Feuille Réduction des endomorphismes

1. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, u un endomorphisme de E et P un élément de $\mathbb{K}[X]$. On note $\sigma(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.
   (a) Montrer que $P(\sigma(f)) \subset \sigma(P(f))$ et vérifier sur un exemple que cette inclusion est stricte en général.
   (b) Si $P(f) = 0$, montrer que toute valeur propre de f est racine de P.
   (c) On suppose maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\mu \in \sigma(P(f))$. En utilisant la décomposition du polynôme $P - \mu$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, montrer qu'il existe $\lambda \in \sigma(f)$ tel que $\mu = P(\lambda)$. En déduire que $P(\sigma(f)) = \sigma(P(f))$.

2. Déterminer le polynôme minimal de
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
En déduire A^{-1}, A^3, A^{-3} .

3. Calculer, à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $-A^3 + 5A^2 - 6A + 3I = 0$ et en déduire A^{-1}.

5. Déterminer, dans chacun des cas suivants, les polynômes caractéristique et minimal et préciser si la matrice est diagonalisable.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Utiliser la réduction en blocs pour trigonaliser la matrice suivante:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Déterminer, dans chacun des cas suivants, les polynômes caractéristique et minimal, les projecteurs spectraux et la décomposition spectrale de f , f étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice dans la base canonique:
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Déterminer, dans chacun des cas suivants, les polynômes caractéristique et minimal, les projecteurs spectraux et la décomposition spectrale de f , f étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice dans la base canonique:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

9. Considérons la matrice suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Déterminer les polynômes caractéristique et minimal, les projecteurs spectraux et la décomposition spectrale de A.

   (b) Déterminer la suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$, $((x_n, y_n, z_n))_{n\geq 0}$ vérifiant pour tout $n \geq 0$

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & 6x_n - 6y_n + 5z_n \\ y_{n+1} & = & -4x_n - y_n + 10z_n \\ z_{n+1} & = & 7x_n - 6y_n + 4z_n \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ z_0 = -5.$$

10. Considérons les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Déterminer les polynômes caractéristique et minimal, les projecteurs spectraux et la décomposition spectrale de A. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

11. Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre k sur un espace vectoriel de dimension n. On choisit $a \in E$ tel que $f^{k-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $\{a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a)\}$ est libre. Si $k = n$, en déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est très simple.
Application: soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer une base dans laquelle g est représenté par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Soient f, g éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices par rapport à la base canonique s'écrivent

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Montrer que $f \circ g = g \circ f$.
   (b) Déterminer les sous espaces vectoriels propres de f et g.
   (c) Prouver l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f et g sont simultanément triangulaires.

13. (a) Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

    (b) Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

    (c) Montrer que les deux matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal. Qu'en déduit-on?

14. Soit u_m un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice par rapport à la base canonique :

$$\begin{pmatrix} \frac{1+m}{2} & \frac{1-m}{2} & -\frac{1+m}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1+m}{2} & \frac{1+m}{2} \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

    a) Déterminer, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, les polynômes caractéristique et minimal de u_m.
    b) Déterminer pour quelles valeurs de m, u_m est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres.
    c) Quand u_m n'est pas diagonalisable, déterminer les projecteurs spectraux et la décomposition spectrale de u_m.

15. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est la seule valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est nilpotente.

16. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. On note u l'application de E dans E qui à une suite x associe la suite y définie par $y_n = x_{n+1}$. Montrer que u est linéaire et déterminer son noyau.
    On note F l'ensemble des suites x de E qui vérifient la relation

$$x_{n+3} = -3x_{n+2} + 4x_n.$$

    i) Montrer que F est un sous espace de E stable par u. On note v la restriction de u à F.
    ii) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe un unique élément x de F tel que $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = c$. (On ne demande pas de calculer explicitement cette suite.)
    On notera e_1, e_2, e_3 les suites qui correspondent respectivement aux triplets $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.
    Montrer que ces trois suites forment une base de F et déterminer la matrice de v dans cette base.
    Vérifier que le polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 4$ est le polynôme caractéristique de v.
    iii) Montrer que F coïncide avec le noyau de l'endomorphisme $P(u)$. Soit λ une racine de P de multiplicit? r. Montrer que $N = \mathbb{K}er(u - \lambda Id)^r$ est contenu dans F. Quelle est la dimension de N? Soit q un entier tel que $0 \leq q < r$. Montrer que la suite $(\lambda^n\, n^q)$ appartient ? N.
    iv)A l'aide de ce qui précède, déterminer toutes les suites de F.

17. Déterminer les formes réduites de Jordan des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$