Master 1. SC M1 MT05. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

Compléments de cours

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.

Partie 1

a) Le théorème de dualité L^p a été prouvé pour $L \in (L^p(\mu))'$ avec μ une probabilité et $||L|| = 1$. Pour le cas général pour les formes linéaires: soit $L' \in (L^p(\mu))'$, on pose $L = L'/||L'||$ alors il existe $g \in L^q$ tel que $||g||_q = 1$ et $L(f) = \int_X fg\, d\mu$ ainsi $L'(f) = \int_X f||L'||g\, d\mu$ alors $g' = ||L'||g$ vérifie $||g'||_q = ||L'||$ et $L'(f) = \int_X fg'\, d\mu$ (Représentation intégrale).

b) Pour μ une mesure finie, on pose $\mu_0 = \mu/\mu(X)$ qui une probabilité. On considère l'isomorhisme isométrique surjectif $\psi : L^p(\mu_0) \to L^p(\mu)$ défini par $h \to h\mu(X)^{-1/p}$. Pour $L \in (L^p(\mu))'$ alors $Lo\psi \in (L^p(\mu_0))'$. On a une représentation intégrale de $Lo\psi$, $Lo\psi(h) = \int_X hg\, d\mu_0$. D'où

$$Lo\psi(h) = \int_X \psi(h) \left(\mu(X)^{-1/q}\right) g\, d\mu$$

qui donne le résultat.

c) Cas de la mesure μ σ-finie. On esquisse la preuve (Vous devez faire les détails).

Puisque que μ est σ-finie, soit B_n une suite croissante avec $X = \cup_n B_n$ et $\mu(B_n) < \infty$. Soit $\Phi \in (L^p(\mu))'$, on pose $\Phi_n(f) = \Phi(f\chi_{B_n})$ où χ est l'indicatrice de B_n et $f \in L^p(\mu_n)$ avec $\mu_n(A) = \mu(A \cap B_n)$ qui est une mesure finie alors $\Phi_n \in (L^p(\mu_n))'$ car $||\Phi_n|| \leq ||\Phi||$. Il existe $g_n \in L^p(\mu_n)$ tel que

$$||\Phi_n|| = ||g_n||_q$$

et $\Phi(f\chi_{B_n}) = \int_X f\chi_{B_n} g_n\, d\mu_n = \int_X fg_n\, d\mu$ (en prologeant g_n par 0 sur B_n^c). On a que la restriction de g_{n+1} à B_n est g_n μ-pp. On pose $g(x) = g_n(x)$ pour $x \in B_n$, g est bien définie et

$$\Phi(f) = \int_X fg\, \mu.$$

Pour voir ce dernier point, on a $g\chi_{B_n} = g_n$ ainsi

$$||g\chi_{B_n}||_q = ||g_n||_q = ||\Phi_n|| \leq ||\Phi||.$$

Par le lemme de Fatou,

$$||g||_q = ||\liminf g\chi_{B_n}||_q \leq ||\Phi|| < \infty.$$

Pour conclure: puisque $f\chi_{B_n} \to f$ dans $L^p(\mu)$ (Par convergence dominée), pour tout $f \in L^p(\mu)$. On a par la continuité de Φ ,

$$\Phi(f) = \lim_n \Phi_n(f) = \lim \int_X f\chi_{B_n} g_n\, d\mu_n = \int_{B_n} fg\, d\mu = \int_X fg\, d\mu.$$

Puis on déduit que $||\Phi|| = ||g||_q$. Ce qui termine la preuve.

Partie 2 Théorème: Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini alors $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est réfléxif pour $1 < p < \infty$.

Démonstration: Il s'âgit de montre que $J : L^p \to (L^p)''$ est surjective i.e. pour tout $\Lambda \in (L^p)''$ il existe $f \in L^p$ tel que $J_f = \Lambda$ (Voir (3) plus bas).

On fait les rappels suivants (1)-(2)-(3):

(1) On a montré que $(L^p)'$ s'identifie à L^q avec $1/p + 1/q = 1$ i.e. il existe

$$\begin{aligned} \psi_1 : L^q &\to (L^p)' \\ g &\to \psi_1(f) \end{aligned}$$

linéaire bijective et isométrique, avec pour tout $\varphi \in (L^p)'$, il existe un unique $g \in L^q$ tq $\varphi = \psi_1(g)$ et pour tout $f \in L^p$,

$$\varphi(f) = [\psi_1(g)](f) = \int_X fg\, d\mu.$$

(2) De même, $(L^q)'$ s'identifie à L^p (car $1/q + 1/p = 1$! avec $1 < q < \infty$) i.e. il existe

$$\begin{aligned} \psi_2 : L^p &\to (L^q)' \\ f &\to \psi_2(f) = \Psi \end{aligned}$$

avec pour tout $g \in L^q$,

$$\Psi(g) = [\psi_2(f)](g) = \int_X gf\, d\mu = \int_X fg\, d\mu.$$

(3) On rappelle que l'application évaluation $J : L^p \to (L^p)''$, $f \to J(f)$ où J_f est définie par $J_f : (L^p)' \to \mathbb{R}$ (linéaire continu) tel que $J_f(\varphi) = \varphi(f)$ pour $\varphi \in (L^p)'$.

(4) Montrons que pour tout $\Lambda \in (L^p)''$, il existe $f \in L^p$ tel que $\Lambda = J_f$.

(a) Construction de $f \in L^p$:

On a $\Psi = \Lambda o \psi_1 \in (L^q)'$. Par (2), il existe $f \in L^p$ tel que $\Lambda o \psi_1 = \psi_2(f)$ et vérifiant

$$\Psi(g) = \Lambda o \psi_1(g) = [\psi_2(f)](g) = \int_X fg\, d\mu \quad (0).$$

Maintenant par (1), pour tout $\varphi \in (L^p)'$, il existe un unique $g \in L^q$ tq $\varphi = \psi_1(g)$. Ainsi par (0), $\Lambda(\varphi) = \Lambda o \psi_1(g) = \int_X fg\, d\mu (*)$.

(b) Par ailleurs, calculons, $J_f(\varphi)$ pour φ décrit ci-dessus.

$$J_f(\varphi) = \varphi(f) = [\psi_1(g)](f) = \int_X gf\, d\mu = \int_X fg\, d\mu \quad (**)$$

(C) Conclusion: par (*) et (**), pour tout $\varphi \in (L^p)'$,

$$J_f(\varphi) = \Lambda(\varphi)$$

donc $J_f = \Lambda$ i.e J est surjective. D'où L^p est réflexif.