soit v un endomorphisme de E qui commute avec u i.e. $u \circ v = v \circ u$.Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces stables par v. En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v.
2. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E et p la projection sur F parallèlement à G.
   (a) Montrer que p et u commutent si et seulement si F et G sont stables par u.
   (b) Soit E_p le sous espace vectoriel de $L(E)$ défini par $E_p = \{v \in L(E),\ v \circ p = p \circ v\}$. Montrer que E_p est isomorphe à $L(F) \times L(G)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}*$ et soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de $\mathbb{C}^n$ stable par A.

2. (a) En considérant A, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $XA = \lambda X$.
   (b) Soit φ la forme linéaire associée à X dans les bases canoniques et soit f l'application linéaire associée à A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'on a $\varphi \neq 0$ et $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. En déduire que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f et qu'il existe un hyperplan de $\mathbb{C}^n$ stable par A.

3. En considérant, par exemple, la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ montrer que les conclusions de 1. et 2. ne subsistent plus si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

4. On reprend les notations de l'exercice 1.4). On considère l'endomorphisme u de E défini par

$$\forall P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E, \quad u(P) = 2a + (\frac{9}{2}a + 3b + 4c)X - (5a + 3c)X^2 + (\frac{3}{2}a + 2c + 3d)X^3.$$

1. Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont stables par u. Que valent les restrictions $u_{|E_1}$, $u_{|E_2}$ et $u_{|E_3}$? Que peut-on en déduire sur u ?
2. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit p_i la projection sur E_i parallèlement à $E_j \oplus E_k$ où $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$. Montrer que $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = \delta_{i,j} p_i$ et que $p_1 + p_2 + p_3 = \mathrm{id}_E$.
3. Vérifier que $u = 2p_1 - 3p_2 + 3p_3$ puis que $u^2 = 4p_1 + 9p_2 + 9p_3$. Exprimer p_1, p_2 et p_3 en fonction de id_E, u et u^2.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n = 2^n p_1 + (-3)^n p_2 + 3^n p_3$ et en déduire une expression de u^n en fonction de id_E, u et u^2 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f(x, y, z, t) = (3x + 2y + 4z + t, -6x - 4y - 8z - 2t, 2x + y + z, y + 5z + 2t).$$

Soient $v_1 = (-1, 2, 0, -2)$, $v_2 = (-2, 4, -1, -1)$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Montrer que F est un sous-espace stable de f. Soit $f_{|F} \in L(F)$ la restriction de f à F, montrer que $\underset{(v_1,v_2)}{\mathrm{Mat}}\, f = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle
$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, f = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$
où $B, C \in M_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le noyau de f. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus F = \mathbb{R}^4$ et donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle
$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, f = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit $u \in L(E)$. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $v = \alpha u + \beta \mathrm{id}_E$.

1. Déterminer P_c^v en fonction de P_c^u, α et β. En déduire $\sigma(v)$ en fonction de $\sigma(u)$, α et β.
2. Quel lien existe-t-il entre les vecteurs propres de u et ceux de v ?

7. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $k \geq 1$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors λ^k est une valeur propre de A^k. Montrer que si X est un vecteur propre de A, alors X est aussi un vecteur propre de A^k.

2. Que peut-on dire des valeurs propres de A dans les cas suivants:
(i) $A^k = 0$;
(ii) $A^k = I_n$;
(iii) $A^2 = A$.

8. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose A inversible.

1. Pourquoi 0 n'est-elle pas valeur propre de A ?

2. Montrer que le vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre pour A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si x est vecteur propre pour A^{-1} associé à la valeur propre λ^{-1}.

3. Déterminer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A. (On pourra commencer par écrire $\det(A^{-1} - tI_n) = \det(tA^{-1}(1/tI_n - A)) = ...$).

9. Démontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Etudier la réciproque en considérant les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $u,\ v \in L(E)$. Le but de l'exercice est de prouver que $\sigma(u \circ v) = \sigma(v \circ u)$.

1. Montrer que $u \circ v$ est un isomorphisme si et seulement si u et v sont des isomorphismes.

2. En déduire que $0 \in \sigma(u \circ v)$ si et seulement si $0 \in \sigma(v \circ u)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. On suppose que λ n'est pas valeur propre de $u \circ v$. On note alors $w = (u \circ v - \lambda \mathrm{id}_E)^{-1}$. Montrer que $w \circ u \circ v = \lambda w + \mathrm{id}_E$ puis $(v \circ w \circ u - \mathrm{id}_E) \circ (v \circ u - \lambda \mathrm{id}_E) = \lambda \mathrm{id}_E$, et en déduire que λ n'est pas valeur propre de $v \circ u$.

