Master 1. SC M1 MT05. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

Partiel

(Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits)

Pour tout $n \geq 1$, *on pose* $e^n = (e^n_k)_{k\geq 1}$ *où* $e^n_k = 1$ *si* $k = n$ *et* 0 *sinon. Soit* $1 \leq p < \infty$. *On note* $\ell^p(\mathbb{N}^*)$ *l'ensemble des suites réelles* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *telles que* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. *On le munit de la norme* $||x||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ *qui fait de lui un espace de Banach.*

Exercice 1. (1) *Soit* $x = (x_n)_n$ *un élément de* ℓ^p *pour* $1 \leq p < \infty$. *On pose* $x^k = (x^k_n)$ *avec* $x^k_n = x_n$ *si* $n \leq k$ *et* $x^k_n = 0$ *si* $n > k$.

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $(x^k)_{k\geq 1}$ appartient à ℓ^p et $\lim_{k\to+\infty} ||x - x^k||_p = 0$ (i.e. x^k converge vers x dans ℓ^p).

(2) En déduire que $Vect\{e^n, n \in \mathbb{N}^*\}$(l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies de vecteurs de $\{e^n, n \geq 1\}$, $n \geq 1$, est dense dans ℓ^p pour tout $1 \leq p < \infty$.

(3) *On considère* f *une forme linéaire continue sur* ℓ^p *telle que* $f(e^n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

A l'aide du 1), montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, f(e^n)$ puis que f est nulle sur ℓ^p.

Qu'en déduisez-vous pour $Vect\{e^n, n \in \mathbb{N}^*\}$? (Justifiez votre réponse).

(4) Montrer que le résultat (1) est faux pour ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$.

Exercice 2. *On note* $c_0 = c_0(\mathbb{N}^*)$ *l'espace de Banach des suites qui tendent vers* 0 *(i.e. l'espace des suites* $x = (x_n)_{n\geq}$ *vérifiant* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ *et muni de la norme* $||x||_\infty = \sup_n |x_n|$*).*

(1) *Soit* $y = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$. *On pose* $L_y : c_0 \to \mathbb{R}$ *défini par* $L_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$.

Montrer que L_y est une forme linéaire continue sur c_0 et $||L_y|| \leq ||y||_1$.

(2) *Soit* L *une forme linéaire continue non-nulle sur* c_0. *On note* $y_n = L(e^n)$ *pour tout* $n \geq 1$ *et* $\varepsilon_n = 1$ *si* $y_n \geq 0$ *et* $\varepsilon_n = -1$ *si* $y_n < 0$.

(a) Montrer que pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} |y_n| = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n y_n \leq ||L||.$$

En déduire que $y = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$.

(b) *Soit $x \in c_0$. On pose pour tout $k \geq 1$, $x^k = (x_n^k)_{n\geq 1}$ avec $x_n^k = x_n$ pour $1 \leq n \leq k$ et $x_n^k = 0$ si $n > k$.*

Montrer que $x^k \in c_0$ pour tout $k \geq 1$, puis $\lim_{k\to\infty} ||x - x^k||_\infty = 0$, et $L(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$.

(c) Déduire de ce qui précède que $||L|| = ||y||_1$.

(3) Montrer que l'application $\Phi : \ell^1(\mathbb{N}^*) \to (c_0)'$ défini par $\Phi(y) = L_y$, $y \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$ est un isomorphisme isométrique surjectif. Puis conclure.

(4) (a) *Soit $1 < p < \infty$. On se donne $y = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell^q(\mathbb{N}^*)$ avec $1 < q < \infty$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^p$, on pose $L_y(x) = \sum_{n=1}^\infty y_n x_n$.*

Montrer que $L_y \in (\ell^p)'$ et $||L_y|| \leq ||y||_q$.

