Master 1. SC M1 MT05. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

Feuille 4: Théorème de Hahn-Banach géométrique.

1 - Soient E un espace vectoriel normé réel, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est totale si le sous-espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E. A l'aide de la forme géometrique du Théorème de Hahn-Banach, montrer que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est totale si et seulement si, toute forme linéaire continue f telle que $f(x_i) = 0$ pour tout $i \in I$ est nulle.

2 - Soit E un espace de Banach réel.

a) Montrer que E est réflexif si et seulement si son dual E' est réflexif.

b) Montrer que si E est réflexif, tout sous-espace vectoriel fermé de E est réflexif.

(Utiliser la forme géometrique du théorème de Hahn-Banach)

3 - Soient p une semi-norme sur un espace vectoriel normé réel E, A et B les sous-ensembles de E définis par, $A = \{x/p(x) < 1\}$, $B = \{x/p(x) \leq 1\}$.

a) Montrer que $B^0 \subset A$, $B \subset \bar{A}$.
b) Si p est continue montrer que $B^0 = A$ et $\bar{A} = B$.
c) Si p est la jauge d'un voisinage V convexe symétrique de 0, montrer que $V^0 = A$, $\bar{V} = B$.

4 - Soient E un espace normé et $f, f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires continues sur E telles que $\displaystyle\bigcap_{1\leq i\leq n} Kerf_i \subset Kerf$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. (Considérer le sous-espace vectoriel $\{(f(x), f_1(x), \dots, f_n(x)) \mid x \in E\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, appliquer la forme géometrique du théorème de Hahn-Banach dans $\mathbb{R}^{n+1}$).

5 - Soient E un espace normé et $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires continues sur E , $M > 0$, et $a_1, \dots, a_n$ des réels. On se propose de montrer le résultat suivant (théorème de Helly): les deux affirmations suivantes sont équivalentes,

(1) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq M + \epsilon$ et $f_i(x) = a_i$.

(2) Pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on a, $\displaystyle|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i| \leq M\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\|$.

I. Montrer que (1) implique (2).
II. On suppose que (2) est vérifiée.

1) Dans un premier temps, on suppose que les formes linéaires $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes.

a) Soit $F = \{x \in E \mid f_i(x) = a_i, 1 \leq i \leq n\}$. Montrer que F est non-vide.

b) Montrer qu'il existe $f \in E'$ tel que, $R\|f\| \leq \inf_{y \in F} f(y)$. (Appliquer le théorème Hahn-Banach géométrique à $B(0,R)$ et F).

c) Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$.

d) Montrer que (1) est satisfaite.

2) On ne suppose plus que les formes linéaires $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes. En considérant un système libre maximal de l'espace engendrée dans E' par les formes $f_1, \dots, f_n$. Conclure le cas général.

6 - Soient E un espace vectoriel normé réel et A une partie convexe de E.
1) Soient $x \in A$, $\lambda \in]0,1[$, h l'homothétie de centre x et de rapport λ. Montrer que $h(A) \subset A$. Montrer que $\mathring{A}$ est convexe .
2) Soient $x \in \bar{A}$, $x_0 \in \mathring{A}$. On se propose de montrer que l'intervalle $]x_0, x[$ défini par, $]x_0, x[= \{(1-t)x_0 + tx \mid 0 < t < 1\}$, est contenu dans $\mathring{A}$. Soit $y \in]x_0, x[$.
a) Montrer qu'il existe $u \in \mathring{A}$ et $v \in A$ tels que $y \in]u, v[$. (Considérer l'homothétie de centre y transformant x_0 en x).
b) En déduire que $y \in \mathring{A}$.
3) Montrer que si A est convexe et $\mathring{A}$ non vide, on a $\bar{A} = \bar{\mathring{A}}$.
4) Montrer que si $\mathring{A}$ est non vide on a, $\mathring{A} = \mathring{\bar{A}}$. (Si $x_0 \in \mathring{A}$ et $x \in \mathring{\bar{A}}$, montrer qu'il existe $x_1 \in \bar{A}$ tel que $x \in]x_0, x_1[$).

