Master 1. SC M1 MT05. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

Feuille 2: Formes linéaires, applications du lemme de Zorn et jauge.

Exercice 1. Hyperplan.

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire.

1) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \ker f$ alors $E = ker f \oplus \mathbb{K}x$.

2)a) Soit H un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe $a \notin H$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Montrer qu'il existe une forme linéaire f telle que $H = \ker f$.

b) Soit g une autre forme linéaire telle que $H \subset \ker g$, montrer alors qu'il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g = \mu f$.

Le noyau d'une forme linéaire non- nulle est appelé hyperplan.

3) Que peut-on dire d'un sous-espace vectoriel F de E qui contient strictement un hyperplan?

On suppose E muni d'une norme.

4) Montrer que si u est une forme linéaire (non-nulle) alors u est continue si et seulement si $\ker u$ est fermé. [On montrera qu'il existe un $a \in E$ tel que $u(a) = 1$ et un $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap (a + \ker u) =\emptyset$. De ceci on déduira que u est bornée].

5) Montrer que pour une forme linéaire f quelconque alors soit $\ker f$ est fermé, soit $\ker f$ est dense dans E.

Exercice 2. Bases et supplementaires d'un espace vectoriel.

a) Soit E un espace vectoriel et G une partie de E génératrice de E (tout élément de E est une combinaison linéaire finie d' éléments de G) et L une partie libre de E (toute combinaison linéaire finie qui donne zéro à ses coefficients nuls). On suppose $L \subset G \subset E$. Montrer qu'il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$. En déduire que tout espace vectoriel admet une base (dénombrable ou non). [On commencera par traiter le cas où G est finie. Pour le cas où G est infini, on utilisera le lemme de Zorn avec la relation d'inclusion et l'ensemble $\mathcal{S}$ des parties libres de E contenant L et contenues dans G].

On dit que B est une base de Hamel.

b) Montrer que tout sous-espace vectoriel F de E possède au moins un sous-espace supplémentaire et que celui-ci n'est pas unique si F n'est pas réduit à $\{0\}$ ou E.

c) Montrer que si E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et qu'il admet une base dénombrable $(e_i)_{i\in I}$ (I équipotent à $\mathbb{N}$) alors E est dénombrable.

d) Montrer que toute base de Hamel de $\mathbb{R}$ $(x_j)_{j\in J}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel possède plus d'un élément.

e) Montrer qu'en fait cette base n'est pas dénombrable mais est équipotente à $\mathbb{R}$.

f)Soit $j_0 \in J$, et soit φ la $\mathbb{Q}$-forme linéaire sur $\mathbb{R}$ associant à tout $y \in \mathbb{R}$, sa coordonnée sur (x_{j_0}) dans la base $(x_j)_j$. Démontrer que φ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, que $\ker \varphi$ est dense dans $\mathbb{R}$, et que pour tout intervalle ouvert non-vide U de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\varphi(U)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Formes lineaires sur les Hilbert.

Soit M un sous espace vectoriel d'un espace de Hilbert H et $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue de norme $\| f \|_M$. Montrer qu'il existe un unique prolongement continu de f sur H de norme $\| f \| = \| f \|_M$.

Exercice 4. Semi-norme.

Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:
(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
(Si de plus p vérifie $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ alors on dit que p est une norme).
Montrer que
a) $p(0) = 0$.
b)$| p(x) - p(y) | \leq p(x-y)$.
c) $p(x) \geq 0$.
d) $\{x : p(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E.
Définitions:
On pose pour $t > 0$, $tA = \{ta, a \in A\}$.
(1) A est un ensemble convexe de E si $A \subset E$ et pour tout $t \in [0,1], tA + (1-t)A \subset A$.
(2) On dit que $A \subset E$ est absorbant si pour tout $x \in E$, il existe $t = t(x) > 0$ tel que $x \in tA$.
(3) On dit que $A \subset E$ est équilibré si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha| \leq 1$ alors $\alpha A \subset A$.

Fonctionnelle de Minkowski.

Soit A un ensemble convexe non vide de E. On definit la fonctionnelle de Minkowski (jauge) μ_A de A par :

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\}, \quad x \in E$$

On suppose que A est convexe et absorbant dans E.

Montrer alors que l'on a les propriétés suivantes:
a) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$ pour tout $x, y \in E$.
b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$.
c) μ_A est une semi-norme si A est équilibré.
d) Si $B = \{x : \mu_A(x) < 1\}$ et $C = \{x : \mu_A(x) \leq 1\}$ alors $B \subset A \subset C$ et $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.
e) Si p est une semi-norme sur E et si $D = \{x : p(x) < 1\}$ alors D est convexe, absorbant, équilibré et $p = \mu_D$.