UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **Unité 3MT01**
Département de Mathématiques **2007-2008**

Partiel du 6 Novembre 2008

Cours

1. i) Donner la définition de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels E_1, E_2 d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Définir aussi les projections associées π_1, π_2 et énoncer les propriétés principales de ces applications.

ii) Donner la définition d'un projecteur p de E.

iii) Montrer la propostion suivante:

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et p un projecteur de E. Alors $E = Imp \oplus Kerp$ et p coïncide avec la projection sur Imp parallèlement à $Kerp$.

2. i) Donner la définition d'une valeur propre d'un endomorphisme u.

ii) Enoncer le théorème de diagonalisation.

3. Enoncer le théorème de comparaison pour les séries numériques.

4. i) Donner la définition d'une série semi-convergente.

ii) Enoncer le théorème des séries alternées.

Exercice I

Soit f et g les applications définies sur $\mathbb{R}^4$ par

$$f(x,y,z,t) = (x+y+2z, y+2z+6t, z+3t, t) \qquad \text{et} \qquad g(x,y,z,t) = (x-2z, y-6t, 0, -2t).$$

i) Montrer que les applications f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^4$.
ii) Calculer leur déterminant.
iii) Déterminer si les applications f et g sont injectives, surjectives, bijectives. S'il existe, déterminer leur inverse.
iv) Déterminer le noyau et l'image de f et g.
v) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f et g. Les applications f et g sont-elles diagonalisables ?

Exercice II

On considère l'application linéaire u de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui même définie par

$$u(a+bX+cX^2) = (3a-b+c) + (a-3b+3c)X^2.$$

i) Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
ii) Calculer le polynôme caractéristique de u. En déduire $\sigma(u)$.

iii) Montrer que u est diagonalisable. Ecrire une matrice diagonale D qui répresente u dans une base bien choisie.
iv) Déterminer une base $\widetilde{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle u soit représentée par D.
v) Déterminer la matrice de passage de la base canonique B vers $\widetilde{B}$.
N.B. Cette question est facultative. Elle est donc hors barême mais peut donner des points supplémentaires.
vi) Déterminer la matrice A^n.

Exercice III

On rappelle que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\sum \frac{4}{(2n-1)^2}$ converge et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2}$.

Exercice IV

i) Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{n+3}{n(n^2-1)}$ est convergente.
ii) Montrer que $\frac{n+3}{n(n^2-1)} = -\frac{3}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.
iii) Quelle est la nature des séries $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n-1}$? Cela est-il contradictoire avec les résultats précédents?
iv) Calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+3}{n(n^2-1)}$.

Exercice V

A l'aide d'un développement limité, étudier la nature de la série $\sum (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n) \ln(1 - \frac{1}{n})$.

Exercice VI

i) Etudier la convergence et la convergence absolue de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+\sin n}$.
ii) Etudier la convergence des séries $\sum \frac{\cos nx}{n}$ et $\sum \frac{\sin nx}{n}$, selon la valeur de x.
iii) Etudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$.