THÈSE

présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
TOULOUSE III

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Probabilités

par

Florent MALRIEU

Inégalités de SOBOLEV logarithmiques pour des problèmes d'évolution non linéaires

---

Soutenue le 11 décembre devant le jury composé de
Madame et Messieurs les Professeurs :

Dominique BAKRY	Université Paul Sabatier	Directeur de thèse
Pierre DEL MORAL	Université Paul Sabatier	Examinateur
Michel LEDOUX	Université Paul Sabatier	Examinateur
Dominique LÉPINGLE	Université d'Orléans	Rapporteur
Sylvie MÉLÉARD	Université Paris X	Rapporteur
Denis TALAY	INRIA Sophia Antipolis	Examinateur
Cédric VILLANI	ENS Lyon	Examinateur

Laboratoire de Statistique et Probabilités
UMR CNRS 58830, Université Paul Sabatier, Toulouse III

À Lise
pour son soutien quotidien

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse Dominique BAKRY qui a encadré mon travail tout au long de ces trois années et des poussières. Sa bonne humeur et son enthousiasme m'ont bien soutenu dans les moments de disette mathématique. J'ai grandement apprécié nos discussions à bâtons rompus et l'intérêt qu'il a toujours porté aux idées que je lui présentais, les enrichissant de son intuition débordante.

Sylvie MÉLÉARD et Dominique LÉPINGLE m'ont fait le plaisir d'accepter d'être les rapporteurs de ma thèse. Leurs relectures attentives m'ont permis de rendre ce document plus clair et mieux écrit. Je les remercie aussi de l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail lorsque nous nous sommes croisés à l'occasion de colloques. Ces signes de reconnaissance sont très encourageants pour les chercheurs en herbe.

Denis TALAY m'a aidé à faire mes premiers pas vers les applications ce qui a rendu mon travail plus cohérent. Il m'a aussi donné l'occasion de rencontrer des chercheurs aux horizons différents du mien. Nos échanges m'ont apporté beaucoup de stimulation et j'espère que cette collaboration se poursuivra.

Je voudrais également témoigner toute ma gratitude à Cédric VILLANI. Grâce à Ivan GENTIL (merci à lui), nous nous sommes rendus compte que nous étudiions le même problème sous deux angles différents. Aux cours de nos échanges, j'ai notamment apprécié sa curiosité, son attention et son extrême vivacité d'esprit.

Michel LEDOUX et Pierre DEL MORAL ont joué un rôle très important dans mon initiation à la recherche. Après m'avoir fait découvrir les probabilités, Michel LEDOUX s'est toujours montré disponible et ses réponses m'ont bien aidé tout au long de mon travail. Pierre, quant à lui, par sa simplicité et sa convivialité, m'a appris le plaisir que procurent l'échange et les réflexions à plusieurs.

J'exprime aussi mes sincères remerciements à Bernard ROYNETTE qui, le premier, m'a donné la chance d'exposer en terrain inconnu et dont les remarques et suggestions se sont avérées très pertinentes.

À propos de travail en équipe, je remercie les Logsob : Cécile, Sébastien, Djèlil, Pierre, Ivan, Cyril et Grégory pour l'expérience plus qu'enrichissante qu'a constituée notre travail commun et pour la dynamique positive qu'il a entraîné sur mes travaux. Je tiens plus particulièrement à remercier Djèlil Chafaï sans la patience infinie duquel cette thèse ne serait qu'un manuscrit écrit par un gaucher à l'écriture hésitante.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'interprétation de la solution d'équations aux dérivées partielles compte parmi les champs d'application les plus motivants de la théorie des probabilités. Elle apporte parfois une meilleure compréhension de la dynamique du système étudié et une façon très intuitive de résoudre numériquement des problèmes où les méthodes déterministes ne peuvent plus s'appliquer – principalement en grandes dimensions. Dans ce travail, nous avons développé ces deux aspects pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires qui s'apparentent aux équations de McKean-Vlasov.

Dans cette introduction, nous nous proposons de passer en revue les techniques et les résultats contenus dans ce travail. Pour illustrer notre propos, considérons l'équation dite des milieux granulaires :

$$\text{(EML)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla u + u(\nabla V + \nabla W * u)),$$

où $*$ désigne la convolution en la variable d'espace, et V et W sont des fonctions convexes régulières (et paire pour W). Nous nous intéresserons à des équations plus générales que celle-ci mais elles auront toutes un point commun important : la non linéarité apparaîtra toujours à travers une convolution. Ceci assure des propriétés de régularité des solutions qui nous permettront de nous concentrer sur les études quantitatives plutôt que sur des résultats fins d'existence ou d'unicité de solutions.

L'approche probabiliste associe à cette équation un processus de Markov, que l'on qualifiera de non linéaire, dont la loi est solution de l'équation d'évolution (EML). Ce processus, qui sera toujours noté $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$, est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{X}_t & = & \overline{X}_0 + \sqrt{2} B_t - \displaystyle\int_0^t \nabla V(\overline{X}_s)\, ds - \int_0^t \nabla W * u_s(\overline{X}_s)\, ds \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t) & = & u_t(dx) \end{array} \right.$$

où $\mathcal{L}(\overline{X}_t)$ désigne la loi de $\overline{X}_t$. Grâce à cette formulation, on comprend un peu mieux la dynamique qui régit l'évolution : la variable aléatoire X_t s'interprète comme la vitesse d'un particule qui subit une agitation brownienne, une force de rappel vers le minimum de V et une autre force de rappel qui dépend de la loi à l'instant t.

Toutefois, ce processus non linéaire n'est pas plus facile à étudier que l'équation aux dérivées partielles. C'est là que l'idée initiée par KAC et MCKEAN entre en jeu : remplaçons le processus non linéaire par un processus linéaire constitué de N particules en interaction par l'intermédiaire de leur mesure empirique. On obtient alors le système de particules dit *de champs moyen* associé à (EML) :

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} &= \sqrt{2}dB_t^i - \nabla V(X_t^{i,N})\,dt - \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \nabla W(X_t^{i,N} - X_t^{j,N})\,dt \\ \mathcal{L}(X_0^{i,N}) &= X_0^i \quad \text{pour } i = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Les variables aléatoires $(X_0^i)_{1\leq i\leq N}$ sont identiquement distribuées de loi u_0, indépendantes et indépendantes des mouvements browniens $(B_\cdot^i)_{1\leq i\leq N}$. L'évolution d'une particule parmi N est très facile à comprendre : elle subit une agitation brownienne, une force de rappel induite par V et est attirée – car W est paire et convexe – vers les autres particules par l'intermédiaire de W. Ce système est à présent beaucoup plus facile à étudier que l'équation de départ, même si la dimension de l'espace sur lequel il est défini est grande.

Encore faut-il que cette simplification apporte une information sur le problème de départ. Pour cela il faut être capable de montrer qu'une particule dans un système de grande taille « ressemble »au processus non linéaire. Suivons une particule au sein d'un système de plus en plus grand. On peut montrer que sa loi tend vers celle d'une particule non linéaire. D'autre part, si l'on considère deux particules données, leur interaction mutuelle « se fond dans la masse »: elles deviennent indépendantes. Ce phénomène, appelé *propagation du chaos*, a lieu de manière très générique pour des équations que nous considérons mais aussi pour certaines équations de BOLTZMANN par exemple. En fait, l'interprétation probabiliste apporte encore plus : les convergences ci-dessus ont lieu pour les processus sur des intervalles de temps bornés et non pas uniquement pour les lois à un instant t. Notons toutefois que, pour la plupart des applications, seul compte vraiment le comportement de u_t pour un instant t donné. C'est pourquoi nous privilégierons les résultats fins de convergence au niveau des lois marginales des processus.

Concentration de la mesure empirique

Nos premiers résultats concernent la convergence de la mesure empirique du système de particules. Nous montrons, grâce au critère de courbure de BAKRY et EMERY – qui est un critère de type convexité –, que le semi-groupe $(\mathbf{P}_t^N)_{t\geq 0}$ du système de particules diffusives en interaction de type champ moyen vérifie une inégalité de SOBOLEV logarithmique dont la constante ne dépend pas du nombre de particules. Définissons ici l'entropie de la fonction f^2 par rapport à une mesure μ :

$$\mathrm{Ent}_\mu\big(f^2\big) := \int f^2 \log f^2\, d\mu - \int f^2\, d\mu \log \int f^2\, d\mu.$$

On a alors, pour toute fonction suffisamment régulière,

$$\mathrm{Ent}_{\mathbf{P}_t^N}\big(f^2\big) \leq C_t \mathbf{P}_t^N\big(|\nabla f|^2\big).$$

La constante C_t est de la forme

$$C_t = \frac{2}{\rho}\big(1 - e^{-2\rho t}\big)$$

pour un certain ρ réel appelé courbure du semi-groupe. On voit apparaître trois comportements possibles pour le semi-groupe selon le signe de ρ.

Pour l'équation des milieux granulaires (EML), cette courbure est strictement positive lorsque le potentiel V est strictement convexe. Il en découle que C_t est bornée uniformément en temps par $2/\rho$.

Lorsque où V est nul, on montre que le système de particules est de courbure minorée par 0. Dans ce cas, C_t est égale à $4t$.

Enfin, soient a (resp b) une fonction de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices définies positives (resp dans $\mathbb{R}^d$) et κ une fonction régulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si l'on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[a_{ij}(x, \kappa * u)u] - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(x, \kappa * u)u],$$

on est amené à considérer le système de particules

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = \sqrt{2}\sigma(X_s^{i,N}, \kappa * \Pi_s^N(X_s^{i,N}))\, dB_s^i + b(X_s^{i,N}, \kappa * \Pi_s^N(X_s^{i,N}))\, ds \\ X_0^{i,N} = X_0^i \quad \text{pour } i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

où $a = \sigma\sigma^*$ et Π_t^N est la mesure empirique du système au temps t :

$$\Pi_t^N := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_t^{k,N}}.$$

On montre que, sous des hypothèses de régularité et d'ellipticité, la courbure de ce système est minorée par un réel (négatif) qui ne dépend pas de N. Le semi-groupe vérifie donc une inégalité de Sobolev logarithmique mais avec une constante qui croît exponentiellement en temps. Les équations de McKean-Vlasov, qui n'entrent pas exactement dans le cadre de l'équation ci-dessus, peuvent néanmoins être traitées de manière similaire. Elles sont présentées en détail au chapitre 2.

L'inégalité de Sobolev logarithmique est ensuite utilisé pour obtenir des propriétés de concentration : d'après l'argument de Herbst, les queues d'une mesure qui vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $2c$ peuvent être comparées à celles d'une loi gaussienne de matrice de covariance cI. La loi du système satisfait donc à des inégalités de concentration gaussienne autour de sa moyenne. En particulier, pour toute fonction lipschitzienne f de norme de Lipschitz inférieure à 1 et tout $r \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{i,N}) - \mathbb{E}f(X_t^{i,N})\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{C_t}\right),$$

où C_t est la constante de l'inégalité de Sobolev logarithmique.

En couplant cette estimation à un résultat de propagation faible du chaos, *i.e.* au sens de la convergence des espérances de fonctions lipschitziennes, de la forme

$$\left|\mathbb{E}f(X_t^{i,N}) - \mathbb{E}f(\overline{X}_t)\right| \leq \frac{K_t}{\sqrt{N}},$$

on obtient alors des intervalles de confiance exacts pour la convergence de la mesure empirique du système de particules vers la solution du problème non linéaire.

Théorème. *Pour toute fonction lipschitzienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de norme de* Lipschitz *inférieure à 1, tout $t \geq 0$ et tout $r \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{i,N}) - \int f(x)u_t(dx)\right| \geq r + \frac{K_t}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{C_t}\right).$$

Signalons que dans le cas où le coefficient de diffusion σ ne comporte pas d'interaction, nous montrons que la constante K_t se comporte de la même manière que C_t en fonction du temps et de la courbure.

Comportement en temps long

La deuxième direction empruntée est la description du comportement en temps long de certaines équations de McKean-Vlasov, et principalement des équations des milieux granulaires. L'existence et l'unicité de la mesure stationnaire pour le processus non linéaire est obtenue par la minimisation d'une fonctionnelle convexe. Dans le cas de l'équation d'évolution (EML), la fonctionnelle qui caractérise l'équilibre est donnée par :

$$E(u) := \int u(x)\log u(x)\,dx + \int V(x)u(x)\,dx + \frac{1}{2}\iint W(x-y)u(x)u(y)\,dx\,dy.$$

Pour le cas linéaire, qui correspond à $W = 0$, E est l'entropie relative par rapport à la mesure invariante de densité $\exp(-V)$.

Se pose alors la question de la vitesse de convergence vers cet équilibre. On souhaite ici un résultat global et explicite ; c'est-à-dire que l'on doit établir d'une part que la convergence n'a pas seulement lieu au voisinage de l'équilibre et d'autre part que les constantes qui régissent la convergence sont explicites en les coefficients de l'équation. Pour obtenir de tels résultats, nous montrons d'une part que les résultats de propagation du chaos sont uniformes en temps et d'autre part que le système de particules converge exponentiellement vite vers sa propre mesure d'équilibre. Nous en déduisons une convergence à l'équilibre au sens de la variation totale et de la distance de Wasserstein :

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(\mu,\nu) := \sqrt{\inf\left\{\iint \frac{1}{2}|x-y|^2 d\pi(x,y)\right\}}$$

où l'infimum est pris sur les mesures de probabilité π sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de marges respectives μ et ν. Nous établissons alors le résultat suivant.

Théorème. *Si* Hess $V \geq \lambda I$, *alors la solution de l'équation (EML) vérifie*

$$W_2(u_t, \overline{u}) \leq K e^{-\lambda t},$$

où $\overline{u}$ est l'unique point où la fonctionnelle

$$E(u) = \int u(x) \log u(x)\, dx + \int V(x) u(x)\, dx + \frac{1}{2} \iint W(x-y) u(x) u(y)\, dx\, dy$$

atteint son minimum.

Nous présentons dans le chapitre 4 une approche plus « intrinsèque »de la convergence à l'équilibre pour l'équation non linéaire. Cette méthode, initiée par Otto pour l'équation des milieux poreux et adaptée par Carrillo, McCann et Villani pour les milieux granulaires, fournit la convergence à l'équilibre en termes de la fonctionnelle E. Dans cette partie nous étudions en particulier l'équation des milieux granulaires (EML) dans le cas où le potentiel V est nul. Nous verrons clairement sur cet exemple particulier, déjà étudié par Benachour, Roynette, Talay et Vallois, que le système de particules usuel associé possède un comportement en temps long moins bon que celui de la solution de (EML) ce qui limite fortement son intérêt. Nous montrons comment contourner cette difficulté dans l'annexe C.

Intervalles de confiance pour les schémas d'Euler

Comme nous l'avons vu, les résultats précédents fournissent des intervalles de confiance exacts, et non pas asymptotiques comme le feraient un théorème central limite ou un principe de grandes déviations. Pourtant, ils ne sont pas utilisables pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles dans la mesure où le système de particules ne peut être simulé de manière exacte. Nous avons alors cherché, en collaboration avec Talay, à établir des inégalités de Sobolev logarithmiques pour les schémas d'Euler implicite et explicite en reliant autant que possible leurs constantes avec celles de la diffusion associée.

Considérons le processus de diffusion $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sqrt{2}\sigma(X_s)\, dB_s.$$

Le schéma d'Euler de pas de discrétisation γ est défini par

$$X_{n+1}^\gamma = X_n^\gamma + b(X_n^\gamma)\gamma + \sqrt{2}\sigma(X_n^\gamma)\big(B_{\gamma(n+1)} - B_{\gamma n}\big).$$

Notons K l'opérateur associé :

$$Kf(x) = \mathbb{E}\Big[f(x + b(x)\gamma + \sqrt{2\gamma}\sigma(x)Y)\Big],$$

où Y suit une loi normale centrée réduite. On peut aussi définir le schéma d'Euler implicite en résolvant à chaque itération l'équation :

$$X_{n+1}^\gamma = X_n^\gamma + b(X_{n+1}^\gamma)\gamma + \sqrt{2}\sigma(X_n^\gamma)\big(B_{\gamma(n+1)} - B_{\gamma n}\big).$$

On notera $\overline{K}$ l'opérateur associé. Ce schéma est plus lourd à mettre en œuvre numériquement puisque, à chaque étape, il nécessite l'inversion d'une fonction. Il est pourtant nécessaire lorsque les coefficients de l'équation stochastique ne sont pas lipschitziens : en effet, le schéma d'EULER explicite peut alors diverger.

Dans le cas où le coefficient de diffusion est constant, nous établissons une inégalité de SOBOLEV logarithmique pour les opérateurs itérés K^n et $\overline{K}^n$.

Théorème. *Si σ est égal à l'identité, et et qu'il existe un réel λ tel que pour tout x et V dans $\mathbb{R}^d$*

$$-\langle Jac\, b(x)V, V\rangle \geq \lambda\langle V, V\rangle,$$

alors

$$Ent_{K^n}\big(f^2\big) \leq \frac{4}{\lambda(2-\lambda\gamma)}\big(1-(1-\lambda\gamma)^{2n}\big)K^n\big(|\nabla f|^2\big)$$

et

$$Ent_{\overline{K}^n}\big(f^2\big) \leq \frac{4(1+\lambda\gamma)}{\lambda(2+\lambda\gamma)}\left(1-\frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2n}}\right)\overline{K}^n\big(|\nabla f|^2\big).$$

Ce résultat est parfaitement satisfaisant puisque la condition imposée sur le coefficient b est exactement le critère de courbure pour la diffusion associée. De plus, les constantes obtenues sont très similaires : au temps γn, la diffusion vérifie une inégalité de SOBOLEV logarithmique de constante

$$C_t = \frac{2}{\lambda}\big(1-e^{-2\lambda\gamma n}\big).$$

Dans le cas où le coefficient de diffusion n'est pas constant, nous n'obtenons plus une inégalité de SOBOLEV logarithmique pour les schémas d'EULER. Il est toutefois possible d'établir une inégalité un peu plus faible : l'inégalité de POINCARÉ.

Théorème. *Si les coefficients σ et b sont de classe $\mathcal{C}_b^1$, il existe une constante C_γ,*

$$\mathbf{Var}_{K^n}(f) \leq c\gamma\frac{1-(C_\gamma)^n}{1-C_\gamma}K^n(|\nabla f|^2),$$

où $\mathbf{Var}_\mu(f)$ désigne la variance de f sous μ :

$$\mathbf{Var}_\mu(f) := \int f^2\, d\mu - \left(\int f\, d\mu\right)^2.$$

La constante C_γ est explicitement contrôlée en fonction des coefficients. En particulier, en dimension 1, C_γ peut être choisi de la forme $1-2\rho\gamma$ dès que, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$-\frac{1}{2}\sigma'(x)^2 - b'(x) - \frac{1}{2}b'(x)^2\gamma \geq \rho.$$

Enfin, dans le cas unidimensionnel, nous présentons des schémas qui vérifient une inégalité de SOBOLEV logarithmique avec une constante équivalente à celle de la diffusion quand le pas de discrétisation tend vers 0.

Ces inégalités fonctionnelles permettent d'obtenir des intervalles de confiance exacts pour la convergence des méthodes de MONTE-CARLO pour la simulation d'une diffusion. Elles permettent aussi de préciser les intervalles de confiance des méthodes numériques pour les équations de type McKEAN-VLASOV. En effet, pour estimer la quantité $\mathbb{E}f(X_t)$, on simule N schémas d'EULER indépendants et l'on décompose l'erreur comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{\gamma,i}) - \mathbb{E}f(X_t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{\gamma,i}) - \mathbb{E}f(X_t^{\gamma,1}) \\ &\quad + \mathbb{E}f(X_t^{\gamma,1}) - \mathbb{E}f(X_t).\end{aligned}$$

La deuxième différence du terme de droite est contrôlé par des résultats classiques de convergence faible du schéma d'EULER. Quand à la première, elle est en général contrôlée par un théorème central limite ou une inégalité de BERRY-ESSEEN. Elle est ici estimée par les intervalles de confiance exacts gaussiens (resp. exponentiels) pour le cas σ constant (resp. non constant). Nous obtenons ainsi des résultats du type

Théorème. *Pour toute fonction f de norme de* LIPSCHITZ *inférieure à 1, tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{\gamma,i}) - \mathbb{E}f(X_t)\right| \geq r + k_t\sqrt{\gamma}\right) \leq 2\exp\left(\frac{Nr^2}{C_t}\right)$$

*si le schéma d'*EULER *au temps t vérifie une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique de constante C_t.*

Pour toute fonction f de norme de LIPSCHITZ *inférieure à 1, tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{\gamma,i}) - \mathbb{E}f(X_t)\right| \geq r + k_t\sqrt{\gamma}\right) \leq 2\exp\left(\frac{r\sqrt{N}}{4C_t}\right)$$

*si le schéma d'*EULER *au temps t vérifie une inégalité de* POINCARÉ *de constante C_t.*

Ce travail fournit ainsi un procédé permettant de choisir les variables de l'algorithme de simulation (pas de discrétisation du schéma, nombres de particules, etc) pour obtenir une probabilité de succès choisie.