(b) *Maintenant, soit $L \in (\ell^p)'$. On pose $y_n = L(e^n)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \geq 1$, $x^k = (x_n^k)_{n\geq 1}$ avec*

$$x_n^k = |y_n|^{q-1}\varepsilon_n \quad \text{pour} \quad 1 \leq n \leq k$$

et $x_n^k = 0$ pour $n > k$. (On a posé $\varepsilon_n = 1$ si $y_n \geq 0$ et $\varepsilon_n = -1$ si $y_n < 0$).

(i) Calculer $||x^k||_p$.

(ii) En utilisant la continuité $|L(v)| \leq ||L||\ ||v||_p$ pour tout $v \in \ell^p$, en déduire pour tout $k \geq 1$,

$$\left(\sum_{n=1}^k |y_n|^q\right)^{1/q} \leq ||L||,$$

puis que $y \in \ell^q$.

(iii) En utilisant, le (1) de l'exercice 1. Montrer que $L(x) = \sum_{n=1}^\infty y_n x_n$.

(iv) En déduire $||L|| = ||y||_q$. Que peut-on dire sur L?

(5) Que peut-on dire sur le dual de ℓ^p ?

Exercice 3. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on pose

$$p(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}^*, r_1,\ldots,r_k\in\mathbb{N}} \left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k x_{n+r_j}\right).$$

a) Montrer que p est une fonction sous-linéaire sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$. *(Majorer $p(x+y)$ par*

$$\limsup_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{mm'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m'} x_{n+p_j+q_k}+y_{n+p_j+q_k}\Big)$$

avec $m, m' \in \mathbb{N}^*, p_1, ..., p_m, q_1, ..., q_{m'} \in \mathbb{N}$).

b) En déduire l'existence d'une forme linéaire L sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, vérifiant les propriétés suivantes:

(i) Si $x = (x_n)$ converge alors $L(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

(ii) Si pour tout $n, x_n \geq 0$, alors $L(x) \geq 0$.

(iii) Si $x = (x_n)$ et $x' = (x_{n+1})$, alors $L(x) = L(x')$.

(Pour ce dernier point, on pourra montrer que pour tout entier k, $p(x-x') \leq \frac{2\|x\|_\infty}{k}$).

On appelle L une limite de **Banach**. △

Exercice 4. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A une application linéaire continue de E vers F. On dit que A est un *opérateur compact* si l'image par A de la boule unité fermé de E noté B_1' a une adhérence compact i.e.

$$\overline{A(B_1')} \quad \text{est} \quad \text{compact} \quad \text{dans} \quad F.$$

(1) Soient E, F deux espaces vectoriels normés avec F de dimension *finie.* Montrer que tout opérateur linéaire continu est compact.

(2) On pose $E = F = \ell^p = \ell^p(\mathbb{N}^*)$. Pour $x = (x_n) \in \ell^p(\mathbb{N}^*)$ (suite à valeurs réelles), on note

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

On note $e^k = (e^k_n)$ la suite telle que $e^k_n = 1$ si $k = n$ et 0 sinon.

(a) Montrer rapidement que ℓ^p est de dimension infinie.

(b) Montrer que la boule unité fermé de ℓ^p n'est pas compacte dans ℓ^p .

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'opérateur $P_k(x) = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, 0, ...)$ pour $x \in \ell^p$ est compact.

(d) Soit A un opérateur linéaire continu non nul de ℓ^p dans lui-même. On note $f^n = A(e^n) \in \ell^p$.

(3) Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{n_1} \neq 0$.

(4) On suppose que $vect\{e^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ l'espace vectoriel engendré par les e^n est de dimnsion infini.

Montrer qu'il existe une suite extraite $(f^{n_k})_k$ de (f^n) telle que

$$d(f^{n_i}, f^{n_j}) = ||f^{n_i} - f^{n_j}||_p \geq 1, \quad i \neq j$$

.

(5) On suppose que A est un opérateur *compact.* Montrer que l'image de A est de dimension finie.