C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–4, 2001 – PXMA????.TEX –
Analyse Mathématique/*Mathematical Analysis*

Équations de Hamilton-Jacobi et inégalités entropiques généralisées

Gentil Ivan, Malrieu Florent,

Laboratoire de statistique et probabilités, UMR CNRS C5583, Université Paul-Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France
Courriel : $\{\mathrm{gentil}, \mathrm{malrieu}\}$@math.ups-tlse.fr
http ://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/$\{\mathrm{Gentil}, \mathrm{Malrieu}\}$/
Téléphones : 33 (0)5 61 55 64 15 et 33 (0)5 61 55 76 50.

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous prouvons l'équivalence entre des inégalités de Sobolev logarithmiques généralisées et l'hypercontractivité de certaines équations de Hamilton-Jacobi et retrouvons sous cette hypothèse une inégalité de transport établie dans [5]. Ces résultats généralisent ceux de [3]. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Hamilton-Jacobi Equations and inequalities for generalised entropies

Abstract. *We prove the equivalence between a general logarithmic Sobolev inequality and the hypercontractivity of a Hamilton-Jacobi equation. We also recover that this property imply a transportation inequality established by [5]. These results provide a natural generalization of the work performed in [3].* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et définitions

Une étude du comportement en temps long de l'équation de Fokker-Planck :

$$\partial_t u = \nabla \cdot [u \nabla(\log u + V)],$$

où V est strictement uniformément convexe à l'infini et $\int \exp(-V) = 1$, peut reposer sur l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante : pour toute densité de probabilité f,

$$\int f \log f + \int f V \leqslant \mathcal{L} \int f |\nabla(\log f + V)|^2. \tag{1}$$

D'après [3], l'existence d'une telle inégalité est équivalente à une propriété d'hypercontractivité dans les espaces $L^p(e^{-V})$ pour le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t \geqslant 0}$ défini comme la solution fondamentale de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\partial_t \mathbf{Q}_t g(x) + \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{Q}_t g(x)|^2 = 0 \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ et presque tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

avec pour condition initiale g lipschitzienne bornée. Cette reformulation fournit en particulier le fait que l'inégalité de Sobolev logarithmique implique l'inégalité de transport suivante : pour toute densité de probabilité f par rapport à la mesure e^{-V},

$$W_2^2\big(fe^{-V}, e^{-V}\big) = \inf\left\{\int \frac{|x-y|^2}{2}\, d\pi(x,y)\right\} \leqslant 2\mathcal{L}\left(\int f\log f + \int fV\right),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de marges fe^{-V} et e^{-V}.

Notre but est ici de montrer que ces relations sont encore vraies dans un cadre très général. Introduisons tout d'abord quelques notations :

– la fonction U désigne une fonction sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant les hypothèses techniques suivantes :
  * U est $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}^+$, $U(0) = 0$, strictement convexe,
  * $\lim_{x\to\infty} U(x)/x = \infty$,
  * $\lambda \mapsto \lambda^n U(\lambda^{-n})$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}^+$, cette condition a été introduite par McCann dans sa thèse.

  Les exemples les plus importants sont les fonctions $x \mapsto x\log x$ ou $x \mapsto x^m$ pour $m > 1$.
– la fonction V peut se décomposer en la somme d'une fonction convexe et d'une fonction bornée,
– la fonction W est convexe et paire,
– la fonction C désigne la puissance p de la norme p (normalisée) de $\mathbb{R}^n$: $C(x) = |x|_p^p/p := \sum x_i^p/p$ pour $p > 1$. Sa transformée de Legendre est donnée par $C^*(x) = |x|_q^q/q$, avec $1/p + 1/q = 1$.