Organisation de l'ouvrage

Dans la première partie, nous introduisons les inégalités de SOBOLEV logarithmiques et leurs applications les plus importantes. En particulier, nous mettons en évidence le lien entre ces inégalités fonctionnelles et le comportement de la solution de certaines équations différentielles stochastiques.

Dans un deuxième temps, nous présentons les équations aux dérivées partielles auxquelles nous nous intéressons dans la suite. Nous en donnons brièvement une interprétation physique. Nous explicitons ensuite le schéma général qui consiste à associer, à l'équation aux dérivées partielles, un processus non linéaire puis un système de particules en interaction et rappelons les résultats classiques de propagation du chaos.

Le troisième chapitre est constitué d'un article publié dans la revue *Stochastic Processes and their Applications* en 2001. Nous y établissons les intervalles de confiance pour les systèmes de particules dans le cas général et le comportement en temps long pour la solution de l'équation (EML) dans le cas où V est une fonction strictement convexe.

Nous présentons ensuite des résultats établis par CARRILLO, MCCANN et VILLANI qui décrivent la convergence en temps long de la solution de l'équation (EML) dans un cadre très général. Nous y détaillons aussi l'exemple très intéressant où le potentiel V est nul et le potentiel d'interaction W est strictement convexe. Dans ce cas, le système de particules naturel se comporte alors moins bien, en temps grand, que le processus non linéaire qu'il approche. Nous suggérons ensuite un moyen de contourner cette difficulté qui sera détaillée dans l'annexe C.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des schémas d'EULER explicite et implicite. Il s'agit d'un travail effectué en collaboration avec Denis TALAY.

Les annexes A et B sont deux chapitres d'un ouvrage collectif réalisé par les doctorants toulousains et publié dans la collection *Panoramas et synthèses* en 2000. Ils complètent le premier chapitre en étudiant en détail le critère de courbure-dimension et un critère sur $\mathbb{R}$ pour qu'une mesure vérifie une inégalité de POINCARÉ ou de SOBOLEV logarithmique.

L'annexe C présente entièrement l'idée suggérée au chapitre 4. Nous retrouvons par une approche probabiliste les résultats de CARRILLO, MCCANN et VILLANI pour l'équation (EML) dans le cas où V est nul. Nous montrons également comment contrôler de manière efficace la convergence d'un schéma numérique vers la loi du processus non linéaire ou sa mesure invariante.

Enfin, l'annexe D est constitué d'une note parue aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* en 2000 qui est un résumé de la partie 3.

Bibliographie

[ABC+00] C. ANÉ, S. BLACHÈRE, D. CHAFAÏ, P. FOUGÈRES, I. GENTIL, F. MALRIEU, C. ROBERTO & G. SCHEFFER – *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[Mal00] F. MALRIEU – « Inégalités de Sobolev logarithmiques pour deux EDP non linéaires », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 10, p. 819–822.

[Mal01a] ______, « Convergence to equilibrium for a granular media equation and their euler scheme », Prépublication, 2001.

[Mal01b] ______, « Logarithmic Sobolev inequalities for nonlinear PDE's », *Stochastic Process. Appl.* **95** (2001), no. 1, p. 109–132.

[MT01] F. MALRIEU & D. TALAY – « Concentration inequalities for Euler schemes », Prépublication, 2001.

CHAPITRE 1

INÉGALITÉS DE POINCARÉ ET DE SOBOLEV LOGARITHMIQUE

Dans cette partie, nous nous attacherons à décrire de la manière la plus concise possible les résultats concernant les inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmiques. Nous présentons tout d'abord les modèles caractéristiques : les mesures gaussienne et double-exponentielle et le semi-groupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK permettent en effet de donner une bonne intuition pour comprendre les calculs généraux. Nous montrons ensuite comment, sous le critère de courbure dû à BAKRY et EMERY, il est possible d'établir des inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmiques pour des semi-groupes de MARKOV. Enfin nous rappelons les propriétés fondamentales qu'induisent ces inégalités fonctionnelles sur le comportement du semi-groupe : estimation de la convergence à l'équilibre, propriétés de tensorisation et de concentration de la mesure. L'annexe A complète les rappels sur le critère de courbure tandis que l'annexe B étudie ces inégalités fonctionnelles sur $\mathbb{R}$.

1.1. Premiers exemples

Nous commençons par introduire les définitions générales dans les cadres les plus simples et surtout les plus révélateurs. Tout d'abord, nous décrivons les inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmiques sur deux exemples qui devront être gardés en tête.

On introduit ensuite le semi-groupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK qui est à la fois facile à étudier et parfaitement fondamental dans la mesure où le raisonnement dans le cas général ne sera rien d'autre qu'une imitation de ce qui se passe pour ce semi-groupe.

1.1.1. Les mesures gaussiennes et exponentielles. — Présentons les deux mesures « étalon »dans notre cadre. La première est la mesure exponentielle, ou plutôt *double exponentielle*, sur $\mathbb{R}$, que nous noterons ν, dont la densité est donnée par

$$f_\nu(x) := \frac{1}{2}\exp(-|x|).$$

La mesure ν vérifie une inégalité de POINCARÉ de constante optimale 4. Plus précisément, pour toute fonction f régulière et suffisamment décroissante à l'infini, on a

$$\mathbf{Var}_\nu(f) \leq 4\mathbb{E}_\nu\left(|f'|^2\right),$$

où $\mathbf{Var}_\nu(f)$ désigne la variance de f sous ν :

$$\mathbf{Var}_\nu(f) := \int f^2\, d\nu - \left(\int f\, d\nu\right)^2.$$

Introduisons à présent la mesure gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$ sur $\mathbb{R}$ que nous noterons γ. Sa densité est

$$f_\gamma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

La mesure γ vérifie l'inégalité de POINCARÉ de constante optimale 1. De plus, elle vérifie une inégalité de SOBOLEV logarithmique de constante optimale 2. Cela signifie que, pour toute fonction f régulière et suffisamment décroissante à l'infini,

$$\mathrm{Ent}_\gamma\left(f^2\right) \leq 2\, \mathbb{E}_\gamma\left(|f'|^2\right),$$

où, $\mathrm{Ent}_\gamma(f^2)$ qui désigne l'entropie de f^2 par rapport à ν est définie par

$$\mathrm{Ent}_\gamma\left(f^2\right) := \int f^2 \log f^2\, d\gamma - \int f^2\, d\gamma \log \int f^2\, d\gamma.$$

Remarque 1.1.1. — *Il est clair que la mesure gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ vérifie une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique de constante $2\sigma^2$.*

L'annexe B fournit une caractérisation des mesures sur $\mathbb{R}$ vérifiant une inégalité de POINCARÉ ou une inégalité de SOBOLEV logarithmique.

1.1.2. Le semi-groupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK. — Rappelons la définition du semi-groupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK sur $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{P}_t f(x) = \mathbb{E} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}X\right), \tag{1.1}$$

où X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque 1.1.2. — *Le semi-groupe d'*ORNSTEIN-UHLENBECK *est associé au processus $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - X_t\, dt,$$

par la relation

$$\mathbf{P}_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_0 = x).$$

De plus, il admet pour générateur infinitésimal l'opérateur

$$\mathbf{L}f(x) = f''(x) - xf'(x),$$

c'est-à-dire que, pour tout $t \geq 0$,

$$\partial_t \mathbf{P}_t f = \mathbf{L}\mathbf{P}_t f = \mathbf{P}_t \mathbf{L} f.$$

D'après l'équation (1.1), la mesure $\mathbf{P}_t(\cdot)(x)$ est la mesure gaussienne

$$\mathcal{N}\big(e^{-t}x, 1-e^{-2t}\big).$$

Ainsi, pour tout t et toute fonction suffisamment régulière,

$$\mathbf{P}_t\big(f^2\log f^2\big) - \mathbf{P}_t\big(f^2\big)\log\mathbf{P}_t\big(f^2\big) \leq 2(1-e^{-2t})\mathbf{P}_t\Big(|f'|^2\Big).$$

On dira que le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante

$$C_t = 2(1-e^{-2t}).$$

Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck possède une propriété très importante, bien qu'évidente d'après la définition (1.1). En effet, il vérifie la relation de commutation suivante :

$$(\mathbf{P}_t f)'(x) = e^{-t}\mathbf{P}_t(f')(x).$$

Comme nous le verrons plus loin, le critère le plus efficace pour établir des inégalités de Poincaré ou de Sobolev logarithmiques consiste en une version infinitésimale de ce type de relation de commutation entre un semi-groupe et un opérateur de dérivation.

1.2. Définitions et propriétés élémentaires

Introduisons à présent le cadre général usuel des processus de Markov. Soit $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Markov sur $\mathbb{R}^d$ de générateur infinitésimal $\mathbf{L}$, c'est-à-dire que pour tout élément f d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions régulières et tout $t \geq 0$,

$$\partial_t \mathbf{P}_t f = \mathbf{L}\mathbf{P}_t f = \mathbf{P}_t\mathbf{L} f.$$

Dans toute la suite nous appliquerons le semi-groupe ou son générateur aux fonctions f éléments d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions régulières, stable par $\mathbf{P}_t$, $\mathbf{L}$ et composition par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Nous associerons aussi à $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ sa mesure invariante μ.

Définition 1.2.1. — *Une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ est dite* invariante *(ou* stationnaire*) pour le semi-groupe $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$ et toute fonction $f \in \mathcal{A}$,*

$$\mathbf{E}_\mu(\mathbf{P}_t f) = \mathbf{E}_\mu(f),$$

ou de manière équivalente, si pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$,

$$\mathbf{E}_\mu(\mathbf{L}f) = 0.$$

Introduisons à présent l'opérateur *carré du champ* associé au générateur infinitésimal $\mathbf{L}$.

Définition 1.2.2. — *On appelle opérateur* carré du champ *la forme bilinéaire symétrique suivante : pour f et g dans $\mathcal{A}$,*

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) := \frac{1}{2}(\mathbf{L}(fg) - f\mathbf{L}g - g\mathbf{L}f).$$

Nous noterons $\mathbf{\Gamma}(f)$ pour $\mathbf{\Gamma}(f,f)$.

Remarque 1.2.3. — *Par exemple, pour le laplacien sur $\mathbb{R}^d$, et plus généralement, pour un générateur infinitésimal de la forme*

$$\mathbf{L}f(x) = \Delta f(x) + b(x) \cdot \nabla f(x),$$

on a, par simple calcul, $\mathbf{\Gamma}(f)(x) = |\nabla f(x)|^2$. C'est d'ailleurs de là que provient la dénomination carré du champ (de gradient).

Définissons encore l'*énergie* sous μ.

Définition 1.2.4. — *On appelle* énergie de f sous μ *la quantité*

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mu(f) := \int \mathbf{\Gamma}(f)\, d\mu.$$

Remarque 1.2.5. — *Cette définition suppose qu'il n'y ait pas d'ambigüité sur le contexte : μ est invariante par rapport à un semi-groupe de* Markov *de carré du champ $\mathbf{\Gamma}$.*

L'inégalité de Poincaré pour la mesure μ est un contrôle de la variance par l'énergie sous μ.

Définition 1.2.6 **(Inégalité de Poincaré).** — *Considérons un générateur infinitésimal $\mathbf{L}$ de mesure invariante μ. On dira que la mesure μ vérifie une* inégalité de Poincaré *de constante c, si pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$,*

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq c\, \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mu(f). \tag{1.2}$$

L'inégalité de Sobolev logarithmique, quant à elle, est un contrôle de l'entropie du carré d'une fonction par son énergie. Précisons tout de suite notre définition de l'entropie : pour toute fonction f positive,

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) := \int f \log f\, d\mu - \int f\, d\mu \log \int f\, d\mu.$$

Définition 1.2.7 **(Inégalité de Sobolev logarithmique)**

Soit $\mathbf{L}$ un générateur infinitésimal de mesure invariante μ. On dira que μ satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique *de constante c si, pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$,*

$$Ent_\mu\big(f^2\big) \leq c\, \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mu(f). \tag{1.3}$$

Remarque 1.2.8. — *L'inégalité de* Sobolev *logarithmique est « plus forte » que celle de* Poincaré*. En effet, on peut montrer que si μ vérifie une inégalité de* Sobolev *logarithmique de constante c, alors elle vérifie une inégalité de* Poincaré *de constante $c/2$ (avec la même énergie).*

1.3. Le critère de Bakry-Emery

L'un des outils fondamentaux de l'étude des inégalités de Sobolev logarithmiques est le critère de courbure-dimension dû à Bakry et Emery (voir [BE85]). Il s'agit d'une condition suffisante de « convexité »valable non seulement pour les semi-groupes sur $\mathbb{R}^d$ mais aussi sur les variétés riemanniennes. Pour le présenter, il nous faut introduire un autre opérateur associé à $\mathbf{L}$, l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$. Il est construit à partir de $\mathbf{\Gamma}$ comme $\mathbf{\Gamma}$ l'est à partir de $\mathbf{L}$.

Définition 1.3.1. — *On appelle opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$, la forme bilinéaire symétrique suivante :*

$$\mathbf{\Gamma_2}(f,g) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}(f,g) - \mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}g) - \mathbf{\Gamma}(g,\mathbf{L}f)).$$

On notera $\mathbf{\Gamma_2}(f)$ pour $\mathbf{\Gamma_2}(f,f)$.

Pour une description plus détaillée de la construction de $\mathbf{\Gamma_2}$ et de son lien avec la géométrie riemannienne, on pourra consulter l'annexe A.

Définition 1.3.2. — *Nous dirons que l'opérateur $\mathbf{L}$ vérifie le critère de courbure $C(\rho)$, avec ρ réel, si, pour toute fonction f suffisamment régulière,*

$$\mathbf{\Gamma_2}(f) \geq \rho\mathbf{\Gamma}(f).$$

Exemple 1. — *Le générateur infinitésimal du processus d'*Ornstein-Uhlenbeck *sur $\mathbb{R}^d$ est donné par*

$$\mathbf{L}f(x) = \Delta f(x) - x \cdot \nabla f(x).$$

et est de courbure 1.

Nous ne nous intéressons ici qu'au critère de courbure en dimension infinie. Pour la présentation générale du critère de Bakry-Emery, on pourra se reporter à l'annexe A.

1.4. L'exemple fondamental des diffusions

Dans notre contexte, l'exemple le plus important est celui des processus de diffusion sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, des processus de Markov dont le générateur est un opérateur différentiel du second ordre sans terme constant. Dans cette section, nous relions le plus possible les approches de type « semi-groupe »d'une part et « calcul stochastique »d'autre part. Considérons le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sqrt{2}\sigma(X_s)\, dB_s + + \int_0^t b(X_s)\, ds$$

où $(B_t)_t$ est un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$, σ (resp b) est une application régulière de $\mathbb{R}^d$ dans l'espace des matrices symétriques positives de taille $d \times d$ (resp dans $\mathbb{R}^d$). Le semi-groupe de Markov associé est défini par :

$$\mathbf{P}_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_0 = x) = \mathbb{E}^x f(X_t).$$

La formule d'ITÔ fournit la décomposition de $f(X_t)$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \sigma_{ij}(X_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\, dB_s^j + \int_0^t \mathbf{L} f(X_s)\, ds,$$

où le générateur $\mathbf{L}$ de $(X_t)_{t \geq 0}$ est l'opérateur différentiel du second ordre sans terme constant défini par

$$\mathbf{L} f(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

la matrice a étant égale à $\sigma\sigma^*$.

La variation quadratique $\langle M \rangle_t$ de la partie martingale M_t de $f(X_t)$ est donnée par :

$$\langle M \rangle_t = \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t a_{ij}(X_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s)\, ds.$$

D'autre part, la définition 1.2.2 de l'opérateur $\mathbf{\Gamma}$ assure que

$$\mathbf{\Gamma}(f, g)(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x).$$

On voit ainsi que

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \mathbf{\Gamma}(f)(X_s)\, ds.$$

Le calcul explicite de $\mathbf{\Gamma_2}$ dans le cas général est très pénible. Nous renvoyons à l'annexe A pour plus de détails. Insistons toutefois sur le cas où la matrice de diffusion σ est égale à l'identité. On obtient alors, par définition de $\mathbf{\Gamma_2}$,

$$\mathbf{\Gamma_2}(f)(x) = \|\mathrm{Hess} f(x)\|_2^2 - \langle \mathrm{Jac}\ b(x) \nabla f(x), \nabla f(x) \rangle$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{d \times d}$.

Le semi-groupe vérifie alors le critère de courbure ρ si et seulement si, pour tout x dans $\mathbb{R}^d$, toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne de b en x sont majorées par $-\rho$.

1.5. Inégalités fonctionnelles pour un processus de Markov

Dans cette section, nous rappelons les résultats importants sur les inégalités de POINCARÉ et SOBOLEV logarithmiques pour la loi au temps t d'un processus de MARKOV (X_t). Leurs preuves sont basées sur une élégante méthode de semi-groupe et reposent sur le critère de courbure. L'approche « traditionnelle »due à BAKRY et EMERY est présentée en détail dans l'annexe A. Il est primordial de remarquer que les inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmique sont des conséquence d'une relation de commutation entre $\mathbf{P}_t$ et $\mathbf{\Gamma}$ ou $\sqrt{\mathbf{\Gamma}}$. Nous verrons dans le chapitre 5 que les inégalités fonctionnelles pour les schémas d'EULER s'obtiennent de manière analogue.

Proposition 1.5.1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{C}(\rho)$ *est vérifiée : pour toute fonction* $f \in \mathcal{A}$,

$$\mathbf{\Gamma_2}(f) \geq \rho\, \mathbf{\Gamma}(f)$$

(ii) *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{A}$ *et tout* $t > 0$,

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{P}_t(f) \leq e^{-2\rho t} \mathbf{P}_t \mathbf{\Gamma}(f)$$

(iii) *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{A}$ *et tout* $t > 0$,

$$\mathbf{P}_t(f^2) - (\mathbf{P}_t f)^2 \leq \frac{1 - e^{-2\rho t}}{\rho} \mathbf{P}_t \mathbf{\Gamma}(f).$$

Remarque 1.5.2. — *Si* ρ *est nul il convient de remplacer*

$$\frac{1 - e^{-2\rho t}}{\rho}$$

par $2t$.

Preuve. — Nous présentons ici une preuve rapide de ce résultat en utilisant le vocabulaire du calcul stochastique afin de bien souligner les correspondances avec l'approche par semi-groupe. À t fixé, considérons la fonction définie par

$$F(s,x) := \mathbb{E}^x\left(f(X_{t-s})\right) = f(x) + \int_0^{t-s} \mathbb{E}^x\left(\mathbf{L} f(X_r)\right) dr,$$

et appliquons la formule d'Itô à la semi-martingale $\mathbf{\Gamma} F(s, X_s)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x\left(\mathbf{\Gamma} F(t, X_t)\right) - \mathbf{\Gamma}(\mathbb{E}^x f(X_t)) &= 2\int_0^t \mathbb{E}^x\left(2\mathbf{\Gamma}\left(F, \frac{\partial F}{\partial s}\right) + \mathbf{L}\mathbf{\Gamma} F\right) dr \\
&= 2\int_0^t \mathbb{E}^x\left(-2\mathbf{\Gamma}(F, \mathbf{L}F) + \mathbf{L}\mathbf{\Gamma} F\right) dr \\
&= 2\int_0^t \mathbb{E}^x\left(\mathbf{\Gamma_2} F(r, X_r)\right) dr.
\end{aligned}$$

Notons alors $\alpha(s) = \mathbb{E}(\mathbf{\Gamma} F(s, X_s) | X_0 = x)$. Sous l'hypothèse $\mathrm{C}(\rho)$ de courbure minorée par ρ, on obtient

$$\alpha'(s) = 2\, \mathbb{E}^x \mathbf{\Gamma_2} F(s, X_s) \geq 2\rho\, \mathbb{E}^x \mathbf{\Gamma} F(s, X_s) = 2\rho\, \alpha(s).$$

Le lemme de Gronwall fournit l'inégalité suivante :

$$\alpha(t) e^{-2\rho t} \geq \alpha(0),$$

ou encore, par définition de α et F,

$$\mathbf{\Gamma}[\mathbb{E}^x\left(f(X_t)\right)] \leq e^{-2\rho t} \mathbb{E}^x\left(\mathbf{\Gamma} f(X_t)\right).$$

Nous avons donc établi que (i) implique (ii).

