Master 1. SC M1 MT05. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

Feuille 5: Baire et ses conséquences.

1 - Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach (réels ou complexes). Etablir l'équivalence des conditions suivantes, pour une application bilinéaire B de $E_1 \times E_2$ dans F :
(i) B est continue sur $E_1 \times E_2$.
(ii) B est séparément continue i.e. $x_1 \mapsto B(x_1, x_2)$, resp. $x_2 \mapsto B(x_1, x_2)$ est continue, pour tout x_2, resp. x_1 fixé.
(iii) Il existe une constante $C \geq 0$ avec $\|B(x_1, x_2)\|_F \leq C \,\|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}$, pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.
(iv) $\sup_{\|x_1\|_{E_1} \leq 1,\, \|x_2\|_{E_2} \leq 1} \|B(x_1, x_2)\|_F < +\infty$.
(v) $\sup_{\|x_1\|_{E_1} = 1,\, \|x_2\|_{E_2} = 1} \|B(x_1, x_2)\|_F < +\infty$.
(vi) $\sup_{x_1 \in E_1 \setminus \{0\},\, x_2 \in E_2 \setminus \{0\}} \frac{\|B(x_1, x_2)\|_F}{\|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}} < +\infty$.
De plus, montrer que l'infimum des constantes $C \geq 0$ dans (iii) et les suprema dans (iv), (v), (vi) coïncident.

2 - (*Théorème de Hellinger–Toeplitz*) Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Prouver la continuité de tout endomorphisme linéaire A de $\mathcal{H}$ qui est *symétrique* i.e. qui vérifie $(Ax|y) = (x|Ay)$, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$.

3 - Rappelons que la transformée de Fourier

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-ixy}$$

d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$ i.e. $\widehat{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui disparaît à l'infini (*Riemann–Lebesgue*). Prouver l'existence de fonctions dans $C_0(\mathbb{R})$ qui ne sont pas des transformées de Fourier de fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$.
Indications. (i) *Méthode abstraite*: Si la transformation de Fourier était bijective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$, les normes $\|\, f \,\|_1$ et $\|\, \widehat{f} \,\|_\infty$ seraient équivalentes. On montre que c'est impossible en considérant par exemple les *fonctions trapèzes* $\widehat{f_n} = 1_{[-1,1]} * 1_{[-n,n]}$.
(ii) *Méthode directe*: On montre qu'une fonction $f(x)$ impaire continue, égale à $\frac{1}{\ln x}$ pour $x > 0$ grand, n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

4 - Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Rappelons que l'*oscillation* de f en un point $x \in \mathbb{R}$ est mesurée par

$$\omega(x) = \inf_{\delta > 0} \sup_{y,\, z \in \,]x-\delta,\, x+\delta[} |f(y) - f(z)| \,.$$

(i) Observer que f est continue en x si et seulement si $\omega(x) = 0$.
(ii) Vérifier que $U_r = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \omega(x) < r \,\}$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$, pour tout $r > 0$.
(iii) Supposons dorénavant que f est une fonction dans la *première classe de Baire* i.e.

f est limite simple (ou ponctuelle) d'une suite de fonctions continues $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer que les ensembles U_r sont alors denses dans $\mathbb{R}$.
(iv) En déduire que les points de continuité, resp. de discontinuité de f constituent un ensemble dense, resp. maigre dans $\mathbb{R}$.

5 - Dans un espace topologique un ensemble est dit *maigre* s'il est réunion au plus dénombrable d'ensembles A_n avec $(\overline{A_n})^\circ = \emptyset$.
(i) Donner des exemples (non triviaux) d'ensembles maigres.
(ii) Observer qu'une réunion dénombrable de parties maigres est maigre.
(iii) Enoncer le théorème de Baire en terme d'ensembles maigres.
(iv) Dans un espace métrique complet montrer que le complémentaire d'un ensemble maigre est dense.

6 - Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ une fonction continue (pour la métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$). Montrer que l'ensemble des nombres réels où f ne se prolonge pas par continuité est maigre dans $\mathbb{R}$.