7 - Soient A et B des convexes disjoints dans un espace normé réel.
a) Montrer que si A et B sont ouverts ils peuvent être séparés strictement par un hyperplan fermé.
b) On suppose l'intérieur de A non vide. Montrer que A et B peuvent être séparés par un hyperplan fermé.

8 - a) Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ de deux convexes fermés disjoints qui ne peuvent être séparés strictement par un hyperplan fermé.
b) Montrer que deux convexes fermés disjoints dans un espace vectoriel de dimension finie peuvent être séparés par un hyperplan fermé. (Remarquer que tout convexe fermé est réunion d'une suite croissante de convexes compacts).

9 - a) Soient A et B des convexes d'un espace normé réel tels que $A - B$ soit dense . Montrer que A et B ne peuvent pas être séparés par un hyperplan fermé.
b) Soient A et B les parties de ℓ^1 définies par $A = \{(x_n) \mid \forall n \geq 1, x_n = 0\}$, $B = \{(x_n) \mid \forall n \geq 1, |n^3 x_n + n| \leq x_0\}$. Montrer que A et B sont des convexes fermés disjoints

qui ne peuvent pas être séparés par un hyperplan fermé. (On pourra approcher $x \in \ell^1$ par $(a-b)$ où $a \in A$, $b \in B$ et $b_n = -\frac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang).

10 - Soit E un espace normé réel. On appelle hyperplan d'appui de $A \subset E$ un hyperplan H contenant au moins un point de A et tel que tous les points de A soient d'un même côté de H.
a) Montrer que si H est hyperplan d'appui de A , $H \cap A$ est contenu dans la frontière de A.
b) Si E est un espace de Hilbert et A la boule unité de E, déterminer les hyperplans d'appui de A.
c) Montrer que si $\mathring{A}$ est non vide, les hyperplans d'appui de A sont fermés.

11 - Soit E un espace normé réel. On définit le polaire A^o (resp.${}^oB$) d'une partie A de E (resp.d'une partie B de E') par, $A^o = \{f \in E' / < f, x > \leq 1, \text{ pour tout } x \in A\}$, (resp.${}^oB = \{x \in E / < f, x > \leq 1, \text{ pour tout } f \in B\}$).
a) Quel est le polaire de la boule unité?
b) Montrer que le polaire d'une partie de E (resp. E') est convexe et fermé.
c) Soit A une partie convexe de E contenant 0. Montrer à l'aide du théorème de Hahn-Banach géométrique que ${}^o(A^o) = \bar{A}$.

12 - On rappelle qu'un espace normé est séparable s'il contient une partie dénombrable dense.
a) Montrer qu'un espace normé séparable contient un sous-espace vectoriel dénombrable dense.
b) Montrer que les espaces c_0 et ℓ^p pour $1 \leq p < \infty$ sont séparables.
c) Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable. (Considérer la famille des boules ouvertes $(B(\chi_A, 1))_{A \subset \mathbb{N}}$, où, pour $A \subset \mathbb{N}$, χ_A désigne la fonction caractéristique de A).
d) Soit E un espace normé. On suppose que son dual E' est séparable. Montrer que E est séparable. (Soit (f_n) une suite dense dans E', considérer une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$, $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$ et montrer à l'aide de la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach que (x_n) est totale dans E).