Pour obtenir l'inégalité de POINCARÉ, il faut à présent appliquer la formule d'ITÔ à $F(t, X_t)^2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x\left(F(t,X_t)^2\right) - F(0,x)^2 &= 2\int_0^t \mathbb{E}^x\left(F(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial t}(s,X_s)\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \mathbb{E}^x\left(\mathbf{L}\left[F(s,X_s)^2\right]\right) ds \\ &= 2\int_0^t \mathbb{E}^x\left(\mathbf{\Gamma} F(s,X_s)\right) ds.\end{aligned}$$

Par définition de F, on a donc

$$\mathbf{Var}_{\mathcal{L}(X_t)}(f) = 2\int_0^t \mathbb{E}^x\left(\mathbf{\Gamma} F(s,X_s)\right) ds. \tag{1.4}$$

On utilise alors (ii) pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}_{\mathcal{L}(X_t)}(f) &\leq 2\int_0^t \mathbb{E}^x\left(\mathbf{\Gamma}\left(\mathbb{E}^{X_s} f(X_{t-s})\right)\right) ds \\ &\leq 2\int_0^t e^{-2\rho(t-s)}\mathbb{E}^x\left(\mathbb{E}^{X_s}\mathbf{\Gamma} f(X_{t-s})\right) ds \\ &\leq \frac{1-e^{-2\rho t}}{\rho}\mathbb{E}^x\left(\mathbf{\Gamma} f(X_t)\right).\end{aligned}$$

Et ainsi (ii) implique (iii).

La dernière implication se démontre en faisant un développement limité de l'inégalité de POINCARÉ au voisinage de $t = 0$. □

Pour obtenir une inégalité de SOBOLEV logarithmique, il faut ajouter l'hypothèse que le semi-groupe est une diffusion. Ceci fournit des formules de changement de variables pour $\mathbf{L}\Phi(f)$ qui sont utilisées de manière cruciale dans la preuve.

Théorème 1.5.3. — *Si $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de diffusion et ρ est un nombre réel, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{C}(\rho)$ *est vérifiée*

(ii) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$ et tout $t > 0$,*

$$\sqrt{\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}_t f} \leq e^{-\rho t}\mathbf{P}_t\left(\sqrt{\mathbf{\Gamma} f}\right)$$

(iii) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$ et tout $t > 0$,*

$$\mathbf{P}_t(f^2\log f^2) - \mathbf{P}_t(f^2)\log \mathbf{P}_t(f^2) \leq \frac{2}{\rho}(1-e^{-2\rho t})\mathbf{P}_t\mathbf{\Gamma}(f).$$

L'hypothèse de diffusion permet donc d'obtenir une relation de commutation du semi-groupe avec la racine du carré du champ et non plus seulement avec le carré du champ lui-même. On trouvera une preuve de ce résultat et des commentaires complémentaires dans l'annexe A.

1.6. Principales propriétés et applications

1.6.1. Convergence à l'équilibre. — Les inégalités que nous venons de décrire fournissent des vitesses de convergence du semi-groupe de MARKOV vers sa mesure invariante.

Théorème 1.6.1. — *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La mesure μ vérifie une inégalité de* POINCARÉ *de constante c.*
2. *Il existe une constante λ telle que, pour toute fonction f dans $\mathcal{A}$,*

$$\|\mathbf{P}_t f - \mu(f)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu)} \leq e^{-2\lambda t}\mathbf{Var}_\mu(f). \tag{1.5}$$

De plus, les constantes optimales sont liées par la relation $c = 1/\lambda$.

Remarque 1.6.2. — *L'inégalité* (1.5) *est connue sous le nom d'*inégalité de trou spectral. *Ceci se justifie de la manière suivante. Pour toute fonction f dans $\mathcal{A}$,*

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mu(f) = -\int f\mathbf{L}f\,d\mu.$$

Le spectre de $-\mathbf{L}$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ est donc inclus dans $[0,+\infty[$. On dit que μ vérifie une inégalité de trou spectral de constante λ si 0 est valeur propre simple (associée aux constantes par définition de l'invariance) et que toutes les valeurs propres non nulles de $-\mathbf{L}$ sont supérieures à λ. Si l'on admet que le semi-groupe s'écrit formellement $\exp(-t\mathbf{L}f)$, *une fonction d'intégrale nulle pour μ vérifiera*

$$\|\mathbf{P}_t f\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \|\exp(-t\mathbf{L}f)\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} \leq e^{-\lambda t}\|f\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}.$$

L'inégalité de SOBOLEV logarithmique fournit une meilleure estimation de la convergence vers l'équilibre pour les semi-groupes de diffusion puisqu'elle permet de contrôler la décroissance de l'entropie relative par rapport à la mesure invariante qui est définie par

$$\mathrm{Ent}(\nu\,|\,\mu) := \int \frac{d\nu}{d\mu}\log\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu = \int \log\frac{d\nu}{d\mu}\,d\nu.$$

Ce résultat est bien connu mais nous en donnons la preuve pour que le lecteur puisse la comparer avec la généralisation au cadre non linéaire que présente le chapitre 4. Considérons le processus de MARKOV solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sqrt{2}\sigma(X_s)\,dB_s + + \int_0^t b(X_s)\,ds$$

où $(B_t)_t$ est un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$, σ (resp b) est une application régulière de $\mathbb{R}^d$ dans l'espace des matrices de taille $d \times d$ (resp dans $\mathbb{R}^d$).

Notons u_t la densité de probabilité de la loi de X_t. Alors, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, la formule d'ITÔ fournit la relation

$$\int f(x)u_t(x)\,dx - \int f(x)u_0(x)\,dx = \int_0^t \int \mathbf{L}f(x)\,u_s(x)\,dx.$$

La densité u_t est donc solution faible de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \mathbf{L}^* u_t,$$

où l'opérateur $\mathbf{L}^*$ est l'adjoint de $\mathbf{L}$ pour la mesure de LEBESGUE :

$$\mathbf{L}^* f(x) = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(x)f(x)) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x)f(x)).$$

Théorème 1.6.3. — *Soit $(\mathrm{P}_t)_t$ un semi-groupe de diffusion de mesure invariante μ tel que μ vérifie une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique de constante c. Alors, pour toute fonction f suffisamment régulière,*

$$\operatorname{Ent}(u_t \,|\, \mu) \leq \operatorname{Ent}(f \,|\, \mu) e^{-4t/c}.$$

Preuve. — On cherche à déterminer l'évolution temporelle de la fonction

$$\alpha(t) = \operatorname{Ent}(u_t \,|\, \mu) = \int \log \frac{u_t}{\mu}\, du_t.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \int \frac{\partial u_t}{\partial t}\left(\log \frac{u_t}{\mu} + 1\right) dx = \int (\mathbf{L}^* u_t)\left(\log \frac{u_t}{\mu} + 1\right) dx \\
&= \int \mathbf{L}\left(\log \frac{u_t}{\mu}\right) \frac{u_t}{\mu}\, d\mu \\
&= -\int \mathbf{\Gamma}\left(\frac{u_t}{\mu}, \log \frac{u_t}{\mu}\right) d\mu \qquad (1.6)\\
&= -\int \mathbf{\Gamma}\left(\frac{u_t}{\mu}, \frac{u_t}{\mu}\right) \frac{\mu}{u_t}\, d\mu. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Pour obtenir (1.6), il faut remarquer que

$$\mathbb{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f,g)) = -\mathbb{E}_\mu(f, \mathbf{L}g)$$

puisque μ est la mesure invariante de $\mathbf{L}$ (c'est-à-dire que $\mathbb{E}_\mu(\mathbf{L}f) = 0$). D'autre part, la formule de changement de variables pour $\mathbf{\Gamma}$, qui s'écrit

$$\mathbf{\Gamma}(f, \Phi(g)) = \Phi'(g)\mathbf{\Gamma}(f,g),$$

fournit (1.7). On voit ainsi que la dérivée de α est négative. Son opposé sera appelé *dissipation d'entropie* même si, dans le contexte général de la partie 4, la fonctionnelle dont on étudie la décroissance n'est plus tout à fait une entropie.

Écrivons à présent l'entropie relative $\alpha(t)$ en fonction de l'entropie intervenant dans l'inégalité de SOBOLEV logarithmique :

$$\operatorname{Ent}(u_t \,|\, \mu) = \operatorname{Ent}_\mu\left(\frac{u_t}{\mu}\right).$$

D'après l'inégalité de SOBOLEV logarithmique, on a

$$\alpha(t) \leq c \int \mathbf{\Gamma}\left(\sqrt{\frac{u_t}{\mu}}, \sqrt{\frac{u_t}{\mu}}\right) d\mu = \frac{c}{4} \int \mathbf{\Gamma}\left(\frac{u_t}{\mu}, \frac{u_t}{\mu}\right) \frac{\mu}{u_t}\, d\mu.$$

On obtient ainsi que α vérifie l'inéquation différentielle suivante :

$$\alpha(t) \leq -\frac{c}{4}\,\alpha'(t),$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Remarque 1.6.4. — *En fait, si l'on calcule $\alpha''(t)$, on peut s'apercevoir que la condition $\alpha''(t) \geq \rho\,\alpha'(t)$ est une conséquence du critère de courbure $C(\rho)$. L'idée même du critère de* Bakry *et* Emery *est donc de comparer la dissipation d'entropie à la dissipation de dissipation d'entropie pour obtenir l'inégalité de* Sobolev *logarithmique, c'est-à-dire un contrôle de l'entropie par sa dissipation. Nous verrons dans la suite que cette idée est très fructueuse puisqu'elle fournit encore le même type de résultat pour des équations différentielles non linéaires (voir chapitre 4).*

1.6.2. Tensorisation. — L'une des propriétés les plus importantes des inégalités de Poincaré et Sobolev logarithmiques réside dans le fait qu'elles se comportent parfaitement par passage au produit. Considérons deux mesures de probabilité μ_a et μ_b sur des espaces mesurés $(\mathbb{F}_a, \mathcal{F}_a)$ et $(\mathbb{F}_b, \mathcal{F}_b)$ respectivement invariantes pour les générateurs $\mathbf{L}_a$ et $\mathbf{L}_b$. Il est alors possible de définir l'opérateur $\mathbf{L} = \mathbf{L}_a + \mathbf{L}_b$ sur une classe de fonctions de $\mathbb{F}_a \times \mathbb{F}_b$ dans $\mathbb{R}$ en faisant agir $\mathbf{L}_a$ sur la première variable et $\mathbf{L}_b$ sur la deuxième. La mesure produit $\mu_a \otimes \mu_b$ est alors invariante pour $\mathbf{L}$.

Théorème 1.6.5. — *Si μ_a et μ_b vérifient des inégalités de* Poincaré *(resp de* Sobolev *logarithmiques) de constantes c_a et c_b alors la mesure $\mu_a \otimes \mu_b$ vérifie une inégalité de* Poincaré *(resp de* Sobolev *logarithmique) de constante* $\max(c_a, c_b)$.

Cette propriété est très utilisée en mécanique statistique (voir par exemple [SZ92]). On pourra en trouver une preuve et d'autres utilisations dans [ABC+00].

1.6.3. Concentration de la mesure. — Parmi les nombreuses conséquences des des inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmiques, l'une des plus utiles est qu'elles fournissent des inégalités de concentration de la forme suivante : pour toute fonction f telle $\mathbf{\Gamma}(f) \leq 1$,

$$\mathbb{P}(|f(X) - \mathbb{E}_\mu(f)| \geq r) \leq 2\exp\left(-h(r)\right)$$

pour tout $r \geq 0$.

Théorème 1.6.6. — *Si μ satisfait à une inégalité de* Poincaré *de constante c, la fonction de concentration est de la forme $r/4c$.*

Si μ vérifie une inégalité de Sobolev *logarithmique de constante c, la fonction de concentration est de la forme r^2/c.*

Remarque 1.6.7. — *Ces fonctions de concentration sont satisfaisantes si l'on se souvient des deux exemples des mesures exponentielle et gaussienne (voir section 1.1.1).*

Pour une description détaillée des relations entre inégalités de Sobolev logarithmiques et phénomène de concentration de la mesure, on pourra se reporter à [Led99].

La propriété de concentration sera très souvent utilisée dans la suite et notamment sous la forme suivante : soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^N$ vérifiant une inégalité de SOBOLEV logarithmique de constante c et de carré du champ $\mathbf{\Gamma}$ égal à $|\nabla\cdot|^2$. Si de plus, les marginales de μ sont égales, alors, pour toute fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de norme de LIPSCHITZ 1,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) - \mathbb{E}f(X_1)\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{c}\right),$$

pour tout $r \geq 0$ où $(X_1, \ldots, X_N)$ suit la loi μ.

Bibliographie

[ABC+00] C. ANÉ, S. BLACHÈRE, D. CHAFAÏ, P. FOUGÈRES, I. GENTIL, F. MALRIEU, C. ROBERTO & G. SCHEFFER – *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[BE85] D. BAKRY & M. EMERY – « Diffusions hypercontractives », Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lectures Notes in Math., vol 1123, Springer, Berlin, 1985, p. 177–206.

[Led99] M. LEDOUX – « Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities », Séminaire de Probabilités XXXIII. Lectures Notes in Math., vol 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 120–216.

[SZ92] D. W. STROOCK & B. ZEGARLIŃSKI – « The logarithmic Sobolev inequality for discrete spin systems on a lattice », *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), no. 1, p. 175–193.

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS NON LINÉAIRES ET PROPAGATION DU CHAOS

L'expression « propagation du chaos »remonte à KAC qui s'intéressait au lien unissant les versions détaillée et réduite des équations décrivant l'évolution d'un système à N particules en interaction. Le problème initial concernait l'équation de BOLTZMANN pour des gaz dilués de sphères dures. Nous commençons cette partie en obtenant, de manière formelle, une équation des milieux granulaires comme la distribution limite d'une particule dans un système de particules déterministes se choquant inélastiquement. Ceci nous permet alors d'introduire la forme générale des équations des milieux granulaires.

Nous présentons ensuite les équations de MCKEAN-VLASOV qui regroupent à peu près toutes les équations aux dérivées partielles non linéaires étudiées dans la suite pourvu que l'on autorise l'irrégularité des coefficients. Ainsi, retrouve-t-on par exemple l'équation de BURGERS ou une version équivalente à l'équation de NAVIER-STOKES en dimension deux.

Enfin, nous décrivons brièvement les méthodes classiques et les résultats importants attachés à ces équations : existence et unicité du procesus non linéaire associé à l'équation de MCKEAN-VLASOV, propagation du chaos pour les lois de processus, etc... Nous présentons également un résultat de convergence pour les lois au temps t, donc *a priori* moins fort que le précédent, mais qui a le double mérite d'utiliser une méthode de semi-groupe et d'être plus précisément relié au réel comportement du processus.

2.1. Une interprétation physique de l'équation des milieux granulaires

Les systèmes de particules se choquant de manière inélastique ont récemment été étudiés comme un modèle de l'évolution des milieux granulaires. En effet, l'une des caractéristiques de ces systèmes est leur propension à former des amas comme les grains de sable sur une feuille de papier que l'on secoue.

Les équations des milieux granulaires peuvent être obtenues formellement comme limite de la densité de présence d'une particule parmi N en renormalisant convenablement l'amortissement dans les chocs (voir [MY93]). Cette approche, que nous détaillons ci-dessous de manière formelle, peut être rendue rigoureuse et reprend le raisonnement initial de KAC pour l'équation de BOLTZMANN (voir [BCP97]).

Soient N particules identiques sur la droite réelle, $x_1, \dots, x_N$ leurs positions et $v_1, \dots, v_N$ leurs vitesses. Les particules évoluent librement jusqu'à ce que deux d'entre elles soient en un même point. Là, ces deux particules entrent en collision de la manière suivante :

$$v' = v_* + \varepsilon(v - v_*) \quad \text{et} \quad v'_* = v - \varepsilon(v - v_*),$$

v', v'_* et v, v_* désignant respectivement les vitesses sortantes et entrantes et ε étant le paramètre mesurant l'inélasticité des chocs. Après ce choc, les particules évoluent à nouveau librement jusqu'à la collision suivante.

Les particules étant identiques, le comportement du système demeure inchangé si l'on remplace la règle de collision par

$$v'_* = v_* + \varepsilon(v - v_*) \quad \text{et} \quad v' = v - \varepsilon(v - v_*).$$

Les particules après le choc ont été échangées. Cette remarque simplifie de nombreux calculs.

Le système est ainsi gouverné par l'équation différentielle ordinaire, dite équation de Louville,

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \delta(x_i - x_j)(v_i - v_j)|v_i - v_j|, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Remarque 2.1.1. — *La quantité $\varepsilon(v_i - v_j)$ représente la variation de vitesse au moment du choc avec la particule j tandis que $\delta(x_i - x_j)|v_i - v_j|$ vaut $\delta(t - t_{ij})$ où t_{ij} désigne l'instant du choc entre les particules i et j.*

Soit alors $\mu_t^{(N)}$ la densité de probabilité du système au temps t qui dépend de la loi initiale. Elle est solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\left(\partial_t + \sum_{i=1}^{N} v_i \partial_{x_i}\right) & \mu_t^{(N)}(x_1, v_1, \dots, x_N, v_N) \\ &= -\varepsilon \sum_{j \neq i} \delta(x_i - x_j) \partial_{v_i}[\phi(v_j - v_i) \mu_t^{(N)}(x_1, v_1, \dots, x_N, v_N)],\end{aligned}$$

où $\phi(x) = x|x|$.

La stratégie est ensuite d'intégrer cette relation par rapport à toutes les variables, exceptées x_1 et v_1. Pour cela nous noterons

$$f_j^{(N)}(t, x_1 v_1, \dots, x_j, v_j) = \int dx_{j+1}\, dv_{j+1} \dots dx_N\, dv_N\, \mu_t^{(N)}(x_1, x_1, \dots, x_N, v_N)$$

la densité de probabilité de j particules au temps t. Il vient alors

$$\begin{aligned}(\partial_t + v_1 \partial_{x_1}) f_1^{(N)}(t, x_1, v_1) &= \\ & -\varepsilon(N-1) \partial_{v_1} \int dv_2\, \phi(v_2 - v_1) f_2^{(N)}(t, x_1, v_1, x_1, v_2).\end{aligned}$$

Au vu de cette relation, il est clair que la bonne façon de passer à la limite est de poser ε égal à λ/N pour un coefficient λ strictement positif. Supposons à présent que les densités $f_j^{(N)}$ aient des limites – que nous noterons f_j – quand N tend vers l'infini. Il vient :

$$(\partial_t + v_1\partial_{x_1})f_1(t,x_1,v_1) = -\lambda\partial_{v_1}\int dv_2\,\phi(v_2-v_1)f_2(t,x_1,v_1,x_1,v_2).$$

Supposons enfin que si les lois des particules sont indépendantes et identiquement distribuées au temps initial, alors elles sont deux à deux indépendantes et équidistribuées au temps t. C'est le phénomène de propagation du chaos. La densité f_1 est alors solution de

$$\begin{aligned}(\partial_t + v_1\partial_{x_1})f_1(t,x_1,v_1) &= -\lambda\partial_{v_1}\int dv_2\,\phi(v_2-v_1)f_1(t,x_1,v_1)f_1(t,x_1,v_2)\\ &= \lambda\partial_{v_1}[f_1(t,x_1,v_1)\phi *_v f_1(t,x_1,v_1)].\end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu une équation des milieux granulaires.

Si l'on considère à présent des particules plongées dans un bain thermique, chacune subit une excitation, traduite par l'ajout d'un mouvement brownien, et une force de frottement, proportionnelle à sa vitesse. L'équation devient

$$(\partial_t + v\partial_x)f = \mathrm{div}_v[\sigma\nabla_v f + f(\rho v + \phi *_v f)].$$

Enfin nous n'étudierons que le problème, beaucoup plus simple, de l'équation homogène, c'est-à-dire que nous oublierons la dépendance en la variable d'espace x. Nous pourrons toutefois considérer des potentiels et des interactions moins spécifiques que ceux présentés ci-dessus. L'équation générique sera de la forme :

$$\partial_t f = \mathrm{div}_v[\sigma\nabla f + f(V + \nabla W * f)].$$

Nous aurions pu considérer un autre passage à la limite. Supposons que les particules qui entrent en collision n'interagissent qu'avec une probabilité α et continuent leurs mouvements libres avec probabilité $1-\alpha$. Les chocs sont moins fréquents mais restent d'intensité forte. À la limite, quand $N \to \infty$ avec $N\alpha = \lambda$, on obtient par un raisonnement similaire à celui présenté ci-dessus une équation de BOLTZMANN.

