UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **Unité 3MA11**
Département de Mathématiques **2008-2009**

Intégrale de Riemann

1. On note φ_1 et φ_2 les fonctions en escalier sur $[0,1]$ définies par

$$\varphi_1 = 2\,\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{3}[} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}[} + 3\,\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = -\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{4}[} + 2\,\mathbf{1}_{[\frac{1}{4},1]}.$$

Calculer $\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2$ et vérifier sur cet exemple la linéarité de l'intégrale.

2. On considère l'application $f : x \to x^2$ sur $[0,1]$. Soient $\sigma = \{x_i\}_{0\leq i\leq n}$ une subdivision régulière de l'intervalle $[0,1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit les fonctions en escalier φ_n, ψ_n sur $[0,1]$ par :

$$\varphi_n(x) = f(x_i)\ \ \forall\, x \in [x_i, x_{i+1}[\quad \text{et} \quad \psi_n(x) = f(x_{i+1})\ \ \forall\, x \in]x_i, x_{i+1}]$$

où $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

(i) Représenter graphiquement les fonctions f, φ_n et ψ_n en prenant $n = 10$.

(ii) En utilisant la définition de l'intégrale, calculer $I_n = \int_0^1 \varphi_n$ et $J_n = \int_0^1 \psi_n$.

(iii) En déduire l'intégrabilité de f sur $[0,1]$ et la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f$.

3. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes.
Toute fonction de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ continue est intégrable au sens de Riemann.
Toute fonction de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann est continue.

4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Montrer qu'on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

5. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{(k-1)\pi}{2n}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+kn}.$$

6. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ou continues sur [0,1]?

(i) f définie par $f(x) = E(\frac{1}{x})$ si $0 < x \leq 1$ et $f(0) = 1$ où E désigne la fonction partie entière.

(ii) g définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ pour x non nul.

7. On considère les fonctions $f : x \to \frac{\sinh x}{x}$ et $\phi : x \to \frac{1}{x}\int_0^x f$.

(i) Montrer que f peut être prolongée en une application continue sur $\mathbb{R}$. En déduire le domaine de définition de ϕ.

(ii) En utilisant la première formule de la moyenne, calculer la limite en 0 de ϕ. En déduire que ϕ peut être prolongée en une application continue sur $\mathbb{R}$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $\mathbb{R}$ et $F : x \to \int_0^x f$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

(a) F est continue sur $\mathbb{R}$.
(b) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
(c) Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
(d) Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
(e) Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
(f) Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
(g) Si f est paire alors F est impaire.

9. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(x) = \int_0^{\sin x} f$$

est dérivable et calculer sa dérivée. (Indication : se ramener à une composition de fonctions ou revenir à la définition de la dérivée).

10. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(i) On pose $\phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Montrer que ϕ est dérivable et calculer sa dérivée.
(ii) Calculer la dérivée de $x \to G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

11. Soit $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$.

(i) Quel est l'ensemble de définition de F? Cette fonction F est-elle continue? Dérivable sur son ensemble de définition?

(ii) Déterminer $\lim_{x \to 1^+} F(x)$ en comparant F à la fonction H définie par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}dt$.

(Indications : soit faire comme l'exercice précédent, soit séparer l'intégrale en deux, et pour l'une faire un changement de variable $u = x^2$. $H(x)$ se calcule explicitement et montrer qu'en fait H est une fonction constante, ensuite il faut comparer $H(x)$ et $F(x)$).

12. Soit (x_n) une suite à valeurs dans $[0, 1]$. Pour tout entier naturel non nul n et toute partie A de $[0, 1]$, on note $N(A, n)$ le nombre d'indices $k \in \{1, \cdots, n\}$ tels que $x_k \in A$. On dit que la suite (x_n) est équirépartie si, pour tout réels a et b vérifiant $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(]a, b[, n)}{n} = b - a.$$

Montrer que si la suite (x_n) est équirépartie alors pour toute fonction en escalier définie sur $[0, 1]$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f.$$