13 - Soient E un espace vectoriel réel, C une partie convexe de E, f une application de E dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur C si,

$$\forall x, y \in C, t \in]0,1[\ ,\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

a) Soit D le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par, $D = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \ / \ f(x) \leq t\}$ (surgraphe de f). Montrer que f est convexe si et seulement si D est un convexe de $E \times \mathbb{R}$.
b) On suppose que E est un espace vectoriel normé. Montrer que si f est continue, D est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.
c) Soit φ une forme linéaire continue sur $E \times \mathbb{R}$ (muni de la norme , $\|(x,t)\| = \|x\| + |t|$). Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}, v \in E'$, tels que pour tout $(x,t) \in E \times \mathbb{R}, \varphi(x,t) = v(x) + bt$.
d) On suppose f convexe et continue. Soient $x \in C$ et $\epsilon > 0$. En appliquant la forme géométrique du théorème de **Hahn-Banach** à D et $(x, f(x) - \epsilon)$, montrer qu'il existe $u \in E', a \in \mathbb{R}$ tels que, $f(x) - \epsilon \leq u(x) + a$, et pour tout $y \in C, u(y) + a \leq f(y)$.

En déduire que f restreinte à C est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues de C dans $\mathbb{R}$.

14 - Soit E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ de la convergence uniforme.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n(t) = e^{int}$, et pour $f \in E$ on désigne par $\hat{f}(n)$ le coefficient de Fourier de f, $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e_n(t)}dt$.
Soit $\varphi \in E'$, pour tout $f \in E$ on pose, $Tf(x) = \varphi(\tau_x f)$, où pour x réel, $\tau_x f$ désigne la translatée de $f, \tau_x f : t \mapsto f(t+x)$.

1) a) Montrer que T est une application linéaire continue de E dans lui-même.
b) Déterminer $\widehat{Te_p}(n)$ pour $n, p \in \mathbb{Z}$.
c) En déduire que pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ on a, $\widehat{Tf}(n) = \varphi(e_n)\hat{f}(n)$.

2) Soit $f \in E$, on désigne par V le sous-espace vectoriel de E engendré par les translatées $\tau_x f$ de f. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $e_n \in \overline{V}$ si et seulement si, $\hat{f}(n) \neq 0$. A quelle condition V est-il dense dans E? (Utiliser la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach).

15 - 1) Soit E un espace vectoriel A une partie de E. Montrer qu'il existe un plus petit convexe de E contenant A. (On l'appelle enveloppe convexe de A, noté $Co(A)$). Montrer que l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres de suites finies de points de A, (ie: l'ensemble des points de la forme, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, où $n \in \mathbb{N}, (x_1, \ldots, x_n)$ est une suite de points de A, $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$).
2) Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel réel E. On dit qu'un point z de A est un point extrêmal de A si, pour tous x, y de A et tout $\lambda \in]0,1[$, on a,

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y \Rightarrow x = y = z$$

a) Montrer que x est un point extrêmal de A si et seulement si $A \setminus \{x\}$ est convexe.
b) On suppose que E est un espace normé (non réduit à zéro), montrer que tout point extrêmal de A appartient à la frontière de A.
c) On suppose que E est l'espace des suites réelles convergeant vers 0 (muni de la norme usuelle $\|.\|_\infty$). Montrer que la boule unité de E n'admet pas de point extrêmal.
d) Montrer que dans un espace préhilbertien l'ensemble des points extrêmaux de la boule unité est la sphère unité.
3) Soient E un espace vectoriel normé réel et K une partie convexe compacte et non vide de E. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties F compactes et non vides de K telles que pour tous x, y de K, $\lambda \in]0,1[$, on ait, $\lambda x + (1-\lambda)y \in F \Longrightarrow x, y \in F$.
a) Soit $f \in E'$ et soit $F \in \mathcal{F}$, montrer que l'ensemble $S = \{x \in F, f(x) = \sup\limits_{y \in F} f(y)\}$ appartient à $\mathcal{F}$.
b) Montrer que $\mathcal{F}$ possède un élément minimal pour l'inclusion. (Utiliser le théorème de **Zorn**).
c) Montrer à l'aide du théorème de Hahn-Banach qu'un élément minimal de $\mathcal{F}$ est réduit à un point. En déduire que K possède au moins un point extrêmal.
d) Montrer que K est égal à l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrêmaux. Enoncer le théorème démontré (théorème de **Krein-Milman**).