2.2. Les autres équations étudiées

2.2.1. Les équations de McKEAN-VLASOV. — Les équations des milieux granulaires peuvent être vues comme un cas particulier des équations dites de McKEAN-VLASOV. Ces équations peuvent servir à modéliser un gaz à forte densité de particules comme l'équation de BOLTZMANN rend compte du comportement des gaz raréfiés (voir [Szn91] et [Mél96]). Ces deux équations peuvent être obtenues par un schéma analogue à celui des équations des milieux granulaires. La différence entre les deux modèles réside dans le fait de privilégier la fréquence des chocs ou leur intensité. Dans le premier cas, les collisions sont si fréquentes qu'à la limite, les termes de collision sont remplacés par des termes d'interaction de type champ moyen traduisant l'attraction ou la répulsion des particules. Au contraire, pour les gaz raréfiés, le faible nombre de collisions donne, à la limite, un terme de transport libre et un noyau de collision. Dans ce travail, nous ne nous intéresserons qu'aux équations de type champ moyen.

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante sur $\mathbb{R}^d$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}[x,u]u) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i[x,u]u), \tag{2.1}$$

où $u(t,\cdot)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\begin{aligned} b[x,\nu] &= \int b(x,y)\,\nu(dy) \quad \text{avec } b(x,y) \text{ vecteur de } \mathbb{R}^r, \\ a[x,\nu] &= \sigma[x,\nu]^*\sigma[x,\nu], \\ \sigma[x,\nu] &= \int \sigma(x,y)\,\nu(dy) \quad \text{avec } \sigma(x,y) \text{ matrice de taille } r\times r, \end{aligned}$$

pour toute mesure de probabilité ν. Elles sont connues sous le nom d'équations de McKean-Vlasov et regroupent quantité d'équations célèbres comme celles de Burgers ou de Navier-Stokes (en dimension deux) si l'on autorise des coefficients irréguliers.

Pour étudier cette équation, le probabiliste lui associe un processus dont la loi est solution, *a priori* au sens faible, de l'équation. On est ainsi amené à considérer l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} \overline{X}_t = \overline{X}_0 + \int_0^t \sigma[\overline{X}_s, u_s]\,dB_s + \int_0^t b[\overline{X}_s, u_s]\,ds \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t) = u_t(dx). \end{cases} \tag{2.2}$$

Nous parlerons pour (2.2) et pour $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ d'équation différentielle stochastique et de processus non linéaires. Ceci ne fait pas référence au fait que les coefficients de (2.2) ne sont pas linéaires mais rappelle que *la loi du processus* $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ *intervient dans ces coefficients.*

L'étape suivante consiste à associer au processus $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ un système de particules en interaction. Pour cela, il suffit de considérer des particules dirigées par des mouvements browniens indépendants mais en interaction par leur mesure empirique :

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma\big(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}\big)\,dB_t^i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b\big(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}\big)\,dt \\ X_0^{i,N} = X_0^i \quad \text{pour } i = 1,\ldots,N. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ce système, bien que voué à être de grande taille, apparaît plus facile à étudier, et plus tard à simuler, du fait de sa « linéarité ».

La question est alors de savoir sous quelles hypothèses, le système de particules (2.3) constitue une « bonne approximation »du processus non linéaire associé (propagation du chaos) et ce qu'il permet de dire sur l'équation aux dérivées partielles (2.1) (convergence à l'équilibre, simulation ...).

2.2.2. Le problème de Stephan régularisé. — On peut aussi s'intéresser à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[a_{ij}(x,\kappa * u)u] - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(x,\kappa * u)u].$$

Son étude est très similaire à celle de l'équation de McKean-Vlasov. On lui associe le système de particules :

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = \sqrt{2}\sigma(X_s^{i,N}, \kappa * \Pi_s^N(X_s^{i,N}))\, dB_s^i + b(X_s^{i,N}, \kappa * \Pi_s^N(X_s^{i,N}))\, ds \\ X_0^{i,N} = X_0^i \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \end{cases}$$

où $a = \sigma\sigma^*$ et Π_t^N est la mesure empirique du système au temps t :

$$\Pi_t^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} \delta_{X_t^{k,N}}.$$

Cette équation peut être vue comme une régularisation du problème de Stephan (voir [Zhe95]).

2.2.3. L'équation de Navier-Stokes en dimension deux. — La vitesse $v(t,x)$ d'un fluide visqueux et incompressible dans le plan est gouvernée par l'équation de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + (v \cdot \nabla)v(t,x) = \nu\Delta v(t,x) - \nabla p \\ \operatorname{div} v(t,x) = 0\,;\ v(t,x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty \end{cases}$$

où p est la pression et $\nu > 0$ est la viscosité (supposée constante).

Il est possible de donner un problème équivalent en considérant l'équation satisfaite par la vorticité w (parfois notée curl$v$) de v que l'on définit ainsi :

$$w(x) = \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2.$$

En effet, w est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) + (v \cdot \nabla)w(t,x) = \nu\Delta w(t,x) \\ v(t,x) = \displaystyle\int K(x-y)w(t,y)\, dy \end{cases}$$

où K est le noyau de Biot et Savart défini par

$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2, x_1).$$

Remarque 2.2.1. — *Le fait que K soit à divergence nulle assure qu'il en est bien de même pour v.*

Pour contourner le problème de l'explosion de K en 0, on peut être amené à introduire un noyau tronqué K_ε défini de la manière suivante. Remarquons que le noyau K s'écrit pour tout x de $\mathbb{R}^2$

$$K(x) = \nabla^\perp g(|x|) \quad \text{avec} \quad g(r) = -\frac{1}{2\pi}\log r,$$

où

$$\nabla^\perp f(x) = (\partial_2 f, -\partial_1 f).$$

Pour $\varepsilon > 0$, on considère g_ε tel que $g_\varepsilon(r) = g(r)$ si $r > \varepsilon$ et que l'on prolonge sur $[0,\varepsilon]$ de telle manière que $|g'_\varepsilon(r)| \leq |g'(r)|$ et $|g''_\varepsilon(r)| \leq |g''(r)|$. On pose alors de manière naturelle

$$K_\varepsilon(x) = \nabla^\perp g_\varepsilon(|x|).$$

L'équation associée au coefficient Ke appartient alors à la classe des équations de McKean-Vlasov à coefficients réguliers et a été étudiée notamment dans [MP82] et [Mél00]. Pour résoudre numériquement cette équation de manière probabiliste, il reste à considérer le système de particules associé ou plus exactement son schéma d'Euler puis établir des résultats de convergence en fonction du pas du schéma, du nombre de particules et de ε (voir chapitre 5).

2.3. Quelques méthodes et résultats classiques

Nous esquissons ici les résultats généraux de propagation du chaos. Sans entrer dans les détails, nous voulons donner un parfum des techniques usuelles utilisées par de nombreux auteurs. Nous donnons aussi, dans un cas simple, un résultat de propagation du chaos au temps t qui a l'avantage de dépendre de la courbure du système de particules.

2.3.1. Existence et unicité du processus non linéaire. — La première étape de l'étude probabiliste d'équations aux dérivées partielles de McKean-Vlasov est de montrer que l'on peut leur associer un processus solution de l'équation (2.2) dont la loi au temps t est solution de l'équation.

Pour cela, on construit dans un premier temps $(u_t)_{t\in[0,T]}$. On est alors amener à résoudre une équation différentielle stochastique usuelle (avec des coefficients qui dépendent du temps).

Pour une présentation de cette méthode dans un cas simple, on pourra consulter [Szn91].

2.3.2. Propagation du chaos. — La seconde étape du raisonnement est de montrer, qu'en un sens à préciser, le système de particules en interaction est proche du processus non linéaire auquel il est associé. La méthode usuelle est la suivante : à N fixé, on considère N processus non linéaires dirigés par les mêmes mouvements browniens (indépendants) que ceux du système de particules. On va donc comparer

$$d\overline{X}_t^i = \sigma[\overline{X}_t^i, u_t]\,dB_t^i + b[\overline{X}_t^i, u_t]\,dt$$

et

$$dX_t^{i,N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \sigma\big(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}\big)\,dB_t^i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b\big(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}\big)\,dt.$$

On utilise alors la formule d'Itô pour établir le contrôle suivant lorsque les coefficients sont lipschitziens :

$$\mathbb{E}\left(\left|\overline{X}_t^i - X_t^{i,N}\right|^2\right) \leq \frac{K_t}{N}.$$

Le fait que les deux processus soient dirigés par le même mouvement brownien permet de montrer un résultat beaucoup plus fort, pour les processus sur $[0,T]$ de la forme :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\overline{X}_t^i - X_t^{i,N}\right|^2\right) \leq \frac{K_t'}{N}.$$

On peut également établir de manière équivalente, par échangeabilité des lois des particules du système, un résultat sur la convergence de la mesure empirique, définie sur les processus sur $[0,T]$, vers la mesure de DIRAC au point $(u_t)_{t\in[0,T]}$.

On trouvera un exemple complet de ce type de raisonnement dans le chapitre 3.

2.3.3. Une méthode de semi-groupe. — Nous présentons ici un résultat de propagation du chaos sous un angle un peu original. Cela permet de relier la dépendance en temps de la propagation du chaos à la courbure du système de particules. Plaçons-nous dans le cas des équations de MCKEAN-VLASOV en supposant que le coefficient de diffusion ne comporte pas d'interaction. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit $(\overline{X}_t^i)$ le processus solution de l'équation différentielle stochastique suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} d\overline{X}_t^i = \sqrt{2}\sigma(\overline{X}_t^i)\, dB_t^i + \displaystyle\int b(\overline{X}_t^i, y)\, u_t(dy)\, dt \\ \overline{X}_0^i = X_0^i. \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation différentielle stochastique, on construit dans un premier temps $(u_t)_t$ puis on considère alors $(\overline{X}_t^i)$ comme un processus de MARKOV inhomogène de générateur au temps t :

$$\sigma^2(x)f''(x) + \int b(x,y)u_t(dy)f'(x).$$

Dans la suite, N est un entier naturel fixé. On notera , en oubliant la dépendance en N, $(\overline{\mathbf{P}}_{s,t})_{s\leq t}$ (resp. $\overline{\mathbf{L}}_t$) le semi-groupe inhomogène (resp le générateur infinitésimal) associé à l'évolution de N processus non linéaires indépendants.

Le système de particules associé est donné par :

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = \sigma(X_t^{i,N})\, dB_t^i + \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^N b(X_t^{i,N}, X^{j,N})\, dt, \\ X_0^{i,N} = X_0^i \quad \text{pour } i = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{2.4}$$

On notera $(\mathbf{P}_t)_t$ (toujours en oubliant la dépendance en N) son semi-groupe et $\mathbf{L}$ son générateur infinitésimal. Soit F de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. À t fixé, on définit alors la fonction α sur $[0,t]$ par

$$\alpha(s) = \overline{\mathbf{P}}_{0,s}\mathbf{P}_{t-s}F.$$

Alors,

$$\alpha'(s) = \overline{\mathbf{P}}_{0,s}\big(\overline{\mathbf{L}}_s - \mathbf{L}\big)\mathbf{P}_t F. = \overline{\mathbf{P}}_{0,s}\big((\overline{b}_s - b^N)\cdot\nabla\big)\mathbf{P}_t F,$$

avec les notations évidentes

$$\overline{b}_{s,i}(x) = \int b(x_i, y)\, u_s(dy) \quad \text{et} \quad b_i^N(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b(x_i, x_j).$$

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\alpha'(s)^2 \leq \overline{\mathbf{P}}_{0,s}\Big(\big|\overline{b}_s - b^N\big|^2\Big)\overline{\mathbf{P}}_{0,s}\big(|\nabla\mathbf{P}_t F|^2\big).$$

Le premier terme du membre de gauche se traite comme dans les preuves classiques de la propagation du chaos en utilisant que les variables aléatoires $(\overline{X}_t^i)_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées. On montre qu'il est majoré par un terme de la forme C_s. Cette constante dépend des estimations *a priori* sur les moments du processus non linéaire et elle est en fait elle aussi reliée à la courbure.

Pour contrôler le deuxième terme, on utilise la relation de commutation entre $\mathbf{\Gamma}$ et le semi-groupe du système de particules. Ici, puisque le coefficient de diffusion n'est pas constant, l'opérateur carré du champ n'est pas la simple norme du gradient au carré. Pourtant avec l'hypothèse supplémentaire que σ est borné inférieurement (par une constante strictement positive) et supérieurement, ces deux opérateurs sont comparables. On a alors,

$$\alpha'(s)^2 \leq C_s e^{-2\rho(t-s)} \overline{\mathbf{P}}_{0,s} \mathbf{P}_{t-s}\big(|\nabla F|^2\big).$$

Appliquons alors ce raisonnement à une fonction F de la forme

$$F(x) = f(x_1) + \ldots + f(x_N),$$

qui est de norme de LIPSCHITZ inférieure à $\sqrt{N}$ dès que f a une dérivée majorée par 1 pour obtenir

$$\left|\mathbb{E}^{0,x} f(\overline{X}_t^i) - \mathbb{E}^x f(X_t^{i,N})\right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^t \sqrt{C_s} e^{-\rho(t-s)}\, ds.$$

Ceci assure une convergence de la loi d'une particule parmi N vers la loi d'une particule non linéaire au sens de la distance de WASSERSTEIN W_1 qui est définie par :

$$\mathbf{W}_1(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int f\, d\mu - \int f\, d\nu \right\}$$

où l'infimum est pris sur les fonctions f de norme de LIPSCHITZ inférieure à 1.

Bibliographie

[BCP97] D. BENEDETTO, E. CAGLIOTI & M. PULVIRENTI – « A kinetic equation for granular media », *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **31** (1997), no. 5, p. 615–641.

[Mél96] S. MÉLÉARD – « Asymptotic behaviour of some interacting particle systems; McKean-Vlasov and Boltzmann models », Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995), Springer, Berlin, 1996, p. 42–95.

[Mél00] ———, « A trajectorial proof for the vortex method for the two-dimensional Navier-Stokes equation », *Ann. Appl. Probab.* **10** (2000), no. 4, p. 1197–1211.

[MP82] C. MARCHIORO & M. PULVIRENTI – « Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory », *Comm. Math. Phys.* **84** (1982), no. 4, p. 483–503.

[MY93] S. McNamara & W. R. Young – « Kinetics of a one-dimensional granular medium in the quasielastic limit », *Phys. Fluids A* **5** (1993), no. 1, p. 34–45.

[Szn91] A.-S. Sznitman – « Topics in propagation of chaos », École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989. Lectures Notes in Math., vol 1464, Springer, Berlin, 1991, p. 165–251.

[Zhe95] W. A. Zheng – « Conditional propagation of chaos and a class of quasilinear PDE's », *Ann. Probab.* **23** (1995), no. 3, p. 1389–1413.

CHAPITRE 3

LOGARITHMIC SOBOLEV INEQUALITIES FOR SOME NONLINEAR PDE'S

3.1. Introduction

Let us introduce the first nonlinear PDE (in $\mathbb{R}^d$) we want to study. It is a nonlinear McKean-Vlasov PDE:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left[\nabla u + (u\nabla U + u\nabla W * u)\right], \\ u(0,\cdot) = u_0 , \end{cases} \tag{3.1}$$

where $*$ stands for the convolution and W is convex, even, with polynomial growth and U is uniformly convex (i.e. Hess $U(x) \geq \beta$ I for some $\beta > 0$). The solution of (3.1) can be interpreted as the law of the stochastic process $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ solution of

$$\begin{cases} d\overline{X}_t = \sqrt{2}\, dB_t - \nabla U(\overline{X}_t)\, dt - \nabla W * u_t(\overline{X}_t)\, dt , \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t) = u_t(x)\, dx , \\ u_0 \text{ smooth} \end{cases} \tag{3.2}$$

where $\mathcal{L}(\overline{X}_t)$ is the law of $\overline{X}_t$.

Remark 3.1.1. — *Let us motivate in few words the study of* (3.1). *Benedetto* et al *(see* [BCCP98]*) give a physical interpretation when*

$$d = 1\,, \quad U(x) = \beta\frac{x^2}{2} \quad \text{and} \quad W(x) = \lambda|x|^3 .$$

Equation (3.1) *is the homogeneous version of a transport equation in a thermal bath with temperature* $1/\beta$ *that can be derived from inelastic collisions:*

$$(\partial_t + v\partial_x)u(t,x,v) = \partial^2_{vv} + \partial_v[(\beta v + W' *_v u(t,x,v))u(t,x,v)]$$

where $*_v$ *stands for the convolution with respect to the velocity* v. *This kind of equations are called* kinetic equations for granular media.

The probabilistic approach of this type of equations is to replace the nonlinear process by a particle system in mean field interaction i.e. to replace, in Equation (3.2), u by the empirical measure of the particle system. This leads to the following

SDE in $\mathbb{R}^{dN}$:

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} dX_t^{i,N} = \sqrt{2}\, dB_t^i - \nabla U\left(X_t^{i,N}\right) dt - \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \nabla W\left(X_t^{i,N} - X_t^{j,N}\right) dt \\ \mathcal{L}(X_0^N) = u_0^{\otimes N} dx \quad \text{for} \quad i = 1, .., N \end{cases}$$

where $(B^i)_i$ are independent Brownian motions on $\mathbb{R}^d$. As it is expected, the particle system is a "good approximation" of the solution of Equation (3.2). The usual way to quantify this intuition is to prove the propagation of chaos property. In Section 3.3, we show that this property is uniform in time.

Theorem 3.1.2. — *There exists a K such that, for every $N \geq 1$,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(\left| X_t^{1,N} - \overline{X}_t^1 \right|^2 \right) \leq \frac{K}{N},$$

where $(\overline{X}^1)$ is solution of Equation (3.2) where the Brownian motion (B) is replaced by (B^1).

On the other hand, we present a new approach by the use of logarithmic Sobolev inequalities (Section 2 deals with the results needed in this paper concerning this topic). Along this paper, the strategy is to obtain, via the Bakry-Emery criterion, logarithmic Sobolev inequalities for the law of the particle systems with constant that do not depend on the size of systems. This provides good estimates in the limit $N \to \infty$. As a consequence, we derive the exponential rate for the convergence to equilibrium for the nonlinear PDE.

Theorem 3.1.3. — *There exists a constant K such that for every positive t,*

$$\|u_t - \overline{u}\|_1 \leq K\, e^{-\beta t/2}$$

where $\overline{u}$ is the unique solution of

$$\overline{u}(x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-U(x) - W * \overline{u}(x)\right)$$

with $Z = \displaystyle\int \exp\left(-U(x) - W * \overline{u}(x)\right) dx\,.$

At last we obtain confidence intervals for the convergence of the empirical measure at time t to $\overline{u}$: for every $r \geq 0$ and every function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ with Lipschitz (semi)norm bounded by 1, the probability

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{i,N}) - \int f(x)\overline{u}(x)\, dx \right| \geq r + \sqrt{\frac{K}{N}} + K e^{-\beta t} \right)$$

is bounded by

$$2\exp\left[-\frac{N\beta r^2}{2} \right].$$

These confidence intervals are a straightforward consequence of the phenomenon of the concentration of measure induced by the logarithmic Sobolev inequality.

Section 3.4 is dedicated to the study of the case $U = 0$ which has been investigated from the probabilistic point of view by Benachour *et al* (see [BRTV98, BRV98]). Let us mention that the trend to equilibrium for granular media is also investigated by Carrillo *et al* (see[CMV01]). They are only interested in the convergence for the nonlinear equation but their results are much more general.

Section 3.5 deals with the general case of McKean-Vlasov type equations i.e. the nonlinear diffusion is solution of

$$\left\{ \begin{array}{l} d\overline{X}_t = \sqrt{2}\sigma(\overline{X}_t, \kappa * u(t, \overline{X}_t))\, dB_t + b(\overline{X}_t, \kappa * u(t, \overline{X}_t))\, dt \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t) = u(t, dy) \\ \overline{X}_{t=0} = X_0. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

where σ, b and κ are smooth and bounded functions. In this case, the self-stabilizing phenomenon disappears but we still get estimates at time T.

3.2. Some classical and useful results

A probability measure μ on $\mathbb{R}^n$ satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant C if

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq C \int |\nabla f|^2\, d\mu \tag{3.5}$$

for all smooth enough functions f where

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) = \int f^2 \log f^2\, d\mu - \int f^2\, d\mu \log \int f^2\, d\mu\,.$$

Let us recall two consequences of this property for μ. First, for every $r \geq 0$, and every Lipschitz function f on $\mathbb{R}^n$ (equiped with the Euclidean topology) with

$$\|f\|_{Lip} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq 1\,,$$

one has

$$\mu(|f - \mathbb{E}_\mu(f)| \geq r) \leq 2e^{-r^2/C}\,.$$

This is the so-called concentration phenomenon, see [Led99].

