Master 1. SC M1 MT05. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

Feuille 1: Espaces de Banach.

Exercice 1. a) Montrer que l'espace vectoriel $C(K,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'espace métrique compact (K,d) peut être muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)|$ pour $f\in C(K,\mathbb{R})$ qui fait de $C(K,\mathbb{R})$ un espace de Banach. Où utilise-t-on la compacité de K?

b) On considère l'espace vectoriel $C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ l'espace de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ vérifiant

$$\lim_{|x|\to\infty}|f(x)| = 0.$$

où $|x|$ est une norme fixée sur $\mathbb{R}^n$ Montrer que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$ pour $f\in C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ définie une norme qui fait de $C_0(\mathbb{R}^n)$ un espace de Banach.

c) On considère $C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})\subset C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ et que $C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ munit de la norme induite de $C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ n'est pas un espace de Banach.

d) Montrer que $C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$.

Exercice 2. a) Soient $1<p,q<\infty$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Démontrer l'inégalité dite de *convexité*: pour tout $a,b\geq 0$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

b) En déduire l'inégalité de *Hölder* sur les espaces $L^p = L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ pour $1\leq p\leq\infty$: pour tout $f\in L^p$ et tout $g\in L^q$ ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$),

$$||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q.$$

c) Soit $1\leq p\leq\infty$. Déduire de ce qui précède l'inégalité de *Minkowski*: pour tous $f,g\in L^p$,

$$||f+g||_p \leq ||f||_p+||g||_p.$$

En déduire que $f\to||f||_p$ est une norme sur L^p.

Exercice 3. (*Ensembles convexes*).
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit B une partie non-vide de E, on dit que B est *convexe si pour tout* $\lambda\in[0,1]$ *et tout couple* $(x,y)\in B\times B$, *on a* $\lambda x+(1-\lambda)y\in B$.
Soit A une partie non-vide de E, on définit l'enveloppe convexe de A comme le plus petit ensemble convexe contenant A. On la notera $co(A)$.

(1) Donner des exemples d'ensembles convexes dans le plan et dans l'espace. Puis des exemples d'ensembles non-convexes.
(2) Montrer que $co(A)$ existe.

(3) Montrer que $co(A)$ est l'ensemble des $x \in E$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ positifs et $a_1, ..., a_n \in A$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ et $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \, a_k$.

(4) Dans le plan usuel, décrire toutes les enveloppes convexes des ensembles constitués respectivement de 1 point, 2 points, 3 points, 4 points puis 5 points distincts.

(5) Décrire tous les ouverts convexes de $\mathbb{R}$. Comparer par rapport au plan.

(6) On considère $E = C_{\mathbb{R}}[0,1]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues définies sur $[0,1]$. Soit A constitué de deux éléments: les fonctions $f_0(t) = 2$ et $f_1(t) = 3t$, $t \in [0,1]$. Décrire les graphes des fonctions de $co(A)$.
(*On montrera que* $(2/3, 2)$ *appartient au graphe de* f *pour tout* $f \in A$).

Exercice 4. Soit E un e.v.n. et F un espace de Banach dont les normes sont notées respectivement $||.||_E$ et $||.||_F$. On pose $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Soit $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, on pose $||A|| = \sup_{||x||_E=1} ||Ax||_F$

Montrer que $A \to ||A||$ est une norme sur cet espace et $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est un espace de Banach.