Intégrales Généralisées

1. (i) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Tracer la courbe représentative de f et montrer que $F : x \to \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt$ est bien définie. Calculer F. La fonction f admet-elle une intégrale généralisée convergente sur $[0,+\infty[$? Pouvait-on prévoir ce résultat sans calculer explicitement F? Peut-on calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}dt$?

(ii) Mêmes questions pour la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}$.

2. On désigne par E la fonction partie entière.

(i) On note f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x)=E(\frac{1}{x})$. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. Montrer que $F : x \to \int_x^1 f(t)dt$ est bien définie. Calculer $F(\frac{1}{n})$. La fonction f est-elle à intégrale généralisée convergente sur $]0,1]$?

(ii) On note g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(x)=E(\frac{1}{\sqrt{x}})$. La fonction g est-elle à intégrale généralisée convergente sur $]0,1]$?

3. (i) Montrer que la fonction $x \to \ln(1+\frac{1}{x^2})$ est à intégrale généralisée convergente sur $[0,+\infty[$. Calculer $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})dx$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \to \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est à intégrale généralisée convergente sur $]-\infty,+\infty[$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+x^2)}dt$.

4. Montrer que les intégrales généralisées $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$ et $J=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$ sont convergentes. Calculer I et en déduire J.

5. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x)dx; \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}dx; \quad \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx.$$

6. Montrer que la fonction $x \to \frac{\ln x}{1+x^2}$ est à intégrale généralisée convergente sur $]0,+\infty[$ et que $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$. En déduire $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}dx$.

7. Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et que chacune d'elles est nulle :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx; \quad J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^4}dx.$$

8. Calculer les intégrales généralisées suivantes, en montrant leur convergence :

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(|x|+1)^3}; \quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$$

9. Indiquer pour quelles valeurs du paramètre réel a l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}\sqrt{1+x}}{x^2} dx.$$

10. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}+\sin x} dx; \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

11. Etudier la convergence de intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{1+x^2} \sin x dx.$$

12. Discuter suivant la valeurs des réels α et β la convergence de

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}; \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln|1-x|}{(1+x)x^\alpha} dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx.$$

13. On considère les fonctions $f : x \to \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g : x \to \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x}$. Etudier la nature des intégrales généralisées de f et g sur $[1, +\infty[$. Montrer que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. Que peut-on en conclure?

14. Déterminer les limites à l'infini et en 0, si elles existent, de $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

15. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x + \cos x}} dx; \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{x}}}; \quad \int_0^{+\infty} \sin \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx; \quad \int_0^{+\infty} \sin x \sin \frac{1}{x} dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx; \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln^{\frac{3}{2}}(1+x)} dx; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x} dx; \quad \int_2^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x \ln x} dx; \quad \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x \ln x} dx$$

16. Discuter suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx.$$

17. Soient $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale généralisée $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$ est convergente. Si $n \in \mathbb{N}*$, déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n.