Master 1. SC M1 MA04. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

Examen (Le 9 janvier 2009: 3h)

(Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits)

La rédaction et les justifications seront prises en compte lors de la correction.

Question de cours: Enoncer le théorème de Hahn-Banach géométrique ainsi que le théorème de l'application ouverte.

Exercice 1. *Soit H un espace de Hilbert réel. On note $< x, y >$ le produit scalaire et $||x||$ la norme associée.*

(1) Soit $x \in H$. On pose $R(y) =< x, y >$ pour tout $y \in H$. Montrer rapidement que R est linéaire et continu. Puis calculer $||R||$ la norme de R.

(2) Soit $(x^n)_n$ une suite dans H. On pose $T_n(y) =< x^n, y >$ pour tout $y \in H$. *On suppose que la limite de la suite $T_n(y)$ existe lorsque n tend vers l'infini, pour tout $y \in H$.*

(a) Montrer que $\sup_n |T_n(y)|$ est fini pour tout $y \in H$.

(b) En déduire que $\sup_n ||T_n||$ est fini (Justifiez votre réponse).

On note $T(y) = \lim_n T_n(y)$.

(c) Montrer que l'application T est linéaire et continue et qu'elle vérifie
$$||T|| \le \liminf_n ||T_n||.$$

(3) (a) Montrer qu'il existe $x \in H$ tel que $T(y) =< x, y >$ pour tout $y \in H$.

On dit qu'une suite $(x^n)_n$ de H converge **faiblement** *vers z si*
$$\lim_n < x^n, y >=< z, y >, \quad \forall y \in H.$$

(b) Déduire de ce qui précède que $(x^n)_n$ de H converge **faiblement** vers x du 3)a) et que
$$||x|| \le \liminf_n ||x^n||.$$

(4) *On pose $H = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ l'espace de Hilbert réel dont chaque élément y est une suite de réels $(y_k)_k$ vérifiant*
$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty.$$

Le produit scalaire sur H est défini par $< y, z >= \sum_{k=1}^{\infty} y_k z_k$ pour $y, z \in H$.
On note $e_n = (0, 0, ..., 1, 0, 0, ...)$ la suite dont toutes les composantes sont nulles sauf la n-ième qui vaut 1.

Montrer que e_n converge **faiblement** vers $0 = (0, 0, ...)$ mais qu'elle ne converge pas dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ pour la norme $\ell^2(\mathbb{N}^*)$.

(5) Enoncé une proposition résumant ce qui a été démontré dans cette exercice.

Exercice 2. *Soit H un espace de Hilbert. On note $< f, g >$ le produit scalaire de $f, g \in H$.*

(1) On se donne une application **linéaire** $A : H \to H$. *On suppose qu'il existe une application* **linéaire** $B : H \to H$ *telle que*

$$\forall f, g \in H, \qquad < Af, g >=< f, Bg > .$$

Monbrer que A est continue ainsi que B.

(2) *Soit $H = L^2([-\pi, \pi])$ l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs réelles et de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$. On note $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$ où dt est la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$.*

On se donne h une fonction mesurable définie sur $[-\pi, \pi]$ à valeurs réelles. On suppose que pour tout $f \in L^2$ alors $hf \in L^2$ et on pose $M(f) = hf$.

Montrer que M est linéaire et continu.

(3) *On note $C > 0$ une constante finie vérifiant*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)f(t)|^2\, dt \leq C^2 \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt \qquad (*).$$

On note $\mu(A)$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble $A \subset [-\pi, \pi]$ et χ_A l'indicatrice de l'ensemble A.

(a) En prenant $f = \chi_{\{|h|>C+\varepsilon\}}$ dans $(*)$. Montrer que $|h(t)| \leq C + \varepsilon$ pour presque tout $t \in [-\pi, \pi]$ (i.e. $\mu(\{|h| > C + \varepsilon\}) = 0$.)

(b) En déduire que $\mu(\{|h| > C\}) = 0$ et que $h(t) \leq C$ presque pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

(c) Montrer que $||M|| = ||h||_{L^\infty}$.

(4) *On suppose de plus que M est une bijection de L^2 dans lui-même.*

(a) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que, pour tout $g \in L^2$,

$$||M^{-1}(g)||_2 \leq K||g||_2.$$

(b) Soit $\mu(V) > 0$. Calculer $||\chi_V||_2$.

(c) Montrer que si h est nulle sur $V \subset [-\pi, \pi]$ avec $\mu(V) > 0$ alors $M(\chi_V)(t) = 0, \forall t \in [-\pi, \pi]$. En déduire que $\mu(\{h = 0\}) = 0$.

(d) Déterminer M^{-1}.

(e) En conclure pour presque tout $t \in [-\pi, \pi]$, l'inégalité

$$\frac{1}{K} \leq h(t) \leq C.$$

Exercice 3. (1) Enoncer le théorème de Baire pour les ouverts puis pour les fermés.

(2) *On considère $\mathcal{P} = \cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré quelconque ($\mathcal{P}_k$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus k). Pour $f \in \mathcal{P}_k$ de la forme $f(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j t^j, t \in \mathbb{R}, a_j \in \mathbb{R}$, on pose $||f||_2 = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} |a_j|^2 \right)^{1/2}$. On considère $||.||$ une norme sur $\mathcal{P}$.*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il existe deux constantes $0 < m_k \leq M_k < \infty$ telles que, pour tout $f \in \mathcal{P}_k$,

$$m_k \, ||f||_2 \leq ||f|| \leq M_k \, ||f||_2.$$

(b) On fixe $f_0 \in \mathcal{P}_k$. Montrer qu'il n'existe pas de $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(f_0, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{P};\ ||f_0 - g|| < \varepsilon\} \subset \mathcal{P}_k.$$

(On raisonnera par l'absurde et on considèrera une fonction g bien choisie de degré exactement $(k + 1)$).

(c) En déduire que $\mathcal{P}_k$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{P}$ pour la norme $||.||$.

(d) Peut-on munir $\mathcal{P}$ d'une structure d'espace de Banach ? (Justifier votre réponse).

(e) Peut-on répondre à la question b) sans utiliser a)?

Exercice 4. *Soit E un espace de Banach réel et B un sous-ensemble de E. On suppose que pour tout $f \in E'$, l'ensemble $\{f(x), x \in B\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. (E' est le dual de E).*

En utilisant le théorème de Banach-Steinhauss, montrer que B est borné dans E.