Secondly, denote by $\mathrm{W}_\mathbf{2}(\mu, \nu)$ the Wasserstein distance with quadratic cost i.e.

$$\mathrm{W}_\mathbf{2}(\mu, \nu) = \sqrt{\inf \left\{ \iint \frac{1}{2}|x - y|^2 d\pi(x, y) \right\}}$$

where the infimum is running over all probability measure π on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ with respective marginals μ and ν. By the Monge-Kantorovitch representation (see [Rac91]), we have

$$\mathrm{W}_\mathbf{2}(\mu, \nu)^2 = \sup \left\{ \int g d\nu - \int f d\mu \right\}$$

where the supremum is running over all the bounded functions f and g such that

$$g(x) \leq f(y) + \frac{1}{2}|x - y|^2$$

for every $x, y \in \mathbb{R}^n$. Following [OV00], if μ is absolutely continuous and satisfies (3.5), then, for every probability measure ν absolutely continuous with respect to μ,

$$\mathrm{W}_2(\mu,\nu)^2 \leq \frac{C}{2}\mathrm{H}(\nu\,|\,\mu)$$

where H is the relative entropy:

$$\mathrm{H}(\nu\,|\,\mu) = \begin{cases} \displaystyle\int \log\frac{d\nu}{d\mu}\,d\nu = \int \frac{d\nu}{d\mu}\log\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu & \text{if } \nu \ll \mu \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Another approach of this theorem has been studied by Bobkov *et al* in [BGL01].

Consider now a diffusion process with infinitesimal generator $\mathbf{L}$ and semigroup $(\mathbf{P}_t)_t$. As usually, we associate to $\mathbf{L}$ its *carré du champ* $\mathbf{\Gamma}$ defined by

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}(fg) - f\mathbf{L}g - g\mathbf{L}f)$$

and the operator $\mathbf{\Gamma}_2$

$$\mathbf{\Gamma}_2(f) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}(\mathbf{\Gamma}f) - 2\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}f))\,.$$

The diffusion generator $\mathbf{L}$ satisfies a curvature-dimension inequality (with curvature ρ and dimension n) if for every smooth function f,

$$\mathbf{\Gamma}_2(f) \geq \rho\mathbf{\Gamma}(f) + \frac{1}{n}(\mathbf{L}f)^2\,.$$

In this paper, we only deal with the infinite dimensional case. A general study is performed in [BE85]. The curvature inequality provides logarithmic Sobolev inequalities : following [Bak97], for any $\rho \in \mathbb{R}$, the following properties are equivalent

- For every f, $\quad \mathbf{\Gamma}_2(f) \geq \rho\mathbf{\Gamma}(f)$
- For every f, $\quad \sqrt{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_t f)} \leq e^{-\rho t}\mathbf{P}_t\sqrt{\mathbf{\Gamma}f}$
- The probability measures $(\mathbf{P}_t(\cdot)(x))_x$ satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant
$$C_t = \frac{2}{\rho}\left(1 - e^{-\rho t}\right).$$

Besides, if ρ is positive, the last property remains true for the invariant measure μ with constant $2/\rho$. This provides an exponential rate for the ergodicity of the semigroup:

$$\mathrm{H}(\mathbf{P}_t\,|\,\mu) \leq Ke^{-2\rho t}.$$

3.3. Dissipative equations

3.3.1. The model. — Consider the nonlinear differential equation (3.1) in $\mathbb{R}^d$ where W is convex, even, with polynomial growth and U is uniformly convex (i.e. Hess $U(x) \geq \beta\,\mathrm{I}$ for some $\beta > 0$). The real γ is defined to be the largest real (nonnegative) satisfying Hess $W(x) \geq \gamma\,\mathrm{I}$.

Remark 3.3.1. — *In order to prove existence and uniqueness for Equation* (3.2), *it is possible to use the technics of* [BRTV98]. *In particular, notice that it can be rewritten as*

$$\left\{\begin{array}{l} d\overline{X}_t = \sqrt{2}\,dB_t - \nabla U(\overline{X}_t)\,dt - \nabla W_t(\overline{X}_t)\,dt\,, \\ \nabla W_t(x) = \mathbb{E}\big[\nabla W(x - \overline{X}_t)\big]\,, \\ u_0 \text{ smooth.} \end{array}\right. \tag{3.7}$$

One can prove first existence of u_t by a fixed point argument using the Wasserstein distance. Then, once u_t is known, strong uniqueness for $(\overline{X}_t)$ holds.

Consider now the two independent collections $(B^i_{\cdot})_{i\in\mathbb{N}}$ of independent Brownian motions and $(X^i_0)_{i\in\mathbb{N}}$ of independent r.v. with law u_0. The particle system associated to the nonlinear process is solution of

$$\left\{\begin{array}{rcl} dX^{i,N}_t &=& \sqrt{2}\,dB^i_t - \nabla U\big(X^{i,N}_t\big)\,dt \\ && \displaystyle -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\nabla W\big(X^{i,N}_t - X^{j,N}_t\big)\,dt \\ X^{i,N}_0) &=& X^i_0 \quad \text{for} \quad i = 1,..,N. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Remark 3.3.2. — *In what follows, $(\overline{X}^i_{\cdot})$ will stand for the solution of* (3.2) *where the Brownian motion $(B_{\cdot})$ is replaced by $(B^i_{\cdot})$ and $\overline{X}^i_0 = X^i_0$. The*

3.3.2. Uniform propagation of chaos. —

Theorem 3.3.3. — *Suppose that the forth moment of the initial measure u_0 is finite. Then, there exists a K such that, for every $N \geq 1$,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\left(\left|X^{1,N}_t - \overline{X}^1_t\right|^2\right) \leq \frac{K}{N} \tag{3.9}$$

and

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X^{1,N}_t - \overline{X}^1_t\right|^2\right) \leq K\frac{T}{N}.$$

Remark 3.3.4. — *The constant K depends on β, γ and on the p-th moment of u_0 for a power p that controls the growth of U and W.*

Proof of Theorem 3.3.3. — The proof is quite similar to the one performed by Benachour *et al* in [BRTV98]. Nevertheless the term "∇U"provides a better estimate in time. For every $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{aligned} X^{i,N}_t - \overline{X}^i_t &= X^{i,N}_s - \overline{X}^i_s - \int_s^t\Big(\nabla U(X^{i,N}_r) - \nabla U(\overline{X}^i_r)\Big)\,dr \\ &\quad -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_s^t\Big(\nabla W(X^{i,N}_r - X^{j,N}_r) - \nabla W * u_r(\overline{X}^i_r)\Big)\,dr. \end{aligned}$$

By Itô's formula,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\left|X_t^{i,N}-\overline{X}_t^i\right|^2-\sum_{i=1}^{N}\left|X_s^{i,N}-\overline{X}_s^i\right|^2 \\
&\qquad = -2\sum_{i=1}^{N}\int_s^t (X_r^{i,N}-\overline{X}_r^i)\cdot\Big(\nabla U(X_r^{i,N})-\nabla U(\overline{X}_r^i)\Big)\,dr \\
&\qquad\quad -\frac{2}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\int_s^t \rho_{ij}^{(1)}(r)\,dr
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

where

$$
\begin{aligned}
\rho_{ij}^{(1)}(r) &= \Big(X_r^{i,N}-\overline{X}_r^i\Big)\cdot\Big[\nabla W(X_r^{i,N}-X_r^{j,N})-\nabla W*u_r(\overline{X}_r^i)\Big] \\
&= \Big(X_r^{i,N}-\overline{X}_r^i\Big)\cdot\Big[\nabla W(X_r^{i,N}-X_r^{j,N})-\nabla W(\overline{X}_r^i-\overline{X}_r^j)\Big] \\
&\quad +\Big(X_r^{i,N}-\overline{X}_r^i\Big)\cdot\Big[\nabla W(\overline{X}_r^i-\overline{X}_r^j)-\nabla W*u_r(\overline{X}_r^i)\Big] \\
&= \rho_{ij}^{(2)}(r)+\rho_{ij}^{(3)}(r).
\end{aligned}
$$

The vector field ∇W is odd and satisfies

$$(\nabla W(x)-\nabla W(y))\cdot(x-y)\geq 0\,.$$

Then, the sum of $\rho_{ij}^{(2)}(r)$ and $\rho_{ji}^{(2)}(r)$ which is equal to

$$\Big[X_r^{i,N}-X_r^{j,N}-(\overline{X}_r^i-\overline{X}_r^j)\Big]\cdot\Big[\nabla W(X_r^{i,N}-X_r^{j,N})-\nabla W(\overline{X}_r^i-\overline{X}_r^j)\Big]$$

is non negative. As a consequence,

$$\sum_{i,j=1}^{N}\rho_{ij}^{(2)}(r)=\sum_{1\leq i<j\leq N}\rho_{ij}^{(2)}(r)+\rho_{ji}^{(2)}(r)\geq 0.$$

On the other hand, $-\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^N\rho_{ij}^{(3)}(r)\Big]$ is bounded (thanks to Cauchy-Schwarz inequality) by

$$\left(\mathbb{E}\left[\left|X_r^{i,N}-\overline{X}_r^i\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}(\theta_i(r))^{\frac{1}{2}}$$

where

$$\theta_i(r)=\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{N}\Big[\nabla W(\overline{X}_r^i-\overline{X}_r^j)-\nabla W*u_r(\overline{X}_r^i)\Big]\right|^2\right).$$

Then, we get

$$\theta_i(r)=\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}\big(|\xi_j(r)|^2\big)+2\sum_{1\leq j<k\leq N}\mathbb{E}(\xi_j(r)\cdot\xi_k(r)),$$

with the obvious notation

$$\xi_j(r)=\nabla W(\overline{X}_r^i-\overline{X}_r^j)-\nabla W*u_r(\overline{X}_r^i)$$

If j is not equal to k, one of them is not equal to i and then,

$$\mathbb{E}(\xi_j(r)\cdot\xi_k(r)) = 0 \text{ if } j\neq k$$

since the random variables $\overline{X}_r^{\cdot}$ are independent copies of $\overline{X}_r^1$ with density u_r. At last,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|\xi_j(r)|^2\big) &= \mathbb{E}\Big[\Big|\nabla W(\overline{X}_r^i-\overline{X}_r^j)-\nabla W * u_r(\overline{X}_r^i)\Big|^2\Big]\\
&\le \mathbb{E}\Big(\Big|\nabla W(\overline{X}_r^i-\overline{X}_r^j)\Big|^2\Big)\\
&\le K\,\mathbb{E}\Big[\Big|\overline{X}_r^i\Big|^{2p}\Big]+K\,\mathbb{E}\Big[\Big|\overline{X}_r^j\Big|^{2p}\Big]\\
&\le 2K\,M_{2p}.
\end{aligned}$$

We have established

$$-\mathbb{E}\Bigg[\sum_{j=1}^N \rho_{ij}^{(3)}(r)\Bigg]\le\sqrt{KN}\alpha(r)^{1/2}$$

where α is defined by

$$\alpha(t)=\mathbb{E}\Big[(X_t^{i,N}-\overline{X}_t^i)^2\Big]. \tag{3.11}$$

Let take the expectation of (3.10). Using the exchangeability of the marginals of the particle system, it comes

$$\alpha(t)\le\alpha(s)-2\beta\int_s^t\alpha(r)\,dr+\frac{2\lambda K}{\sqrt{N}}\int_s^t\alpha(r)^{1/2}\,dr. \tag{3.12}$$

This means that

$$\alpha'(t)\le -2\beta\,\alpha(t)+\frac{2\lambda K}{\sqrt{N}}\alpha(t)^{1/2}.$$

Gronwall lemma implies (since $\alpha(0)$ is 0) that

$$\alpha(t)^{1/2}\le\frac{\lambda K}{\beta\sqrt{N}}\big[1-e^{-\beta t}\big]$$

which is (3.9).

The second estimate in theorem 3.3.3 follows classically from (3.9) (see [BRTV98]). □

3.3.3. Curvature of the particle systems. — The main observation is that the infimum (over N) of the curvature of the particle system is positive.

Lemma 3.3.5. — *The curvature of the particle system of size N is bounded below by β.*

Proof. — We first study the infinitesimal generator $\mathbf{L}^N$ of the N-particle system which is defined by

$$\mathbf{L}^N F=\mathbf{\Delta}F-\mathbf{\nabla}\Psi\cdot\mathbf{\nabla}F$$

where

$$(\boldsymbol{\nabla}\Psi)_i(x) = \nabla U(x_i) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \nabla W(x_i - x_j).$$

for $i = 1, \ldots, N$.

Remark 3.3.6. — *The bold symbols $\boldsymbol{\Delta}$ and $\boldsymbol{\nabla}$ stand for differential operators on $\mathbb{R}^{dN}$ where Δ and ∇ respectively are the Laplacian and the gradient operators on $\mathbb{R}^d$.*

In order to apply the $\boldsymbol{\Gamma}_2$ criterion, we have to show that

$$\mathbf{Hess}\ \Psi \geq \beta I_{dN}\,.$$

Reasoning with blocks of size $d \times d$, one can show that

$$(\mathbf{Hess}\ \Psi)_{ii} = \text{Hess}\ U(x_i) + \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} \text{Hess}\ W(x_i - x_j) \quad \text{for } i = 1, \ldots, N$$

and

$$(\mathbf{Hess}\ \Psi)_{ij} = -\frac{1}{N}\text{Hess}\ W(x_i - x_j) \leq 0 \quad \text{for } i,j = 1, \ldots, N \text{ and } i \neq j\,.$$

The result follows from the simple fact that the diagonal of $\mathbf{Hess}\ \Psi$ is strictly dominating. In a more precise way,

$$(\mathbf{Hess}\ \Psi)_{ii} \geq \beta - \sum_{j\neq i} (\mathbf{Hess}\ \Psi)_{ij} \quad \text{for } i = 1, \ldots, N$$

implies that the eigenvalues of $\mathbf{Hess}\ \Psi$ are greater or equal than β. One can notice that β is an eigenvalues of $\mathbf{Hess}\ \Psi$ with eigenvector $(1, \ldots, 1)$. □

This ensures that the semigroup of the N-particle system at time t (i.e. the law of X_t^N starting at $x \in \mathbb{R}^{dN}$) satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant

$$C_t = \frac{2}{\beta}\big(1 - e^{-2\beta t}\big).$$

One can formulate an analogous result for more general initial conditions.

Corollary 3.3.7. — *Let $\mathbf{P}_t$ be a diffusion semigroup with curvature ρ and a probability measure $u_0(dy)$ satisfying a logarithmic Sobolev inequality with constant c_0. Then the law of X_t (with $\mathcal{L}(X_0) = u_0$) satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant*

$$D_t = \frac{2}{\rho}\big(1 - e^{-2\rho t}\big) + c_0 e^{-2\rho t}.$$

Proof. — Let f by a smooth function. It is clear that

$$\text{Ent}_{\mathbf{P}_t(\cdot)(x)du_0(x)}\big(f^2\big) = \int \text{Ent}_{\mathbf{P}_t(\cdot)(x)}\big(f^2\big)du_0(x) + \text{Ent}_{u_0}\big(\mathbf{P}_t(f^2)\big).$$

The logarithmic Sobolev inequality for the semigroup leads to

$$\int \text{Ent}_{\mathbf{P}_t(\cdot)(x)}\big(f^2\big)du_0(x) \leq \frac{2}{\rho}\big(1 - e^{-2\rho t}\big)\int \mathbf{P}_t(\boldsymbol{\Gamma}(f))(x)du_0(x).$$

On the other hand, since u_0 satisfies a logarithmic Sobolev inequality,

$$\mathrm{Ent}_{u_0}\big(\mathbf{P}_t(f^2)\big) = \mathrm{Ent}_{u_0}\Big(\Big(\sqrt{\mathbf{P}_t(f^2)}^{\,2}\Big)\Big)$$

is bounded by

$$c_0 \int \mathbf{\Gamma}\Big(\sqrt{\mathbf{P}_t(f^2)}\Big) = \frac{c_0}{4}\int \frac{\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}_t(f^2)(x)}{\mathbf{P}_t(f^2)(x)}\, du_0(x)\,.$$

Now,

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}_t(f^2)} &\leq e^{-\rho t}\mathbf{P}_t\sqrt{\mathbf{\Gamma}(f^2)} = 2e^{-\rho t}\mathbf{P}_t\Big(f\sqrt{\mathbf{\Gamma} f}\Big)\\ &\leq 2e^{-\rho t}\big(\mathbf{P}_t(f^2)\big)^{1/2}\big(\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma} f)\big)^{1/2}\end{aligned}$$

by the commutation relation and Cauchy-Schwarz inequality. □

As a consequence, the law of X_t^N is concentrated around its mean as a Gaussian variable with variance $D_t/2$. This provides confidence intervals for the convergence of the empirical measure: for all g from $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$ with Lipschitz norm less than 1, we have for every $r \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_t^{i,N}) - \mathbb{E}\big(g(X_t^{1,N})\big)\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{D_t}\right).$$

This is just a consequence of the following remark.

Remark 3.3.8. — *If the Lipschitz norm of g from $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$ is bounded by 1, then the Lipschitz norm of*

$$G(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i)$$

from $\mathbb{R}^{dN}$ in $\mathbb{R}$ is bounded by $1/\sqrt{N}$.

***Corollary 3.3.9* (Concentration)**. — *Suppose that $u_0(dy)$ satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant c_0. For all g from $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$ with Lipschitz norm less than 1, we have*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_t^{i,N}) - \int g(y)u(t,y)\,dy\right| \geq r + \sqrt{\frac{K}{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{D_t}\right).$$

for $t > 0$, $N \in \mathbb{N}$ and $r \geq 0$.

Remark 3.3.10. — *It is also possible to establish the concentration property assuming that u_0 is compactly supported (even if u_0 does not satisfy a logarithmic Sobolev inequality).*

3.3.4. Curvature of the nonlinear semigroup. — Keeping in mind that, once its law at time t is known for all t, the nonlinear process is an inhomogeneous Markov process with generator

$$\overline{\mathbf{L}}_s f = \Delta f - [\nabla U + \nabla W * u_s] \cdot \nabla f\,,$$

it is possible to establish a logarithmic Sobolev inequality for the nonlinear semigroup. Let us sketch the adaptation to the inhomogeneous case of the proof presented in [Bak97]. First, define the operator *carré du champ* at time s by

$$\overline{\mathbf{\Gamma}}(s)(f,g) = \frac{1}{2}\big[\overline{\mathbf{L}}_s(fg) - f\overline{\mathbf{L}}_s g - g\overline{\mathbf{L}}_s f\big]$$

and the operator $\overline{\mathbf{\Gamma_2}}(s)$ by

$$\overline{\mathbf{\Gamma_2}}(s)(f,g) = \frac{1}{2}\big[\overline{\mathbf{L}}_s(\overline{\mathbf{\Gamma}}_s(f,g)) - \overline{\mathbf{\Gamma}}(s)(f,\overline{\mathbf{L}}_s g) - \overline{\mathbf{\Gamma}}(s)(g,\overline{\mathbf{L}}_s f)\big].$$

Remark 3.3.11. — *For simplicity, $\overline{\mathbf{\Gamma}}(f)$, respectively $\overline{\mathbf{\Gamma_2}}(f)$, stands for $\overline{\mathbf{\Gamma}}(f,f)$, respectively $\overline{\mathbf{\Gamma_2}}(f,f)$.*

In what follows, we assume that $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ does not depend on time s. This is implied by the fact that it is true for the diffusive coefficients of $\overline{\mathbf{L}}_s$ and it is true for the granular media equation.

We will say that $(\overline{\mathbf{L}}_s)_s$ satisfies the Bakry-Emery criterion if for every s,

$$\overline{\mathbf{\Gamma_2}}(s)(f) \geq \rho\overline{\mathbf{\Gamma}}(f). \tag{3.13}$$

In particular, for the solution of (3.2), a straightforward computation leads to

$$\overline{\mathbf{\Gamma}}(f) = |\nabla f|^2\,,$$

$$\overline{\mathbf{\Gamma_2}}(s)(f) = \|\text{Hess } f\|_2^2 + (\text{Hess } U)(\nabla f, \nabla f) + (\text{Hess } W * u_s)(\nabla f, \nabla f)\,,$$

where $(\text{Hess } U)(X,Y)$ stands for the bilinear form associated to the Hessian matrix of U. Then, (3.13) is true for $\beta + \gamma$.

The consequence of the curvature inequality (3.13) is the the same as in the homogeneous case.