4. Déduire de 2. et 3. que $\sigma(u \circ v) = \sigma(v \circ u)$.

11. Déterminer les valeurs propres dans $\mathbb{C}$, les vecteurs propres associés, et écrire la matrice de passage P (quand ça existe) dans la base canonique à la base formée de vecteurs propres et calculer $P^{-1}MP$, pour les matrices suivantes :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -12 \\ -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

12. Déterminer en effectuant le moins de calcul possible si les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. Soient $a,\ b,\ c$ des nombres réels ; déterminer dans quels cas la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

sont diagonalisables.

14. Etudier la véracité des assertions suivantes :

1. Une matrice carrée réelle de taille 2, non inversible et dont la somme des termes diagonaux est non nulle, est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Une matrice carrée réelle de taille 2, inversible et dont la somme des termes diagonaux est nulle, est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

15. Soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{bmatrix}, \text{ avec } a,\ c \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Montrer que A est toujours diagonalisable.

16. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

(i) Montrer que A est inversible.
(ii) A est-elle diagonalisable ?
(ii) Calculer A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

17. Justifier sans effectuer de calcul que les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

18. Justifier sans effectuer de calcul que les matrices suivantes ne sont diagonalisables pas :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

19. Le but de l'exercice est d'établir que si $u, v \in L(E)$ alors $P_c^{u \circ v} = P_c^{v \circ u}$.

1. Soient $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$ où D est inversible et $DC = CD$. Déterminer $\tilde{A}, \tilde{B} \in M_n(\mathbb{K})$ de sorte que
$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$
et en déduire que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.

2. On rappelle que si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = \det(A)$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. En utilisant le rappel précédent, le résultat de 1., et la matrice
$$\begin{bmatrix} tI_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix},$$
montrer que $P_c^{AB} = P_c^{BA}$.

20. Diagonaliser chacune des matrices suivantes lorsque c'est possible (passer éventuellement dans $\mathbb{C}$).
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$
($P_c^B(X) = -(X-1)(X-2)(X-3)$, $P_c^C(X) = -(X-1)(X^2+2)$, $P_c^D(X) = -(X+1)(X+4)(X-4)$, $P_c^E(X) = -(X-4)(X^2 - 6X + 12)$.)

21. Trigonaliser les matrices suivantes dans $\mathbb{R}$ lorsque c'est possible; le faire dans $\mathbb{C}$ si ce n'est pas le cas.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
($P_c^B(X) = -(X-3)(X+3)^2$, $P_c^C(X) = -X(X+2)^2$, $P_c^D(X) = -(X-1)^3$, $P_c^E(X) = (X^2+1)(X-1)^2$.)

22. Soient f, g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices par rapport à la base canonique sont respectivement
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(i) Montrer que f et g commutent ;
(ii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de M et N;
(iii) Parmi les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ invariants par f et g, montrer qu'il en existe un de dimension 1 et un autre de dimension 2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

23. Soit a un réel. On désignera par M_a la matrice carrée de taille 3 suivante :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ -a & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M_a.
2. Pour quelles valeurs de a peut on affirmer, sans plus de calcul, que M_a est diagonalisable ?
3. Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels M_a est diagonalisable.
4. Lorsque $a \in \mathbb{R}$ est tel que M_a n'est pas diagonalisable, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle M_a est triangulaire supérieure.

24. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ les suites de nombres réels définies par les relations de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4y_n \\ y_{n+1} = -x_n + 4y_n \end{cases}$$

et les termes initiaux $x_0 = -1$, $y_0 = 1$. Le but de l'exercice est de déterminer une formulation explicite de ces 2 suites.

1. En réécrivant les relations de récurrence sous forme matricielle, justifier que le problème est équivalent au calcul explicite des puissances de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice A. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Triangulariser la matrice A. On explicitera une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   où $x \in \mathbb{R}$ est à déterminer, et dépend de la matrice P choisie.
4. Calculer les puissances de la matrice T.
5. Donner l'expression de A^n en fonction de P, P^{-1} et T^n. Calculer P^{-1}.
6. En déduire les expressions explicites de A^n et des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$.

25. Trigonaliser les matrices suivantes dans $\mathbb{R}$ lorsque c'est possible; le faire dans $\mathbb{C}$ si ce n'est pas le cas.

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$