Master 1. SC M1 MT05. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

$\boxed{\text{Correction du problème 1}}$

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et H un sous-espace vectoriel de E.

(1) (facile) utilise le fait que H est un s.e.v.

(2) Si $\pi(x) = \pi(y)$ alors $x + H = y + H$ donc $x \in y + H$ i.e. il existe $h \in H$ tq $x = y + h$ d'où $x - y \in H$. Réciproque: si $x - y = h_1 \in H$ alors $x + H = y + h_1 + H = y + H$ car l'application $h \to h + h_1$ de H dans H est une bijection (*).

(3) D'après ce qu'il précède, on peut choisir un autre représentant x' de $p = \pi(x)$ ssi $x' - x \in H$. Il faut donc commencer par vérifier que la somme est bien définie indépendamment du représentant. Notons $p = \pi(x)$ et $q = \pi(y)$. Soient x', y' tq $p = \pi(x')$ et $q = \pi(y')$ alors $x = x' + h_1$ et $y = y' + h_2$ avec $h_i \in H$. On a

$$(x + H) \oplus (y + H) = (x + y) + H = x' + y' + h_1 + h_2 + H =$$

$$x' + y' + H = (x' + H) \oplus (y' + H)$$

car l'application $h \to h + h_1 + h_2$ de H dans H est une bijection. La somme est donc bien définie. La vérification de $(E/H, \oplus)$ est un groupe commutatif est élémentaire et résulte de la même propriété de $(E, +)$. Le produit extérieur $\lambda \odot (x + H) = \lambda x + H$ est bien défini car ne dépend pas du choix du représentant. En effet, si x et x' sont dans la même classe alors $x' = x + h_1$ et $\lambda x' + H = \lambda(x + h_1) + H = \lambda x + \lambda h_1 + H = \lambda x + H$ par l'argument (*) ci-dessus. Les autres propriétés d'e.v proviennent aussi du fait que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel et sont faciles à vérifier. Ainsi $(E/H, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel. On notera e l'élément neutre de E/H pour la loi $\oplus$. On a $\pi(0) = 0 + H = H = e$.

(4) L'application $\pi : E \longrightarrow E/H$ est linéaire surjective. La surjectivité provient de la construction même de l'application. En effet, un élément de E/H est un sous-ensemble (affine) de E de la forme $p = x + H$ pour un $x \in E$ ainsi un antécédant (naturel) de p est x et on a bien $\pi(x) = x + H$ par cette construction. *Nota*: On notera que l'on a utilisé une minuscule p pour nommé le sous-ensemble $x + H \subset E$. La raison est que $p = x + H$ est vu comme un *élément* dans E/H dans toute la suite. Pour rendre concret l'ensemble E/H, prennons un exemple: si $E = \mathbb{R}^2$ et $H = \mathbb{R} \times \{0\}$ alors $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) \in H$ ssi $y_1 = y_2$ et la classe $(x_1, y_1) + H$ est la droite horizontale d'équation $y = y_1$. L'ensemble des classes E/H est donc l'ensemble des droites horizontales **pour cet exemple**.
La linéarité: soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $\pi(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y + H = (\lambda x + H) + (\mu y + H) = \lambda(x + H) + \mu(y + H) = \lambda\pi(x) + \mu\pi(y)$ car $H + H = H$ et $\alpha H = H$ en temps qu'ensembles.

A partir de maintenant, on suppose de plus que $(E, ||.||)$ est un e.v.n. et que H est un s.e.v fermé de E.

(5) *On pose $N(p) = N(\pi(x)) = \inf_{h\in H} ||x - h||$ pour $p = \pi(x) \in E/H$.*

(a) $N(p)$ est bien définie indépendamment du représentant $x \in E$ de $p \in E/H$. En effet, soit x' un autre représentant $p = \pi(x)$ alors $x' = x + h_1, h_1 \in H$ alors $\inf_{h\in H} ||x' - h|| = \inf_{h\in H} ||x - (h - h_1)|| = \inf_{h\in H} ||x - h||$ par l'argument (*).

Soit $x = 0$ alors $N(e) = N(\pi(0)) = \inf_{h\in H} ||0 - h|| = ||0 - 0|| = 0$. Réciproque: si $N(p) = 0$ alors $\inf_{h\in H} ||x - h|| = 0$. Il existe une suite $h_n \in H$ tel que $\lim_n ||x - h_n|| = 0$. Ainsi $x \in H$ car H est fermé. Donc $p = \pi(x) = H = e$. D'où $N(p) = 0 \Leftrightarrow p = e$.