Proposition 3.3.12. — *The following properties are equivalent*
(i) For every s and f, $\quad\overline{\mathbf{\Gamma_2}}(s)(f) \geq \rho\overline{\mathbf{\Gamma}}(f)$
(ii) For every u,t and f, $\quad\sqrt{\overline{\mathbf{\Gamma}}(\overline{\mathbf{P}}_{u,t} f)} \leq e^{-\rho(t-u)}\overline{\mathbf{P}}_{u,t}\sqrt{\overline{\mathbf{\Gamma}} f}$
(iii) The probability measures $\big(\overline{\mathbf{P}}_{u,t}(\cdot)(x)\big)_x$ satisfy a logarithmic Sobolev inequality with constant

$$\overline{C}_{u,t} = \overline{C}_{t-u} = \frac{2}{\rho}\big(1 - e^{-2\rho(t-u)}\big).$$

We are now able to improve the propagation of result (3.9). Let us define $u_t^{(k,N)}$ as the density of the law of k particles among N at time t and $u_t^{(N)}$ will stands for $u_t^{(N,N)}$.

Proposition 3.3.13. — *For $k \le N$, we have*

$$\sup_{t\ge 0} \|u_t^{(k,N)} - u_t^{\otimes k}\|_1 \le K\sqrt{\frac{k}{N}}\,.$$

Proof. — The first point is to obtain

$$\left\|u_t^{(k,N)} - u_t^{\otimes k}\right\|_1 \le 2\sqrt{\frac{k}{N}}\sqrt{\mathrm{H}\left(u_t^{(N)} \,|\, u_t^{\otimes N}\right)}.$$

This easily follows from the classical relation established by Csiszár and Kullback (see [Pin64])

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \le \sqrt{2\mathrm{H}(\mu \,|\, \nu)} \tag{3.14}$$

(where $\|\,.\,\|_{TV}$ stands for the total variation norm) and the following one due to Csiszar (see [Csi84]).

Lemma 3.3.14. — *Let $(E,\mathcal{E})$ a measurable space and $\mu^{(N)}$ be an exchangeable probability measure on a product space E^N such that $\mu^{(N)} \ll \nu^{\otimes N}$ for some probability measure ν on E. Denote by $\mu^{(k,N)}$ the marginal on the first k coordinates then, for every $k \le N$, we have*

$$H\big(\mu^{(k,N)} \,|\, \nu^{\otimes k}\big) \le \frac{2k}{N} H\big(\mu^{(N)} \,|\, \nu^{\otimes N}\big)\,. \tag{3.15}$$

Now let us study the behavior of F defined by

$$F(t) = \mathrm{H}\left(u_t^{(N)} \,|\, u_t^{\otimes N}\right).$$

Lemma 3.3.15. — *The derivative of F is given by*

$$\begin{aligned} F'(t) \;&=\; -\int \left| \frac{\boldsymbol{\nabla} u_t^{(N)}}{u_t^{(N)}} - \frac{\boldsymbol{\nabla} u_t^{\otimes N}}{u_t^{\otimes N}} \right|^2 u_t^{(N)} \\ &\qquad - \int \left[\frac{\boldsymbol{\nabla} u_t^{(N)}}{u_t^{(N)}} - \frac{\boldsymbol{\nabla} u_t^{\otimes N}}{u_t^{\otimes N}} \right] [\boldsymbol{\nabla}\Psi_N - \boldsymbol{\nabla}\Psi_t] u_t^{(N)} \end{aligned}$$

where

$$(\boldsymbol{\nabla}\Psi_N)_i = \nabla U(x_i) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \nabla W(x_i - x_j)$$

and

$$(\boldsymbol{\nabla}\Psi_t)_i = \nabla U(x_i) + \nabla W * u_t(x_i).$$

The proof of this result follows from a straightforward computation and an integration by parts. By the basic property of any bilinear form:

$$2\langle a,b\rangle \le \langle a,a\rangle + \langle b,b\rangle$$

we get

$$F'(t) \le -\frac{1}{2}\int \left| \frac{\boldsymbol{\nabla} u_t^{(N)}}{u_t^{(N)}} - \frac{\boldsymbol{\nabla} u_t^{\otimes N}}{u_t^{\otimes N}} \right|^2 u_t^{(N)} + \frac{1}{2}\int |\boldsymbol{\nabla}\Psi_N - \boldsymbol{\nabla}\Psi_t|^2 u_t^{(N)}.$$

At last, u_t satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant $\overline{C_t}$. By tensorisation (see [Gro75]), it is still true (with the same constant) for $u_t^{\otimes N}$. As a consequence, we obtain

$$F(t) \leq \frac{2}{\beta+\gamma} \int \left| \frac{\nabla u_t^{(N)}}{u_t^{(N)}} - \frac{\nabla u_t^{\otimes N}}{u_t^{\otimes N}} \right|^2 u_t^{(N)}.$$

Then the function F satisfies the following differential inequation:

$$F'(t) \leq -\frac{\beta+\gamma}{4} F(t) + \frac{1}{2} \int |\nabla \Psi_N - \nabla \Psi_t|^2 u_t^{(N)}.$$

By the result (3.9), the polynomial growth of U and W and the uniform control of the moments of u_s for s in $[0,+\infty)$, we get

$$\int |\nabla \Psi_N - \nabla \Psi_t|^2 u_t^{(N)} \leq K.$$

Then, one can use Gronwall lemma to obtain

$$F(t) \leq K$$

which achieves the proof. □

3.3.5. Ergodicity. — A straightforward adaptation of Theorem 2.2 in [BCCP98] leads to the following qualitative result.

Theorem 3.3.16. — *There exists a unique $\overline{u}$ such that for any u_0 we have*

$$\lim_{t\to\infty} \|u_t - \overline{u}\|_1 = 0. \tag{3.16}$$

The best way to characterize the stationary measure $\overline{u}$ is to see it as the unique minimum of the free energy functional defined by:

$$\begin{aligned} \eta(f) &= \int f(x) \log f(x)\, dx \\ &\quad + \int U(x) f(x)\, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint W(x-y) f(x) f(y)\, dx\, dy\,. \end{aligned}$$

It is now possible to give an exponential rate of convergence in Theorem 3.3.16. First, we need a preliminary proposition which deals with the convergence to equilibrium for the particle system.

Proposition 3.3.17. — *For all u_0, there exists a constant K such that for all N in $\mathbb{N}$ and $t \geq 0$,*

$$\mathrm{H}\big(u_t^{(N)} \,|\, \mu_N\big) \leq K N e^{-2\beta t}$$

where μ_N is the probability measure with density

$$\frac{1}{Z_N} \exp\left(-\sum_{i=1}^N U(x_i) - \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N W(x_i - x_j) \right). \tag{3.17}$$

Proof. — It is well-known (see [Bak94]) that

$$\mathrm{H}\big(u_t^{(N)} \mid \mu_N\big) \le \mathrm{H}\big(u_0^{\otimes N} \mid \mu_N\big)e^{-2\beta t}.$$

On the other hand, using the explicit expression (3.17), we have

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\big(u_0^{\otimes N} \mid \mu_N\big) &= \int u_0^{\otimes N} \log f_0^{\otimes N} - \int u_0^{\otimes N} \log \mu_N \\
&= N \int u_0 \log u_0 + \int u_0^{\otimes N} \Psi_N + \log Z_N \\
&\le K\,N + K \sum_{i=1}^{N} \int u_0^{\otimes N} P(|x_1|) \\
&\quad + N \log \left(\int e^{-U(x_1)}\, dx_1 \right),
\end{aligned}$$

where P is a polynomial that dominates the growth of U and W. Then the result follows. □

Denote by $\mu_{1,N}$ the first marginal of μ_N. Then, for every integer N, we have by Propositions 3.3.13 and 3.3.17,

$$\begin{aligned}
\|u_t - \overline{u}\|_1 &\le \big\|u_t - u_t^{(1,N)}\big\|_1 + \big\|u_t^{(1,N)} - \mu_{1,N}\big\|_1 + \|\mu_{1,N} - \overline{u}\|_1 \\
&\le \frac{K}{\sqrt{N}} + K\sqrt{N} e^{-\beta t}.
\end{aligned}$$

Taking N of the order of $e^{\beta t/2}$, we have established the following result.

Theorem 3.3.18. — *Let $\mathcal{P}_c$, with $c > 0$, stands for the set of the probabilty density f such that*

$$\int f(x) \log f(x)\, dx + \int |x|^4 f(x)\, dx \le c.$$

Then, there exists a constant K (depending on c) such that for every positive t and u_0 in $\mathcal{P}_c$,

$$\|u_t - \overline{u}\|_1 \le K\, e^{-\beta t/2}.$$

Remark 3.3.19. — *This result is a somehow disappointing since the rate of convergence for the nonlinear process is not the one of the particle system.*

Let us show that the hope in Remark 3.3.19 is natural in some sense.

Lemma 3.3.20. — *Let μ and ν be two probability measures on $\mathbb{R}^n$. Then, for every probability measures μ_N and ν_N (on $\mathbb{R}^{Nn}$) with respective marginals $\mu, \ldots, \mu$ and $\nu, \ldots, \nu$,*

$$W_{\mathbf{2}}(\mu_N, \nu_N)^2 \ge N\ W_{\mathbf{2}}(\mu, \nu)^2.$$

This lemma implies that

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(u^{(1,N)}, \mu_{1,N}) \le \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{W}_{\mathbf{2}}\Big(u_t^{(N)}, \mu_N\Big).$$

Besides, as μ_N satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant $2/\beta$, μ_N satisfies a transportation inequality for the quadratic cost: for every measure ν_N on $\mathbb{R}^{dN}$,

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(\nu_N, \mu_N)^2 \leq \frac{1}{\beta} H(\nu_N \mid \mu_N).$$

Then we get

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(u_t, \overline{u}) &\leq \mathrm{W}_{\mathbf{2}}\left(u_t, u_t^{(1,N)}\right) + \mathrm{W}_{\mathbf{2}}\left(u_t^{(1,N)}, \mu_{1,N}\right) + \mathrm{W}_{\mathbf{2}}(\mu_{1,N}, \overline{u}) \\
&\leq 2 \sup_{t \geq 0} \left(\mathbb{E}\left[\left|X_t^{1,N} - \overline{X}_t^1\right|^2\right]\right)^{1/2} + \sqrt{\frac{K}{N} H\left(u_t^{(N)} \mid \mu_N\right)} \\
&\leq \frac{K}{\sqrt{N}} + K e^{-\beta t}.
\end{aligned}$$

Let N goes to infinity to get the following result.

Proposition 3.3.21. —

$$W_{\mathbf{2}}(u_t, \overline{u}) \leq K e^{-\beta t}.$$

This is the same rate as in the linear case. This result provides efficient exact confidence intervals for the convergence of the empirical measure at time t to the invariant measure $\overline{u}$.

Proposition 3.3.22. — *For every $r \geq 0$, the probability*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(X_t^{i,N}) - \int f(x) \overline{u}(x)\, dx\right| \geq r + \sqrt{\frac{K}{N}} + K e^{-\beta t}\right)$$

is bounded by $2 \exp\left[-\dfrac{N r^2}{D_t}\right]$.

3.4. Self-stabilizing process with non negative curvature

In this section, we study the case where $U = 0$ in Equation (3.2). This is the equation studied in [BRTV98, BRV98]. Let us describe quickly the results they have established. There is propagation of chaos and more precisely, there exists a $K > 0$ such that

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \mathbb{E}\left[\left|X_s^{i,N} - \overline{X}_s^i\right|^2\right] \leq K \frac{T^2}{N}. \tag{3.18}$$

They also establish the propagation of chaos at the level of processes.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left|X_s^{i,N} - \overline{X}_s^i\right|^2\right] \leq \frac{K_T}{N}.$$

Remark 3.4.1. — *Notice that, once again, the dependence with respect to time in Equation* (3.18) *is of the order of the square of the log-Sobolev constant at time t.*

3.4.1. The Ricci curvature of the particle system. — We first study the N-particle system. Its curvature is equal to 0 for every N: the vector $(1,\ldots,1)$ belongs to the kernel of the Hessian of the potential. Nevertheless, we still have a result at time t. In particular, we have that, for every T, N and $r \geq 0$,

$$\sup_{t\leq T}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{i,N}) - \mathbb{E}\Big[f(\overline{X}_t^i)\Big]\right| \geq r + t\sqrt{\frac{K}{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{2T}\right)$$

where K is the constant in (3.18).

We have now to present another result established in [BRV98]. They show that there exists a constant K such that for every function f of uniform norm and of Lipschitz seminorm bounded by 1,

$$\left|\mathbb{E}\Big[f(\overline{X}_t^i)\Big] - \int f(y)u(y)\,dy\right| \leq \frac{K}{(1+t)^2}.$$

Then, we have a concentration inequality.

Theorem 3.4.2. — *For every $r \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{i,N}) - \int f(y)u(y)\,dy\right| \geq r + T\sqrt{\frac{K}{N}} + \frac{K}{(1+T)^2}\right) leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{2T}\right)$$

where u is the solution

$$\overline{u}(x) = \frac{1}{Z}\exp\left(-W * \overline{u}(x)\right)$$

with $Z = \displaystyle\int \exp\left(-W * \overline{u}(x)\right) dx$.

3.4.2. Curvature of the nonlinear process. — As in section 3.3.4, we can associate to the nonlinear process a curvature which is bounded below by $\gamma > 0$. Then, we still have the propagation of chaos for blocks of size $o(N)$.

Proposition 3.4.3. — *For $k \leq N$, we have*

$$\sup_{t\geq 0}\|u_t^{(k,N)} - u_t^{\otimes k}\|_1 \leq K\sqrt{\frac{k}{N}}\,.$$

3.5. The general case

This part is dedicated to the study of the generic model of nonlinear diffusions that can be approximated by particles in mean field interaction. The beginning consists in a straightforward adjustment of the classical method presented by Sznitman in [Szn91].

3.5.1. The model. — Let us start with Borel-measurable functions $b_i(x,y)$ and $\sigma_{ij}(x,y)$, $1 \le i,j \le d$, from $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ to $\mathbb{R}^d$ and κ from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Let $(B_t)_{t\ge 0}$ be a d-dimensional Brownian motion. We study the following equation:

$$\left\{\begin{array}{l} d\overline{X}_t = \sqrt{2}\sigma(\overline{X}_t, \kappa * u(t,\overline{X}_t))\, dB_t + b(\overline{X}_t, \kappa * u(t,\overline{X}_t))\, dt \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t) = u(t,dy) \\ \overline{X}_{t=0} = X_0. \end{array}\right. \tag{3.19}$$

The density of a solution at time t is known to be a weak solution of:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(s,x) &= \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[a_{ij}(x,\kappa * u(s,x))u(s,x)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(x,\kappa * u(s,x))u(s,x)] \end{aligned}$$

where a is equal to $\sigma\sigma^*$.

Theorem 3.5.1. — *If σ, b and κ are bounded and globally Lipschitz functions, strong existence and uniqueness hold for equation* (3.19).

3.5.2. Convergence of the associated particle system. — Let $(B^i)_{i\in\mathbb{N}}$ be independent Brownian motions in $\mathbb{R}^d$. The interacting particle system associated to (3.19) is the solution of

$$\left\{\begin{array}{l} dX_t^{i,N} = \sqrt{2}\sigma(X_s^{i,N}, \kappa * \Pi_s^N(X_s^{i,N}))\, dB_s^i \\ \qquad\qquad +b(X_s^{i,N}, \kappa * \Pi_s^N(X_s^{i,N}))\, ds \text{ for } i = 1, ..., N \\ X_0^{i,N} = X_0^i \end{array}\right. \tag{3.20}$$

where Π_t^N is the empirical measure of the system at time t i.e. it is equal to

$$\Pi_t^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} \delta_{X_t^{k,N}}.$$

How it is expected, the propagation of chaos holds. Indeed we have the following estimate:

Theorem 3.5.2. — *If σ and b are bounded and globally Lipschitz and $\kappa \in \mathcal{C}_b^1$ (i.e. both κ and* Jac *κ are bounded), then, for all $T \in \mathbb{R}^+$, there exists a $K_T \in \mathbb{R}$ such that for all i and N in $\mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|X_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\right|^2\right] \le \frac{K_T}{N}. \tag{3.21}$$

Remark 3.5.3. — *It can be shown first that for some K'_T,*

$$\sup_{t\le T}\left(\mathbb{E}\left[\left|X_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\right|^2\right]\right)^{1/2} \le \frac{K'_T}{\sqrt{N}}. \tag{3.22}$$

Once again, K'_T is of the order of $\exp(KT)$ *like the Log-Sobolev constant C_T of the particle system at time T (see section 3.5.3).*

3.5.2.1. *An improvement in a special case.* — In this section, we will suppose that σ is equal to I. Then, it is still true that the nonlinear process has a bounded-below (in $\mathbb{R}$) curvature. The its law at time t satisfies a logarithmic Sobolev inequality. This ensures that, for $k \leq N$, we have

$$\sup_{t\leq T} \|u_t^{(k,N)} - u_t^{\otimes k}\|_1 \leq K_T\sqrt{\frac{k}{N}}\,.$$

In fact, it is possible to get a best estimate (at the level of processes). Following a suggestion of Professor Del Moral we use a method developed by Benarous and Zeitouni (see [BAZ99]) in an abstract framework. Nevertheless our case is simpler because we already have established Theorem 3.5.2. Let us start with few notations:

- $\mathbb{P}_T^N$ stands for the law of $(X_t^N)_{0\leq t\leq T} = \big((X_t^{1,N},...,X_t^{N,N})\big)_{0\leq t\leq T}$ the particle system until time T,
- $\mathbb{P}_T^{k,N}$ denotes the law of $\Big((X_t^{1,N},...,X_t^{k,N})\Big)_{0\leq t\leq T}$. By exchangeabilty, the k-marginals of $\mathbb{P}_T^N$ do not depend on the choice of coordinates,
- let $\overline{\mathbb{P}}_T$ be the law until time T of the nonlinear process solution of (3.19).

The key point is that we are able to show that the relative entropy $\mathrm{H}\Big(\mathbb{P}_T^N \,|\, \overline{\mathbb{P}}_T^{\otimes N}\Big)$ is bounded in N.

Proposition 3.5.4. — *There exists a constant K_T such that for all N,*

$$\mathrm{H}\Big(\mathbb{P}_T^N \,|\, \overline{\mathbb{P}}_T^{\otimes N}\Big) \leq K_T.$$

Proof. — By Girsanov theorem, $\mathbb{P}_T^N$ has a density with respect to $\overline{\mathbb{P}}^{\otimes N}$ given by

$$\frac{d\mathbb{P}_T^N}{d\overline{\mathbb{P}}^{\otimes N}}(Y) = \exp(H_T^N)$$

where

$$\begin{aligned} H_T^N \;=\; & \sum_{i=1}^N \int_0^T \left[b(Y_s^i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \kappa(Y_s^i - Y_s^j)) - b(Y_s^i, \kappa * u_s(Y_s^i)) \right] dB_s^i \\ & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^T \left[b(Y_s^i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \kappa(Y_s^i - Y_s^j)) - b(Y_s^i, \kappa * u_s(Y_s^i)) \right]^2 ds. \end{aligned}$$

Under the measure $\overline{\mathbb{P}}^{\otimes N}$, $((B_t^i)_{1\leq i\leq N})_{0\leq t\leq T}$ is a N-dimensional Brownian motion and $\Big((\overline{B}_t^i)_{1\leq i\leq N}\Big)_{0\leq t\leq T}$ defined by

$$\overline{B}_t^i = B_t^i - \int_0^T \left[b(Y_s^i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \kappa(Y_s^i - Y_s^j)) - b(Y_s^i, \kappa * u_s(Y_s^i)) \right] ds$$

is a N-dimensional Brownian motion under $\mathbb{P}_T^N$. Then it follows from (3.6)

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\left(\mathbb{P}_T^N \mid \overline{\mathbb{P}}^{\otimes N}\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T^N}\left[\log\left(\frac{d\mathbb{P}_T^N}{d\overline{\mathbb{P}}^{\otimes N}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\int_0^T \left[b(X_s^{i,N}, \kappa * \Pi_s^N(X_s^{i,N})) - b\big(X_s^{i,N}, \kappa * u_s(X_s^{i,N})\big)\right]^2 ds \\
&\leq \frac{K}{2}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\int_0^T \left[\left|\kappa * \Pi_s^N(X_s^{i,N}) - \kappa * u_s(X_s^{i,N})\right|^2\right] ds \\
&\leq \frac{K}{2N}\sum_{i,j=1}^N \int_0^T \mathbb{E}\left[\left|\kappa(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) - \kappa * u_s(X_s^{i,N})\right|^2\right] ds.
\end{aligned}$$

We write

$$\begin{aligned}
\kappa(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) - \kappa * u_s(X_s^{i,N}) \quad = \quad & \kappa(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) - \kappa(X_s^{i,N} - \overline{X}_s^j) \\
& + \kappa(X_s^{i,N} - \overline{X}_s^j) - \kappa(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j) \\
& + \kappa(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j) - \kappa * u_s(\overline{X}_s^i) \\
& + \kappa * u_s(\overline{X}_s^i) - \kappa * u_s(X_s^{i,N})
\end{aligned}$$

and get, by Theorem 3.5.2,

$$\mathbb{E}\left[\left|\kappa(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) - \kappa * u_s(X_s^{i,N})\right|^2\right] \leq \frac{K_T}{N}$$

which achieves the proof. □

Now we just have to use (3.15) and the Csiszár and Kullback inequality (3.14) to establish a strong convergence estimation.