Pour fixer les idées, l'étude des inégalités que nous développons dans la suite sont liée à l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\partial_t\rho = \nabla \cdot [\rho\nabla C^*\{\nabla(U'(\rho) + V + W * \rho)\}].$$

DÉFINITION 1.1. – *Soit ρ une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Définissons l'énergie libre de ρ, encore appelée entropie par abus de langage,*

$$H(\rho) := \int U(\rho)(x)\, dx + \int \rho(x)V(x)\, dx + \frac{1}{2}\iint W(x-y)\rho(x)\rho(y)\, dx\, dy,$$

l'entropie relative de ρ_1 par rapport à ρ_2, $H(\rho_1|\rho_2) := H(\rho_1) - H(\rho_2)$, et la dissipation d'entropie

$$I(\rho) := \int [\nabla(U'(\rho) + V + W * \rho) \cdot \nabla C^*\{\nabla(U'(\rho) + V + W * \rho)\}]\rho\, dx.$$

D'après les hypothèses faites sur les fonctions U, V, W il existe une unique densité de probabilité ρ_∞ qui minimise la fonctionnelle H.

DÉFINITION 1.2. – *Nous dirons que le système satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique généralisée $(ISL)(\mathcal{L})$, si pour toute fonction ρ, densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue,*

$$H(\rho|\rho_\infty) \leqslant \mathcal{L}\, I(\rho). \qquad \text{(ISL)}(\mathcal{L})$$

Remarque 1. – *L'appellation « inégalité de Sobolev logarithmique » provient de l'exemple fondamental $U(s) = s\log s$ et $W = 0$ présenté en* (1).

2. Hypercontractivité des équations de Hamilton-Jacobi

Définissons le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t\geqslant 0}$ de Hopf-Lax associé à la fonction de coût C : pour toute fonction g lipschitzienne bornée, $\mathbf{Q}_0 g = g$ et pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{Q}_t g(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{ g(y) + t\, C\left(\frac{x-y}{t}\right)\right\}.$$

La fonction $\mathbf{Q}_t g$ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\partial_t u(t,x) + C^*(\nabla u(t,x)) = 0 \quad \text{pour tout } t>0 \text{ et presque tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

avec condition initiale $u(0,\cdot) = g(\cdot)$ (voir [2]).

DÉFINITION 2.1. – *Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bornée lipschitzienne. Définissons K, la transformée de Legendre de $H(\cdot|\rho_\infty)$,*

$$K(h) = \sup\left\{ \int \rho(x) h(x)\, dx - H(\rho|\rho_\infty)\ ;\ \rho \text{ densité de probabilité}\right\}.$$

Le résultat principal relie l'existence d'une inégalité de Sobolev logarithmique (généralisée) aux variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, pour toute fonction g, par

$$F_a(t) = \frac{K\left(\left(a+\frac{t}{\mathcal{L}p}\right)^{p/q}\mathbf{Q}_t g\right)}{\left(a+\frac{t}{\mathcal{L}p}\right)^{p/q}}.$$

THÉORÈME 2.2. – *Supposons que U, V, W vérifient les hypothèses données dans l'introduction.*
Si que le système satisfait à l'inégalité (ISL)($\mathcal{L}$), alors, pour toute fonction bornée lipschitzienne g, pour tout $a \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$, on a $F_a(t) \leqslant F_a(0)$.
Inversement, s'il existe $a > 0$ tel que $F_a(t) \leqslant F_a(0)$ soit satisfait pour toute fonction g bornée lipschitzienne et $t > 0$ alors le système satisfait à l'inégalité (ISL)($\mathcal{L}$).
Pour démontrer ce théorème nous utilisons les deux lemmes suivants.

LEMME 2.3. – *Soit h une fonction bornée lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ alors, il existe une constante C_h telle que*

$$K(h) = \int \rho\left(U'(\rho) + \frac{1}{2} W * \rho\right) - \int U(\rho) + H(\rho_\infty) + C_h,$$

où la densité de probabilité ρ est solution de $h = U'(\rho) + V + W * \rho + C_h$ sur son support.

LEMME 2.4. – *Soit h_t une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in I$ on a*

$$\frac{d}{dt} K(h_t) = \int \left(\frac{d}{dt} h_t\right) \rho_t,$$

où ρ_t satisfait, pour tout $t \in I$, $h_t = U'(\rho_t) + V + W * \rho_t + C_{h_t}$ sur le support de ρ_t.