Soit $p = \pi(x), q = \pi(y) \in E/H$. Alors $N(p + q) = N(\pi(x + y)) = \inf_{h\in H} ||x + y - h|| \leq \inf_{h_1,h_2\in H} ||x + y - (h_1 + h_2)||$ car $h_1 + h_2 \in H$. D'où $N(p+q) \leq \inf_{h_1\in H} ||x-h_1|| + \inf_{h_2\in H} ||y-h_2|| = N(p)+N(q)$ par inégalité triangulaire sur E et l'indépendance des choix h_1, h_2.

Soient $p = \pi(x) \in E/H$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. $N(\lambda p) = N(\lambda\pi(x)) = N(\pi(\lambda x)) = \inf_{h\in H} ||\lambda x - h|| = \inf_{\lambda h\in H} ||\lambda x - \lambda h|| = |\lambda| \inf_{h\in H} ||x - h|| = |\lambda|N(p)$ car $\lambda H = H$ en temps qu'ensembles. On a donc $N(\lambda p) = |\lambda|N(p)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (le cas $\lambda = 0$ est clair) et ainsi N est une norme sur E/H.

(b) π est continue et $||\pi|| \leq 1$. On a $N(\pi(x)) = \inf_{h\in H} ||x - h|| \leq ||x||$ avec $h = 0$. D'où le résultat : π est continue et $||\pi|| = \sup\{N(\pi(x)), ||x|| \leq 1\} \leq 1$.

(c) Montrons que si $H \neq E$ alors $||\pi|| = 1$. Soit $x \in E \setminus H$ alors $N(\pi(x)) > 0$ sinon $N(\pi(x)) = 0$ donc $\pi(x) = e = H$ (car N est une norme) ainsi $x \in H$. Contradiction. On pose $p = \frac{\pi(x)}{N(\pi(x))}$ alors $N(p) = 1$. On pose $y = \frac{x}{N(\pi(x))}$ ainsi $p = \pi(y)$. On a $1 = N(p) = \inf_{h\in H} ||y - h||$. Donc il existe une suite $h_n \in H$ telle que $1 = \lim_n ||y - h_n||$. On pose $y_n = y - h_n$, alors $\lim_n ||y_n|| = 1$. On a, pour tout n,

$$\frac{N(\pi(y_n))}{||y_n||} \leq ||\pi||.$$

Or $N(\pi(y_n)) = N(\pi(y - h_n)) = N(\pi(y)) = N(p) = 1$. D'où,

$$\frac{1}{||y_n||} \leq ||\pi||.$$

En passant à la limite sur n, $1 \leq ||\pi||$ puis $||\pi|| = 1$.

On note $B(a, R)$ la boule de centre $a \in E$ et de rayon $R > 0$ dans E pour la norme $||.||$ et $\Lambda(\pi(a), R)$ la boule de centre $\pi(a) \in E/H$ et de rayon $R > 0$

dans E/H pour la norme N.

(d) Montrons que $\pi\left(B(a,R)\right) \subset \Lambda(\pi(a),R)$. Soit $x \in B(a,R)$, montrons que $\pi(x) \in \Lambda(\pi(a),R)$. En effet, on a

$$N(\pi(x) - \pi(a)) = N(\pi(x-a)) \leq ||x-a|| < R.$$

Réciproquement, soit $p = \pi(y) \in \Lambda(\pi(a),R)$ i.e.

$$N(\pi(y) - \pi(a)) = N(\pi(y-a)) < R$$

i.e. $\inf_{h\in H} ||y-a-h|| < R$. Donc il existe $h_0 \in H$ tel que $||y-a-h_0|| < R$. On pose $x = y - h_0$, on a $p = \pi(y) = \pi(x)$ et $||x-a|| < R$. Ainsi p est l'image par π de $x \in B(a,R)$ i.e. $\Lambda(\pi(a),R) \subset \pi\left(B(a,R)\right)$.

(e) Déduisons-en que l'image d'un ouvert de E par π est un ouvert de E/H (*On dit que l'application est ouverte*). Soit Ω un ouvert de $(E, ||.||$. Montrons que $\pi(\Omega)$ est un ouvert de l'espace métrique $(E/H, N)$. Soit $p \in \pi(\Omega)$ alors il existe par surjectivité $x \in \Omega$ tel que $\pi(x) = p$ et puisque Ω est ouvert un $R > 0$ tel que $B(x,R) \subset \Omega$. Par la question 5)d), puisque $\pi(B(x,R) \subset \pi(\Omega)$ alors $\Lambda(p,R) = \Lambda(\pi(x),R) \subset \pi(\Omega)$. Donc $\pi(\Omega)$ est ouvert.