Theorem 3.5.5. — *For all T and N, there exists a constant K_T such that, for all $k \leq N$,*

$$\left\|\mathbb{P}_T^{k,N} - \overline{\mathbb{P}}_T^{\otimes k}\right\|_{TV} \leq K_T\sqrt{\frac{k}{N}}.$$

This implies a strong version of propagation of chaos for blocks of size $o(N)$.

3.5.3. Concentration of the empirical measure. — We now want to establish that the particle system (in the generic case) has a bounded-below curvature. This is much more complicated than in the case where σ is equal to I. Indeed, the second order part of the infinitesimal generator equips $\mathbb{R}^{dN}$ with a Riemannian metric which changes the notion of gradient.

3.5.3.1. *Control of the Ricci curvature.* — For simplicity's sake, we will suppose, in this section, $d = 1$. The case $d \geq 2$ can be treated by the same way but with complicated notations. In Remark 3.5.9, we sketch the changes that occur when d is greater than 2. We treat here the case of Equation (3.19). An advanced study of

Riemannian geometry can be found in [GHL90] but let us try to describe the setting in few words. Consider the differential operator L on $\mathbb{R}^N$ defined by

$$L = \sum_{i,j=1}^{N} g^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} h_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Its second order part equips $\mathbb{R}^N$ with an intrinsic metric g which depends on $x \in \mathbb{R}^N$ and which is characterized by the matrix (g_{ij}) (the inverse of (g^{ij})). The geometry of $(\mathbb{R}^N, g)$ is quite different from the usual one and it appears a curvature. We now show how to control Ricci curvature of the differential operators L^N associated to (3.20) and defined by

$$L^N = \sum_{i=1}^{N} g^i(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.23}$$

where

$$g^i(x) = a\left(x_i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\kappa(x_i - x_j)\right)\ ,\ g_i(x) = \frac{1}{g^i(x)} \tag{3.24}$$

and

$$b_i(x) = b\left(x_i, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\kappa(x_i - x_j)\right).$$

Now let us recall the general definition of the Ricci curvature.

Definition 3.5.6. — *Let us define*

1. *Christophel symbols for $i, j, k = 1, ..., N$:*

$$\Gamma^j_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} g^{ip}\left(\frac{\partial g_{pi}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_p}\right);$$

2. *the Riemann curvature tensor $\left(R^i_{qkl}\right)$ where*

$$R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x_k} + \sum_{p=1}^{N}\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk} - \sum_{p=1}^{N}\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql};$$

3. *the Ricci curvature tensor (R_{ql}) where*

$$R_{ql} = \sum_{i=1}^{N} R^i_{qil};$$

4. *the drift tensor (m_{ij}) where*

$$M_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i b_j + \nabla_j b_i)\ \text{où}\ \nabla_i b_j = \frac{\partial b_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{N}\Gamma^j_{ki} b_k.$$

In our context, the matrix (G_{ij}) is diagonal and then many terms in the previous definitions are equal to 0. For example, Γ^j_{ki} is equal to 0 as soon as the three index are different. By a straightforward computation we have the explicit expression of the Ricci and drift tensors.

Lemma 3.5.7. — *The entries of Ricci tensor are*

$$\begin{aligned} R_{lq} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_q}\log\frac{g_1 \ldots g_N}{g_l g_q} + \frac{1}{4}\sum_{i\neq q,l}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\log g_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_q}\log g_i\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}\frac{\partial \log g_q}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_q}\log\frac{g_1\ldots g_N}{g_l g_q} - \frac{1}{4}\frac{\partial \log g_l}{\partial x_q}\frac{\partial}{\partial x_l}\log\frac{g_1\ldots g_N}{g_l g_q} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} R_{qq} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_q^2}\log\frac{g_1\ldots g_N}{g_q} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq q} g^i \frac{\partial^2 g_q}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq q}\frac{\partial g^i}{\partial x_i}\frac{\partial g_q}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_i \left(\frac{\partial \log g_i}{\partial x_q}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_{i\neq q} g_q g^i \left(\frac{\partial \log g_q}{\partial x_i}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}\sum_i g_q g^i \left(\frac{\partial \log g_q}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \log(g_1\ldots g_N)}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

Moreover, the entries of the drift tensor have the following form:

$$M_{ii} = \nabla_i b_i = \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \kappa'(x_k - x_i)\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \frac{\partial \log g_i}{\partial x_k}$$

et

$$M_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} + \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\right) + \left(1 - g_i g^j\right)\frac{\partial \log g_i}{\partial x_j} b_i + \left(1 - g_j g^i\right)\frac{\partial \log g_j}{\partial x_i} b_j.$$

We have now to control the spectrum of the matrix T, equal to $R - M$.

Proposition 3.5.8. — *If there exist a c such that $1/c \leq a(x,y) \leq c$ and if the first (resp the first and second) derivatives of b (resp a) are bounded by c, the spectrum of T is uniformly bounded (above and below) in $N \in \mathbb{N}$ by a real number ρ.*

Proof. — By Gershgorin-Haddamard Theorem (see [Gri90]), if λ is an eigenvalue of T,

$$|\lambda| \leq \max_{1\leq i\leq N}\left(\sum_{j=1}^N |T_{ij}|\right).$$

We are going to show that, under the assumptions of proposition 3.5.8, R_{qq} et M_{qq} are uniformly bounded in N whereas R_{ql} and M_{ql} are of order $1/N$. In order to deal with simple notations, α will be a common bound greater than 1 for κ and its derivatives. Then we have

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_q}\log\frac{g_1 \dots g_N}{g_l g_q}\right| &\le \sum_{i\neq l,q}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_q}\log g_i\right| \\ &\le \frac{1}{N^2}\sum_{i\neq l,q}\left|\kappa'(x_i-x_l)\kappa'(x_i-x_q)\frac{\partial^2 \log a}{\partial y_2^2}\right| \\ &\le \frac{1}{N^2}\sum_{i\neq l,q} 2\alpha^2 c^4\end{aligned}$$

and $\sum_{i\neq q,l}\left|\frac{\partial}{\partial x_l}\log g_i\right|\left|\frac{\partial}{\partial x_q}\log g_i\right|$ is bounded by

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq q,l}|\kappa'(x_i-x_l)\kappa'(x_i-x_q)|\left(\frac{\partial \log a}{\partial y_2}\right)^2 \le \frac{1}{N^2}\sum_{i\neq q,l}\alpha^2 c^4.$$

Then a short computation gives

$$|R_{lq}| \le \frac{7\alpha^2 c^4}{4N}.$$

By the same way, it can be shown that

$$\begin{cases} |R_{qq}| \le 7\alpha^2 c^6 \\ |M_{ii}| \le 3\alpha c^2 \\ |M_{ij}| \le 5\alpha c^5/N. \end{cases}$$

Then we have obtained the bound we were looking for. The Gershgorin-Haddamard theorem implies that the eigenvalues of T are bounded by:

$$7\alpha^2 c^6 + \frac{7\alpha^2 c^4(N-1)}{4N} + 3\alpha c^2 + \frac{5\alpha c^5(N-1)}{N} \le \frac{67}{4}\alpha^2 c^6,$$

since α and c are greater than 1. As a consequence, all the operators L^N have a curvature bounded below by $\rho = -17\alpha^2 c^6$. □

Of course, a more precise result could be obtained by specifying the bound of each derivative but this work is not very essential from a theoretic point of view.

Remark 3.5.9. — *When $d \ge 2$, g_i is a $d \times d$ matrix. In order to control the spectrum of T, one has to consider blocks of size $d \times d$ as in the proof of Lemma 3.3.5.*

3.5.3.2. *Concentration of measure.* —

Theorem 3.5.10. — *For all Lipschitz function with $\|f\|_{Lip} \le 1$ and $r \ge 0$, the probabilty*

$$\sup_{t\le T}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(X_t^{i,N}) - \int f(y)u(t,y)\,dy\right| \ge r + \sqrt{\frac{K_T}{N}}\right)$$

is bounded by $2\exp\left(-\dfrac{Nr^2}{C_T}\right)$ *where*

$$C_T = \frac{2}{\rho}\left(1 - e^{-2\rho T}\right),$$

and u *solution of* (3.20).

Remark 3.5.11. — *Explicit forms of the constants* ρ *and* K_T *can be given. With the notations we have introduce in section 3.5.3.1,*

$$\begin{cases} \rho = -17\alpha^2 c^6 \\ K_T = 6\alpha^4 c^2 \exp\left(12\alpha^2 c^2 T\right). \end{cases}$$

Acknowledgments This work is a part of my PhD thesis. I would like to thank my advisor Professor D. Bakry for his useful advices and encouragements.

Bibliography

[Bak94] D. Bakry – "L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes", École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXII—1992. Lectures Notes in Math., vol 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.

[Bak97] ______, "On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups", *New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994)* (River Edge, NJ), Taniguchi symposium, World Sci. Publishing, 1997, p. 43–75.

[BAZ99] G. Ben Arous & O. Zeitouni – "Increasing propagation of chaos for mean fields models", *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **35** (1999), no. 1, p. 85–102.

[BCCP98] D. Benedetto, E. Caglioti, J. A. Carrillo & M. Pulvirenti – "A non-Maxwellian steady distribution for one-dimensional granular media", *J. Statist. Phys.* **91** (1998), no. 5-6, p. 979–990.

[BE85] D. Bakry & M. Emery – "Diffusions hypercontractives", Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lectures Notes in Math., vol 1123, Springer, Berlin, 1985, p. 177–206.

[BGL01] S. Bobkov, I. Gentil & M. Ledoux – "Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations", To appear in Jour. Math. Pu. Appli., 2001.

[BRTV98] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay & P. Vallois – "Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos", *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 173–201.

[BRV98] S. Benachour, B. Roynette & P. Vallois – "Nonlinear self-stabilizing processes. II. Convergence to invariant probability", *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 203–224.

[CMV01] J. Carrillo, R. McCann & C. Villani – "Kinetic equilibration rates for granular media", Work in progress, 2001.

[Csi84] I. Csiszár – "Sanov property, generalized I-projection and a conditional limit theorem", *Ann. Probab.* **12** (1984), no. 3, p. 768–793.

[GHL90] S. Gallot, D. Hulin & J. Lafontaine – *Riemannian geometry*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Gri90] J. Grifone – *Algèbre linéaire*, Cepadues Éditions, Toulouse, 1990.

[Gro75] L. Gross – "Logarithmic Sobolev inequalities", *Amer. J. Math.* **97** (1975), no. 4, p. 1061–1083.

[Led99] M. Ledoux – "Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities", Séminaire de Probabilités XXXIII. Lectures Notes in Math., vol 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 120–216.

[OV00] F. Otto & C. Villani – "Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality", *J. Funct. Anal.* **173** (2000), no. 2, p. 361–400.

[Pin64] M. S. Pinsker – *Information and information stability of random variables and processes*, Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1964, Translated and edited by Amiel Feinstein.

[Rac91] S. T. Rachev – *Probability metrics and the stability of stochastic models*, Wiley, New York, 1991.

[Szn91] A.-S. Sznitman – "Topics in propagation of chaos", École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989. Lectures Notes in Math., vol 1464, Springer, Berlin, 1991, p. 165–251.

CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DISSIPATIVES

Dans ce chapitre nous présentons des résultats concernant le comportement en temps long de la solution de l'équation des milieux granulaires. Ils ont été établis par Carrillo, McCann et Villani et sont principalement basés sur les travaux antérieurs de Brenier pour l'étude des distances de Wasserstein et d'Otto pour l'étude de l'équation des milieux poreux.

L'idée fondamentale est d'associer à une équation d'évolution non linéaire une métrique sur la « variété »des mesures de probabilité (absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue) et une fonctionnelle d'entropie qui caractérise l'équilibre. Parmi les équations dissipatives, c'est-à-dire pour lesquelles l'entropie décroit le long d'une solution, certaines admettent des vitesses de convergence à l'équilibre exponentielles. Pour mettre ceci en évidence, on utilise le raisonnement de Bakry et Emery : dériver deux fois l'entropie et minorer cette quantité par la dérivée première. C'est pour calculer ces objets que l'introduction d'un contexte riemannien est d'un grand secours. Il permet en effet de s'abstraire des difficultés techniques afférentes aux termes non linéaires.

Les résultats présentés dans [CMV01] s'avèrent meilleurs à une constante 2 près pour la vitesse de convergence à l'équilibre de l'équation des milieux granulaires dans un bain thermique que ceux fournit par notre approche (qui consiste à utiliser le système de particules). De plus, avec un potentiel d'interaction seul, l'équation non linéaire converge exponentiellement vite vers l'équilibre alors que le système de particules se comporte moins bien. Nous ferons quelques commentaires sur cette situation à la fin de ce chapitre.

4.1. L'équation des milieux granulaires

Rappelons dans un premier temps l'écriture de l'équation des milieux granulaires sur $\mathbb{R}^d$ dans un cadre général :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla \rho + \rho(\nabla V + \nabla W * \rho)) \tag{4.1}$$

avec V et W convexes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ avec W paire.

4.1.1. Le cadre riemannien. — Pour faire apparaître la métrique et la fonctionnelle appropriées, il nous faut réécrire (4.1) de la manière suivante :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\nabla p)$$

où

$$p = -(\log\rho + V + W * \rho).$$

On peut alors suivre l'approche adoptée par Otto (voir [Ott01]) pour l'équation des milieux poreux. Il s'agit de considérer l'ensemble $\mathcal{P}$ des mesures de probabilité absolument continues pour la mesure de Lebesgue comme une variété (de dimension infinie). L'espace tangent à $\mathcal{P}$ en ρ est

$$T_\rho\mathcal{P} = \left\{s \ : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \int s = 0\right\}.$$

On identifie à présent $T_\rho\mathcal{P}$ à l'ensemble des fonctions intégrables quotienté par la relation d'équivalence « égales à une constante près »grâce à l'équation elliptique

$$-\mathrm{div}(\rho\nabla p) = s.$$

Remarque 4.1.1. — *La fonction p est bien déterminée puisque l'on résoud*

$$\Delta p + \nabla\log\rho\cdot\nabla p = -\frac{s}{\rho}$$

avec s/ρ d'intégrale nulle par rapport à ρ.

On définit alors le tenseur g et la fonctionnelle E :

$$g_\rho(s_1,s_2) \overset{\text{déf.}}{=} \int \rho\nabla p_1\nabla p_2 = -\int p_1\mathrm{div}\ (\rho\nabla p_2) = \int p_1 s_2$$

et

$$E(\rho) = \int\rho\log\rho + \int V\rho + \frac{1}{2}\iint W(x-y)\rho(x)\rho(y)\,dx\,dy.$$

Le tenseur g transforme la différentielle de E, qui est un champ de vecteurs cotangents en son gradient grad E, qui est un champ de vecteurs tangents :

$$g_\rho(\mathrm{grad}\ E, s) = \mathrm{diff}\ E\cdot s.$$

Or, on a, pour tout vecteur tangent s_1,

$$\begin{aligned}\mathrm{diff}\ E\cdot s_1 &= \int(\log\rho + V + W*\rho)s_1 = -\int p s_1\\ &= g_\rho(\mathrm{div}(\rho\nabla p), s_1) = -g_\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}, s_1\right).\end{aligned}$$

L'équation (4.1) s'interprète donc comme la solution d'un flot de gradient :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{grad}\ E(\rho).$$

La première conséquence est la décroissance de E le long de ρ :

$$\frac{d}{dt}E(\rho) = -g_\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}, \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = -\int\rho|\nabla p|^2 = -\int\rho\left|\frac{\nabla\rho}{\rho} + \nabla V + \nabla W * \rho\right|^2.$$

On appellera *dissipation d'entropie* la quantité

$$D(\rho) = \int \rho \left| \frac{\nabla \rho}{\rho} + \nabla V + \nabla W * \rho \right|^2 .$$

Remarque 4.1.2. — *Le tenseur métrique peut être défini par polarisation à partir de*

$$g_\rho(s,s) = \inf \int \rho |u|^2$$

où l'infimum est pris sur les champs de vecteurs u tels que

$$s + div(\rho u) = 0.$$

Cette remarque est très importante : du point de vue physique, elle traduit la minimisation de l'énergie. De plus, comme nous allons l'expliciter brièvement dans la suite, elle indique que le tenseur g munit la variété $\mathcal{P}$ d'une structure riemannienne mathématiquement satisfaisante : il est possible d'identifier les géodésiques et la distance riemannienne associées en terme de transport de mesures et de distance de WASSERSTEIN.

4.1.2. Distance de WASSERSTEIN et géodésiques. — La distance de Wasserstein entre deux mesures de probabilité de densité respective par rapport à la mesure de LEBESGUE f_0 et f_1 (admettant un moment d'ordre 2 fini) est définie par

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(f_0, f_1) = \inf \left\{ \sqrt{\mathbb{E}\big(|X - Y|^2\big)} \right\}$$

où l'infimum est pris sur toutes les variables aléatoires X et Y de densités respectives f_0 et f_1. Un résultat, dû à BRENIER et MCCANN (voir [Bre91] et [McC95]), assure que l'infimum est atteint et le caractérise : il existe un unique gradient de fonction convexe $\nabla\phi$ (f_0 p.p.) tel que f_1 soit la mesure image de f_0 par $\nabla\phi$ (que l'on notera $\nabla\phi\# f_0$). De plus,

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(f_0, f_1)^2 = \int |x - \nabla\phi(x)|^2 f_0(x)\, dx.$$

On peut ainsi montrer que l'on parcourt la géodésique entre f_0 et f_1 en considérant l'interpolation $(f_s)_{0 \le s \le 1}$ suivante :

$$f_s := ((1-s)\mathrm{Id} + s\nabla\phi)\# f_0 \quad \text{pour } 0 \le s \le 1,$$

et que la *distance géodésique* est la distance de WASSERSTEIN.

Remarque 4.1.3. — *La mesure f_0 est transportée sur f_s par le gradient d'une fonction convexe donc*

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{2}}(f_0, f_s)^2 &= \int |x - [(1-s)x + s\nabla\phi]|^2 f_0(x)\, dx \\ &= s^2 \int |x - \nabla\phi(x)|^2 f_0(x)\, dx \\ &= s^2\, W_{\mathbf{2}}(f_0, f_1)^2. \end{aligned}$$

Le comportement en temps grand de E va s'avérer lié à la convexité de E mais au sens de la distance riemannienne, cette notion, différente de la notion usuelle de convexité est appelée *déplacement-convexité*.