Preuve du théorème 2.2

◀ Soit g une fonction bornée lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Notons

$$\gamma(t) = \frac{K(\beta(t)\mathbf{Q}_t g)}{\beta(t)},$$

où $\beta(t) = \left(a + \frac{t}{\mathcal{L}p}\right)^{p/q}$. Nous obtenons, en utilisant le lemme 2.4,

$$\beta^2(t)\gamma'(t) = \beta'(t) \int \beta(t)\mathbf{Q}_t g\rho_t - \frac{\beta(t)^{2-q}}{q} \int |\nabla(\beta(t)\mathbf{Q}_t g)|_q^q \rho_t - \beta'(t)K(\beta(t)\mathbf{Q}_t g).$$

La relation $\beta(t)^{2-q} = \mathcal{L}q\beta'(t)$, la définition de ρ_t et l'inégalité (ISL)($\mathcal{L}$) fournissent l'inégalité hypercontractive $F_a(t) \leqslant F_a(0)$.

Prouvons maintenant la réciproque. La relation $F_a(t) \leqslant F_a(0)$, quand $t \to 0$, implique $\gamma'(0) \geqslant 0$. Comme $\mathbf{Q}_0 g = g$ et $\rho_0 = \rho_\infty$, le système satisfait (ISL)($\mathcal{L}$). ►

3. Application aux inégalités de transport

DÉFINITION 3.1. – *Nous dirons que le système satisfait à une inégalité de transport* $(IT)(\mathfrak{T})$ *si pour toute densité de probabilité* ρ *sur* $\mathbb{R}^n$*,*

$$W_C(\rho, \rho_\infty) = \inf \left\{ \int C(x-y)\, d\pi(x,y) \right\} \leqslant \mathfrak{T} H(\rho, \rho_\infty), \qquad \text{(IT)}(\mathfrak{T})$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures π *sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *de marges* ρ *et* ρ_∞.

La proposition suivante donne une définition équivalente de l'inégalité de transport faisant intervenir le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t\geqslant 0}$ et permet de faire le lien entre les inégalités (ISL)($\mathcal{L}$) et (IT)($\mathfrak{T}$).

PROPOSITION 3.2. – *Le système satisfait à (IT)($\mathfrak{T}$) si et seulement si pour toute fonction bornée lipschitzienne* g*, on a*

$$K\left(\frac{1}{\mathfrak{T}}\left(\mathbf{Q}_1 g - \int g\rho_\infty\right)\right) \leqslant 0. \tag{2}$$

Preuve

◄ Pour démontrer cette proposition nous utilisons la définition de la fonction K et le théorème de Kantorovich-Rubinstein, voir [1] chapitre 8. ►

La correspondance entre (ISL)($\mathcal{L}$) et la propriété d'hypercontractivité de l'équation d'Hamilton-Jacobi permet de retrouver immédiatement un résultat établi dans [4].

Corollaire 3.3 (Cordero-Erausquin, Gangbo, Houdré) *Supposons que* U, V, W *vérifient les hypothèses données dans l'introduction.*

Si le système satisfait à une inégalité (ISL)($\mathcal{L}$), alors il satisfait aussi à une inégalité de transport de constante $(\mathcal{L}p)^{p/q}$.

Preuve

◄ L'inégalité $F_a(t) \leqslant F_a(0)$, appliquée à $a = 0$ et $t = 1$ donne l'inégalité (2). ►

Remarque 2. – *Les résultats présentés ici n'assurent en rien l'existence d'une de ces inégalités. Par exemple lorsque* $U(s) = s\log s$, $W = 0$ *et* $C(x) = |x|_p^p/p$ *avec* $1 < p < 2$*, l'inégalité (ISL)($\mathcal{L}$) est fausse quelle que soit la fonction* V *considérée !*

Remerciements. Nous tenons à remercier Cédric Villani pour les différentes discussions sur le sujet.

Références bibliographiques

[1] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer, *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthéses **10**, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[2] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, Paris, 1994.

[3] S. G. Bobkov, I. Gentil, M. Ledoux, *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **80** (2001), no. 7, 669–696.

[4] D. Cordero-Erausquin, W. Gangbo, C. Houdré, *Inequalities for generized entropy and optimal transportation*, 2002, prépublication.
[5] J. A. Carrillo, R. J. McCann, C. Villani, *Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates*, 2002, à paraître dans Rev. Mat. Iberoamericana.