(6) On suppose que $(E, ||.||)$ est un espace de Banach (*H est toujours supposé fermé*). Montrons que $(E/H, N)$ est un espace de Banach. On utilise le critère suivant: $(E/H, N)$ *est un espace de Banach ssi toute série normalement convergente est convergente.*

Soit $\sum p_n$ une série normalement convergente dans $(E/H, N)$ i.e. $\sum_n N(p_n) < \infty$. Montrons que $\sum_n p_n$ converge dans $(E/H, N)$.
Il existe une suite $x_n \in E$ telle que $\pi(x_n) = p_n$. Il existe une suite $h_n \in H$ telle que

$$N(p_n) \leq ||x_n - h_n|| \leq N(p_n) + 2^{-n}.$$

On pose $y_n = x_n - h_n$ alors $N(p_n) \leq ||y_n|| \leq N(p_n) + 2^{-n}$ et $p_n = \pi(x_n) = \pi(y_n)$. On a

$$\sum_n ||y_n|| \leq \sum_n N(p_n) + 2^{-n} < \infty$$

qui converge. Ainsi $\sum_n y_n$ est une série qui converge normalement dans le Banach $(E, ||.||)$ donc elle converge. On note $y = \sum_n y_n$. Puisque π est continue linéaire $\pi(y) = \pi(\lim_k \sum_{n=1}^k y_n) = \lim_k \sum_{n=1}^k \pi(y_n) = \lim_k \sum_{n=1}^k p_n$. Ainsi $\sum_n p_n$ converge dans $(E/H, N)$.

(7) Réciproquement, supposons que H est un espace de Banach pour la norme induite $||.||$ de E sur H et que $(E/H, N)$ est un espace de Banach, montrons qu'alors $(E, ||.||)$ est un espace de Banach. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E alors $(\pi(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans $(E/H, N)$ car $N(\pi(x_n) - \pi(x_m)) \leq ||x_n - x_m||$. Puisque $(E/H, N)$ est un espace de Banach, $\pi(x_n)$ converge vers

un $p \in E/H$. Soit $x \in E$ tel que $p = \pi(x)$ alors $\lim_n N(\pi(x_n) - \pi(x)) = 0$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $N(\pi(x_n - x)) \leq \varepsilon$ i.e. $\inf_{h \in H} ||x_n - x - h|| \leq \varepsilon$. Donc il existe $h_n \in H$ tq $||x_n - x - h_n|| \leq 2\varepsilon$. Montrons que (h_n) est de Cauchy dans H, on a:

$$||h_n - h_m|| \leq ||x_n - x - h_n|| + ||x_m - x - h_m|| + ||x_n - x_m|| \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

pour n, m assez grand. Puisque H est complet (h_n) converge vers un $h \in H$.

On a

$$||x_n - x - h|| \leq ||x_n - x - h_n|| + ||h - h_n|| \leq 2\varepsilon + \varepsilon$$

pour n assez grand. La suite x_n converge donc vers $x + h$. E est un Banach.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une forme linéaire L, continue sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, telle que pour tout $x = (x_n)$ de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, on ait

$$\liminf_n (x_n) \leq L(x) \leq \limsup_n (x_n) \quad (C).$$

puis d'en déduire une conséquence en terme de dualité. *Rappel:* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est l'espace des suites réelles bornées sur $\mathbb{N}$.

(1) Supposons qu'un tel L vérifie la condition (C) ci-dessus. Que vaut $L(x)$ pour x appartenant au sous-espace des suites convergentes de $\ell^\infty(\mathbb{N})$? Soit (x_n) une suite convergente alors $\lim_n x_n = \liminf_n (x_n) = \limsup_n (x_n)$ donc $L(x) = \lim_n (x_n)$.

(2) On pose pour $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $p(x) = \limsup_n (x_n)$. Montrons que p est une *jauge*. *Rappel: (x_n) un suite de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ alors la suite est majorée et minorée donc la limsup existe (la liminf aussi pour la même raison). En effet, il existe $M > 0$ fini tq pour tout $k \in \mathbb{N}$, $-M \leq x_k \leq M$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$-M \leq \sup_{k \geq n} x_k \leq M.$$

La suite $b_n = \sup_{k \geq n} x_k$ est décroissante et minorée donc convergente. Par définition, $\limsup_n (x_n) = \lim_n \left(\sup_{k \geq n} x_k\right)$.

Soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ deux suites de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. On a pour tout $k \geq n$,

$$(x_k + y_k) \leq \sup_{p \geq n} x_p + \sup_{m \geq n} y_m.$$

d'où

$$\sup_{k \geq n} (x_k + y_k) \leq \sup_{p \geq n} x_p + \sup_{m \geq n} y_m.$$

Par passage à la limite sur n, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. Soit $\lambda > 0$ alors $\sup_{k \geq n} (\lambda x_k) = \lambda \sup_{k \geq n} (x_k)$. Par passage à la limite sur n, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

(3) On cherche l'existence d'une forme linéaire L, continue sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$,vérifiant la condition (C). On a noté par (1), que sur le sous-espace vectoriel des suites convergentes noté G, on peut définir $g(x) = \lim_n x_n, x \in G$. Il est facile de voir que g est linéaire sur G. D'autre part $g(x) \leq p(x), x \in G$ (égalité en fait). Par

le théorème de Hahn-Banach analytique, il existe sur $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$, une forme linéaire L telle que sa restriction à G donne g et satisfaisant $L(x) \leq p(x), \forall x \in E$ i.e.

$$L(x) \leq \limsup_n (x_n).$$

On note que $p(-x) = -\liminf_n (x_n)$, ainsi pour tout $x \in E$,

$$-L(x) = L(-x) \leq -\liminf_n (x_n).$$

Ceci implique (C).

(4) *On note $(\ell^\infty)'(\mathbb{N}) = \mathcal{L}(\ell^\infty(\mathbb{N}), \mathbb{R})$ l'espace des formes (réelles) linéaires continues sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$.*

(a) Soit $y \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose $f_y(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$ pour $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Montrons que $f \in (\ell^\infty)'(\mathbb{N})$. On vérifie que $f_y(x)$ est bien défini. On a

$$\sum_{n=0}^\infty |x_n y_n| \leq ||x||_\infty ||y||_1.$$

où $||x||_\infty = \sup_n |x_n|$ et $||x||_1 = \sum_{n=0}^\infty |y_n|$. La série est absolument convergente donc convergente: $f_y(x)$ est bien défini. Il est facile de vérifier la linéarité (Règles sur les séries convergentes). La continuité résulte de $|f_y(x)| \leq \sum_{n=0}^\infty |x_n y_n| \leq ||x||_\infty ||y||_1$. D'où $f_y \in (\ell^\infty)'(\mathbb{N})$ et $||f_y|| \leq ||y||_1$. On montre en fait que

$$||f_y|| = ||y||_1,$$

en remarquant que pour $x_n = sgn(y_n) = 1$ si $y_n > 0$ et $x_n = sgn(y_n) = -1$ si $y_n > 0$ (0 sinon) alors $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $||x||_\infty = 1$ (si y non nul), $f_y(x) = \sum_{n=0}^\infty |y_n| = ||y||_1$.

(b) Montrer qu'il existe $g \in (\ell^\infty)'(\mathbb{N})$ tel que $g \neq f_y(x)$ pour tout $y \in \ell^1(\mathbb{N})$. Réponse: L convient. En effet, supposons qu'il existe $y \in \ell^1(\mathbb{N})$ tel que $f_y = L$. En particulier, pour tout suite convergente $x = (x_n)$,

$$f_y(x) = \sum_n x_n y_n = L(x) = \lim_n x_n.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$, on pose $x = (x_n)$ avec $x_n = 0$ si $n \neq k$ et $x_k = 1$ (On pourra noter e_k cet x). On a $y_k = f_y(x) = L(x) = \lim_n x_n = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $y = 0$ et $L = f_y = 0$. Contradiction car L n'est pas nulle sur G (ex. $x = (1)_n$ suite constante égale à 1 alors $L(x) = 1$).

(c) Conclure en terme de dualité. On a montré que $\ell^1(\mathbb{N})$ est inclus (isomorphisme isométrique) dans $(\ell^\infty)'(\mathbb{N})$ (à l'aide de $y \to f_y$) mais l'inclusion est stricte par (4)(b). Ainsi le dual $(\ell^\infty)'(\mathbb{N})$ ne s'identifie pas à $\ell^1(\mathbb{N})$. Ceci n'est pas contradictoire avec le cours qui dit en particulier que le dual de $\ell^p(\mathbb{N})$ est $\ell^q(\mathbb{N})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mais pour $p < \infty$! $\triangle$