Master 1. SC M1 MT05. Université d'Orléans
Analyse fonctionnelle de base 2008-9

Problème 1 (à rendre le 10 octobre

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et H un sous-espace vectoriel de E.

(1) On définie une relation sur E par $x\mathcal{R}y$ $(x, y \in E)$ si et seulement si $x - y \in H$. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence sur E.

On notera $p = \pi(x) = x + H = \{x + h, h \in H\}$ (suivant le contexte) la classe d'équivalence de $x \in E$ et on note E/H l'ensemble des classes d'équivalence.

(2) Montrer que si $\pi(x) = \pi(y)$ si et seulement si $x - y \in H$ (on dit que x et y sont des représentants de la même classe d'équivalence).

(3) Montrer que la somme $(x + H) \oplus (y + H) = (x + y) + H$ et le produit extérieur $\lambda \odot (x + H) = \lambda x + H$ définissent une structure d'espace vectoriel sur E/H (appelée *structure vectorielle quotient*). Si besoin on notera e l'élément neutre de E/H.

(4) Montrer que si E/H est muni de la structure vectorielle quotient, l'application $\pi : E \longrightarrow E/H$ est linéaire surjective.

A partir de maintenant, on suppose de plus que $(E, ||.||)$ est un e.v.n. et que H est un s.e.v fermé de E.

(5) *On pose $N(p) = N(\pi(x)) = \inf_{h\in H} ||x - h||$ pour $p = \pi(x) \in E/H$.*

(a) Montrer que $N(p)$ est bien définie indépendamment du représentant $x \in E$ de $p \in E/H$ puis que N est une norme sur E/H.

(b) Montrer que π est linéaire continue et $||\pi|| \leq 1$.

(c) Montrer que si $H \neq E$ alors $||\pi|| = 1$.

On note $B(a, R)$ la boule de centre $a \in E$ et de rayon $R > 0$ dans E pour la norme $||.||$ et $\Lambda(\pi(a), R)$ la boule de centre $\pi(a) \in E/H$ et de rayon $R > 0$ dans E/H pour la norme N.

(d) Montrer que $\pi\left(B(a, R)\right) = \Lambda(\pi(a), R)$.

(e) En déduire que l'image d'un ouvert de E par π est un ouvert de E/H (*On dit que l'application est ouverte*).

(6) On suppose que $(E, ||.||)$ est un espace de Banach (H *est toujours supposé fermé*). Montrer que $(E/H, N)$ est un espace de Banach.
(*On pourra utiliser un critère approprié. On pourra aussi utiliser comme notation "$(p_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E/H".*)

(7) Réciproquement, supposons que H est un espace de Banach pour la norme induite $||.||$ de E sur H et que $(E/H, N)$ est un espace de Banach, montrer qu'alors $(E, ||.||)$ est un espace de Banach.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une forme linéaire L, continue sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, telle que pour tout $x = (x_n)$ de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, on ait

$$\liminf_n (x_n) \leq L(x) \leq \limsup_n (x_n) \quad (C).$$

puis d'en déduire un résultat sur la dualité. *Rappel:* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est l'espace des suites réelles bornées sur $\mathbb{N}$ muni de sa norme usuel $||.||_\infty$.

(1) Supposons qu'un tel L vérifie la condition (C) ci-dessus. Que vaut $L(x)$ pour x appartenant au sous-espace des suites convergentes de $\ell^\infty(\mathbb{N})$?

(2) On pose pour $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$,
$$p(x) = \limsup_n (x_n).$$
Montrer que p est une *jauge*.

(3) En déduire l'existence une forme linéaire L, continue sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, vérifiant la condition (C).

On note $(\ell^\infty)'(\mathbb{N}) = \mathcal{L}(\ell^\infty(\mathbb{N}), \mathbb{R})$ *l'espace des formes (réelles) linéaires continues sur* $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

(4) (a) Soit $y \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose $f_y(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$ pour $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Montrer que $f_y \in (\ell^\infty)'(\mathbb{N})$.

(b) Montrer qu'il existe $g \in (\ell^\infty)'(\mathbb{N})$ tel que $g \neq f_y(x)$ pour tout $y \in \ell^1(\mathbb{N})$.

(5) Conclure en terme de dualité.

Exercice 3. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on pose

$$p(x) = \inf\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{n+p_j} /\ m \in \mathbb{N}^*, p_1, ..., p_m \in \mathbb{N}\}.$$

a) Montrer que p est une fonction sous-linéaire sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
(Majorer $p(x+y)$ par

$$\limsup_{n\to+\infty}(\frac{1}{mm'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m'} x_{n+p_j+q_k} + y_{n+p_j+q_k})$$

avec $m, m', p_1, ..., p_m, q_1, ..., q_{m'}$ convenables).

b) En déduire l'existence d'une forme linéaire L sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, vérifiant les propriétés suivantes:

(i) Si $x = (x_n)$ converge alors $L(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

(ii) Si pour tout $n, x_n \geq 0$, alors $L(x) \geq 0$.

(iii) Si $x = (x_n)$ et $x' = (x_{n+1})$, alors $L(x) = L(x')$.
(Pour ce dernier point on pourra montrer que pour tout entier m, $p(x - x') \leq \frac{2\|x\|_\infty}{m}$).

On appelle L une limite de **Banach**.