Définition 4.1.4. — *Une fonctionnelle E est dite* déplacement-convexe*, si, pour toutes mesures f_0 et f_1, la fonction qui à $s \in [0,1]$ associe $E(f_s)$ est convexe.*

De plus, elle est dite strictement déplacement-convexe *de constante λ, si pour tout $s \in [0,1]$,*

$$\frac{d^2}{ds^2}E(f_s) \geq \lambda W_{\mathbf{2}}(f_0, f_1)^2.$$

Le théorème suivant rassemble les exemples de fonctionnelles définies sur l'ensemble $\mathcal{P}$ que nous aurons à considérer dans la suite. Nous identifions dans la suite la mesure et sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Théorème 4.1.5. —

1. *La fonctionnelle $f \mapsto \int f \log f$ est déplacement-convexe.*
2. *La fonctionnelle $f \mapsto \int Vf$ est déplacement-convexe (resp strictement déplacement-convexe de constante λ) ssi V est convexe (resp strictement convexe de constante λ).*
3. *La fonctionnelle $f \mapsto \int fW * f$, définie sur les mesures de même moyenne $\int xf(x)\,dx$, est déplacement-convexe (resp strictement déplacement-convexe de constante λ) ssi W est convexe (resp strictement convexe de constante λ).*

Preuve. — Nous allons montrer le troisième point. Soit f_0 et f_1 deux densités de probabilité admettant des moments d'ordre 2 et ayant même centre de masse (i.e. même moyenne). Désignons comme précédemment par $\nabla\phi$ le gradient de fonction convexe qui transporte f_0 sur f_1. On notera, pour simplifier les expressions, $\theta = Id - \nabla\phi$. Il nous faut étudier la dérivée seconde de la fonction α définie par

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \frac{1}{2}\iint W(x-y)f_s(x)f_s(y)\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{2}\iint W([x-y] - s[\theta(x)-\theta(y)])f_0(x)f_0(y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Un calcul immédiat donne alors

$$\alpha''(s) \geq \frac{\lambda}{2}\iint |\theta(x)-\theta(y)|^2 f_0(x)f_0(y)\,dx\,dy.$$

La définition de θ et le fait que f_0 et f_1 aient même centre de masse donne

$$\begin{aligned} \int \theta f_0(x)\,dx &= \int xf_0(x)\,dx - \int \nabla\phi(x)f_0(x)\,dx \\ &= \int xf_0(x)\,dx - \int xf_1(x)\,dx = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha''(s) \geq \lambda \int |\theta(x)|^2 f_0(x)\,dx = \lambda \mathrm{W}_{\mathbf{2}}(f_0, f_1)^2.$$

□

4.1.3. Dissipation de dissipation d'entropie. — Grâce à la description des géodésiques, il est possible de calculer la matrice hessienne de E et donc de calculer la dissipation de dissipation d'entropie, notée $DD(E)$, qui est définie par

$$DD(E) = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \langle \text{Hess } E \cdot \text{grad } E, \text{grad } E \rangle.$$

Lemme 4.1.6. — *La dissipation de dissipation d'entropie est donnée par*

$$\begin{aligned} DD(\rho) &= 2\int \rho \|\text{Hess } p\|^2 + 2\int \rho \big\langle D^2 V p, p \big\rangle \\ &\quad + \int \big\langle D^2 W(x-y)[p(x)-p(y), p(x)-p(y)] \big\rangle \rho(x)\rho(y)\, dx\, dy, \end{aligned}$$

où p est défini comme auparavant par

$$p = -(\log \rho + V + W * \rho).$$

4.1.4. Comportement en temps long. — La convexité de potentiels assure l'existence et l'unicité d'une mesure d'équilibre qui est caractérisée comme l'unique point où la fonctionnelle E atteint son minimum. Toutes les conditions sont réunies pour pouvoir appliquer la stratégie de Bakry et Emery : sous des hypothèses de stricte convexité des potentiels, la dissipation de dissipation d'entropie peut être minorée par une constante que multiplie la dissipation d'entropie. C'est l'analogue du critère de courbure. Une intégration sur le temps donne alors une vitesse de convergence à l'équilibre. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 4.1.7. — *Si W est convexe et V est uniformément convexe ($D^2V \geq \lambda I$ avec $\lambda > 0$), alors*

$$E(f) - E(\rho_\infty) \leq \frac{1}{2\lambda} D(f),$$

et le retour à l'équilibre se fait à la vitesse $e^{-2\lambda t}$.

Si V est convexe et W est uniformément convexe ($D^2W \geq \lambda I$ avec $\lambda > 0$), alors

$$E(f) - E(\rho_\infty) \leq \frac{1}{\lambda} D(f),$$

où ρ_∞ a le même centre de masse que f ; le retour à l'équilibre se fait à la vitesse $e^{-\lambda t}$.

4.2. Commentaires et compléments

Dans cette section, nous nous placerons sur $\mathbb{R}$ pour simplifier les notations mais tout ceci reste vrai en dimensions supérieures. Un exemple particulièrement intéressant est celui où l'on choisit V égal à 0 et W strictement convexe. Considérons donc l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div } [\nabla u + (uW' * u)].$$

D'après le théorème 4.1.7, u_t converge vers l'équilibre avec une vitesse exponentielle. Notons toutefois une remarque très importante. La fonctionnelle E est invariante par translation, c'est-à-dire que pour toute mesure μ et tout a,

$$E(\mu) = E(\mu * \delta_a).$$

L'évolution temporelle se fait dans la classe des mesures de même centre de masse, *i.e.* de même moyenne. Une manière simple de le voir est de remarquer que le processus non linéaire de loi (u_t)

$$d\overline{X}_t = \sqrt{2}\, dB_t - W' * u_t(\overline{X}_t)\, dt \tag{4.2}$$

est d'espérance nulle.

Dans la suite le processus $(\overline{X}^i_t)_{t\geq 0}$ désignera la solution de l'équation différentielle stochastique (4.2) dirigée par le mouvement brownien $(B^i_t)_{t\geq 0}$. Deux processus $(\overline{X}^i_t)_{t\geq 0}$ et $(\overline{X}^j_t)_{t\geq 0}$, pour $i \neq j$, sont donc indépendants et identiquement distribués.

Dans [BRTV98], il est établi que le processus $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ admet des moments de tous ordres bornés uniformément par rapport au temps.

Proposition 4.2.1. — *Si $\mathbb{E}\left(\left|\overline{X}_0\right|^{2n}\right)$ est finie, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel K_n tel que*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left(\left|\overline{X}_t\right|^{2n}\right) \leq K_n.$$

Pour se convaincre de la véracité de la proposition 4.2.1, il suffit d'écrire la formule d'Itô pour $(\overline{X}^1_t)^2$ entre 0 et t :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\overline{X}^1_t\right|^2\right) - \mathbb{E}\left(\left|\overline{X}^1_0\right|^2\right) &= -2\int_0^t \mathbb{E}\left[\overline{X}^1_s W' * u_s(\overline{X}^1_s)\right] ds + 2t \\
&= -2\int_0^t \mathbb{E}\left[\overline{X}^1_s W'(\overline{X}^1_s - \overline{X}^2_s)\right] ds + 2t \\
&= -\int_0^t \mathbb{E}\left[(\overline{X}^1_s - \overline{X}^2_s) W'(\overline{X}^1_s - \overline{X}^2_s)\right] ds + 2t
\end{aligned}$$

par indépendance des processus $(\overline{X}^1_t)$ et $(\overline{X}^2_t)$ et imparité de W'. La stricte convexité de W donne alors

$$\mathbb{E}\left(\left|\overline{X}^1_t\right|^2\right) - \mathbb{E}\left(\left|\overline{X}^1_0\right|^2\right) \leq -\rho\int_0^t \mathbb{E}\left[(\overline{X}^1_s - \overline{X}^2_s)^2\right] ds + 2t = -2\rho\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\overline{X}^1_s\right|^2\right] ds + 2t.$$

Le lemme de Gronwall achève la preuve pour le cas de $n = 1$. Les autres se font par récurrence.

Dans le chapitre 3, nous avons déjà remarqué que le système de particules, associé au processus non linéaire ci-dessus,

$$dX^{i,N}_t = \sqrt{2}\, dB^i_t - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N W'\big(X^{i,N}_t - X^{j,N}_t\big)\, dt,$$

avait une courbure nulle au sens usuel. En effet, la matrice $(H_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ de coefficients

$$H_{ii} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} W''(x_i - x_j) \quad \text{et} \quad H_{ij} = -\frac{1}{N}W''(x_i - x_j) \quad \text{pour } i \neq j,$$

admet 0 pour valeur propre associée au vecteur $(1,\ldots,1)$. Ainsi, rien ne peut être dit de manière évidente sur le comportement en temps long du système de particules. Par exemple, le moment d'ordre deux de $X_t^{i,N}$ n'est uniformément borné en temps mais est de l'ordre de t. Le comportement en temps du système de particules s'avère donc moins bon que celui du processus non linéaire associé.

De même, le résultat de propagation du chaos établi dans [BRTV98] n'est pas uniforme en temps. On obtient uniquement le résultat suivant.

Proposition 4.2.2. — *Si X_0 est de carré intégrable, alors, pour tout $T \geq 0$,*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left(\left|X_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\right|^2\right) \leq \frac{CT^2}{N}.$$

4.2.1. Il faut projeter. — Tentons donc d'analyser plus finement ce qu'il se passe. Comme le potentiel d'interaction W est pair, on a

$$\sum_{i,j=1}^{N} W'(x_i - x_j) = 0 \quad \text{pour tout } (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

et la mesure empirique vérifie :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_t^{i,N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_0^i + \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{i=1}^{N} B_t^i.$$

Cette quantité tend bien vers 0 (presque sûrement) quand N tend vers l'infini à temps fini mais pas uniformément en temps.

Qu'en est-il des autres valeurs propres de la matrice hessienne H ? Pour le savoir, il suffit d'écrire H de la manière suivante :

$$H(x) = \rho\left(\mathrm{Id} - \frac{1}{N}\mathbb{1}\right) + H(x) - \rho\left(\mathrm{Id} - \frac{1}{N}\mathbb{1}\right),$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. La matrice A égale à

$$A = \rho\left(Id - \frac{1}{N}\mathbb{1}\right)$$

admet 0 pour valeur propre simple associée à $(1,\ldots,1)$ et ρ pour valeur propre de multiplicité $N-1$. D'autre part, $H - A$ est une matrice positive. Ainsi la matrice H admet 0 pour valeur propre simple et ses autres valeurs propres sont supérieures ou égales à ρ. Cela suggère que le comportement du système de particules est plus « mauvais »dans la direction $(1,\ldots,1)$ que sur l'hyperplan $\mathcal{M}$, défini par

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 0\right\},$$

qui est orthogonal à $(1,\ldots,1)$. On notera dans la suite $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{B}'$ une base orthonormée $(v_1,\ldots,v_N)$ de $\mathbb{R}^N$ tel que v_1 soit le vecteur $1/\sqrt{N}(1,\ldots,1)$ (qui est orthogonal à $\mathcal{M}$). Enfin P désigne la matrice orthogonale dont la ligne i est le vecteur v_i. Si $(B_t)_t$ désigne un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^N$, alors $(W_t)_t$ défini par $W_t = PB_t$ est encore un mouvement brownien standard dans la base $\mathcal{B}'$.

Projeter le vecteur X^N sur $\mathcal{M}$ revient tout naturellement à lui retrancher la moyenne de ses coordonnées : notons Y^N le processus défini par

$$Y_t^{i,N} = X_t^{i,N} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_t^{j,N} \quad \text{pour tout } i=1,\ldots,N\,.$$

Par définition de Y^N,

$$X_t^{i,N} - X_t^{j,N} = Y_t^{i,N} - Y_t^{j,N}\,.$$

Ainsi, il vient

$$Y_t^{i,N} = \sqrt{2}B_t^i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^t W'(Y_s^{i,N} - Y_s^{j,N})\,ds - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N B_t^j\,.$$

En adoptant l'écriture vectorielle, on a encore

$$Y_t^N = \sqrt{2}B_t^{(N)} - \int_0^t \nabla H(Y_s^N)\,ds - \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N B_t^j\right)v_1\,,$$

avec la notation

$$H(y) = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^N W(y_i - y_j)\,.$$

Le fait remarquable est que le processus (Y^N) est une diffusion sur $\mathcal{M}$. En effet, la projection d'une diffusion n'en est pas une en général. Toutefois, l'invariance de la dérive par translation assure ici cette propriété.

4.2.2. Comportement en temps long du système projeté. — Nous montrons dans cette section que la diffusion sur $\mathcal{M}$ que nous venons d'introduire est « positivement courbée ». Nous en déduirons le résultat suivant.

Proposition 4.2.3. — *Si $W''(x) \geq \rho$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors le processus (Y_t^N) satisfait une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique locale de constante :*

$$\frac{2}{\rho}(1-\exp(-2\rho t)).$$

De ce résultat, découlent des inégalités de concentration gaussienne uniformes en temps pour le processus $(Y_t^N)_{t\geq 0}$.

4.2.3. Propagation du chaos pour le système projeté. — La dernière question qui se pose est de savoir vers quoi et comment converge la loi d'une particule parmi N dans le système projeté. Une réponse complète à cette question, ainsi qu'à celles concernant la simulation du processus non linéaire ou de sa mesure invariante, est apportée par l'annexe C.

Bibliographie

[Bre91] Y. Brenier – « Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions », *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), no. 4, p. 375–417.

[BRTV98] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay & P. Vallois – « Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos », *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 173–201.

[CMV01] J. Carrillo, R. McCann & C. Villani – « Kinetic equilibration rates for granular media », Work in progress, 2001.

[McC95] R. J. McCann – « Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps », *Duke Math. J.* **80** (1995), no. 2, p. 309–323.

[Ott01] F. Otto – « The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation », *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), no. 1-2, p. 101–174.

CHAPTER 5

CONCENTRATION INEQUALITIES FOR EULER SCHEMES

5.1. Introduction

In the past years, the Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities has been widely used in various domains from the statistical mechanics to analysis and probability theory (for an introduction, see [ABC+00]). In this paper, we provide a new practical application of those inequalities (*via* the concentration of measure phenomenon) for the simulation of diffusions or interacting particle systems.

Let us define first the Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities on $\mathbb{R}^d$. The first one, which is well known by analysts, is also called *spectral gap inequality.* Is is a control of the variance by the L^2-norm of the gradient.

***Definition 5.1.1* (Poincaré inequality).** — *A probability measure μ on $\mathbb{R}^d$ satisfies a Poincaré (or spectral gap) inequality with constant C if*

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq C\mathbb{E}_\mu\left(|\nabla f|^2\right),$$

for all smooth enough functions f.

The logarithmic Sobolev inequality is a control of the entropy by the L^2-norm of the gradient.

***Definition 5.1.2* (Logarithmic Sobolev inequality).** — *The probability measure μ on $\mathbb{R}^d$ satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant C if*

$$\mathrm{Ent}_\mu\left(f^2\right) \leq C\mathbb{E}_\mu\left(|\nabla f|^2\right),$$

for all smooth enough functions f where

$$\mathrm{Ent}_\mu\left(f^2\right) := \int f^2 \log f^2 \, d\mu - \int f^2 \, d\mu \log \int f^2 \, d\mu\,.$$

Remark 5.1.3. — *The Gaussian measure $\mathcal{N}(m, S)$ on $\mathbb{R}^d$ satisfies a Poincaré (resp logarithmic Sobolev) inequality with constant ρ (resp 2ρ) which is the greatest eigenvalue of the covariance matrix S.*

Let us consider the diffusion process $(X_t)_{t\geq 0}$ on $\mathbb{R}^d$ solution of the following stochastic differential equation (SDE):

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sqrt{2}\sigma(X_s)\,dB_s,$$

where $(B_t)_{t\geq 0}$ is a Brownian motion on $\mathbb{R}^d$ and $\sigma(x)$ is a $d\times d$ matrix and $b(x)$ is a vector of $\mathbb{R}^d$. Let $(\mathbf{P}_t)_t$ be the semigroup associated to the sde. Under the curvature criterion Eq. (5.3), the measures $(\mathbf{P}_t(\cdot)(x))_{x\in\mathbb{R}}$ satisfy the logarithmic inequality

$$\mathrm{Ent}_{\mathbf{P}_t}\left(f^2\right) \leq \frac{2}{\rho}\left(1-e^{-2\rho t}\right)\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma} f).$$

In this paper, we establish Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities for approximating schemes, trying to link the constants to the ones of the underlying diffusion. The easiest way, and in some sense the most efficient way, to simulate this diffusion process is to use the Euler scheme (with increment γ). It is a Markov chain on $\mathbb{R}^d$ defined by

$$X^\gamma_{n+1} := X^\gamma_n + b(X^\gamma_n)\gamma + \sqrt{2}\sigma(X^\gamma_n)(B_{n+1}-B_n), \tag{5.1}$$

i.e. with transition kernel K defined by

$$K(f)(x) := \mathbb{E}\Big[f\Big(x + b(x)\gamma + \sqrt{2\gamma}\sigma(x)Y\Big)\Big],$$

where Y is Gaussian r.v. $\mathcal{N}(0, Id)$.

Remark 5.1.4. — *It is also possible to define the Euler scheme with continuous paths:*

$$X^\gamma_t = X^\gamma_{\tau(t)} + b(X^\gamma_t)\gamma + \sqrt{2}\sigma(X^\gamma_t)\big(B_t - B_{\tau(t)}\big)$$

where $\tau(t)$ stands for the integer part of t/γ.

When the coefficients σ and b are sufficiently smooth, the scheme (X^γ_t) is known to converge to (X_t) (see [Tal96] for a review of classical results).

Our strategy in this paper is to mimic the semigroup method used by [Bak97] in the continuous time framework. Let us have a look to this method. To establish a Poincaré inequality for a Markov semigroup $(\mathbf{P}_t)$ with infinitesimal generator $\mathbf{L}$, Bakry introduced the function α defined by

$$\alpha(s) = \mathbf{P}_s\big[(\mathbf{P}_{t-s}f)^2\big].$$

Using the fact that the time derivative of $\mathbf{P}_t f$ is $\mathbf{P}_t\mathbf{L}f$, one can get

$$\alpha'(s) = 2\mathbf{P}_s\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}_{t-s}f, \tag{5.2}$$

where

$$\mathbf{\Gamma} f := \frac{1}{2}\big[\mathbf{L}(f^2) - 2f\mathbf{L}f\big].$$

Computing the second derivative of α, one has

$$\alpha''(s) = 4\mathbf{P}_s\mathbf{\Gamma_2}\mathbf{P}_{t-s}f,$$

where

$$\mathbf{\Gamma_2} f := \frac{1}{2}[\mathbf{L}(\mathbf{\Gamma} f) - 2\mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{L}f)].$$

Under the assumption, which is known as the Bakry-Emery criterion with curvature ρ,

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 f \geq \rho\, \boldsymbol{\Gamma} f, \tag{5.3}$$

the function α' is solution of the following differential inequality:

$$\alpha''(s) \geq 2\rho\alpha'(s).$$

This ensures the commutation relation

$$\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{P}_t f \leq e^{-2\rho t}\mathbf{P}_t\boldsymbol{\Gamma} f. \tag{5.4}$$

At last, one uses (5.4) in Equation (5.2) to obtain the Poincaré inequality

$$\mathbf{P}_t(f^2) - (\mathbf{P}_t f)^2 \leq \frac{1-e^{-2\rho t}}{\rho}\mathbf{P}_t\boldsymbol{\Gamma} f.$$

Remark 5.1.5. — *A straightforward computation provides* $\boldsymbol{\Gamma}(f) = |\sigma\nabla f|^2$.

To establish a logarithmic Sobolev inequality, one has to reiforce the commutation relation to get

$$\sqrt{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{P}_t f} \leq e^{-2\rho t}\mathbf{P}_t\left(\sqrt{\boldsymbol{\Gamma} f}\right),$$

which is nothing else than

$$|\sigma\nabla\mathbf{P}_t f| \leq e^{-\rho t}\mathbf{P}_t(|\sigma\nabla f|). \tag{5.5}$$

In Section 5.2, we assume that σ is constant and we prove that the kernel K^n satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant

$$D_{\gamma,n} = \frac{2}{\lambda(2-\lambda\gamma)}\left(1-(1-\lambda\gamma)^{2n}\right),$$

where λ is the greatest real such that, for every v and x in $\mathbb{R}^d$,

$$\langle \text{-Jac}\, b(x)v, v\rangle \geq \lambda|v|^2.$$

We also establish a similar result for the implicit Euler scheme which is used in the case when the coefficients are no longer Lipschitz.

In Section 5.3, we consider a general diffusion process on $\mathbb{R}^d$ and establish that the iterated kernel K^n satisfies a Poincaré inequality with constant

$$C_{\gamma,n} = c\gamma\frac{1-(C_\gamma)^n}{1-C_\gamma},$$

where c and C_γ depend on the coefficients σ and b.

We perform, in Section 5.4, the study of one dimensional diffusions. In particular we establish logarithmic Sobolev inequalities for modified Milschstein schemes which transition kernel is given by

$$Jf(x) := \mathbb{E}\left[f\left(x+\gamma b(x)+\sqrt{2\gamma}Z+\sigma'(x)\sigma(x)(Z^2-1)\gamma\right)\right],$$

where the law of Z is a probability measure with compact support, mean 0 and variance 1. Moreover the constant is given by

$$\frac{c}{\rho+O(\gamma^{1/2})}\left(1-(1-\rho\gamma+O(\gamma^{3/2}))^{2n}\right),$$

where ρ is the curvature of the underlying diffusion.

In Section 5.5, we deduce from the previous results exact confidence intervals for numerical methods. Indeed the Euler scheme is used to solve PDE's by Monte-Carlo methods: one has to simulate N independent Euler schemes and consider their empirical measure as a good approximation of the solution of the PDE. Probabilistic methods as Euler schemes and interacting particle systems are also efficient to solve numerically McKean-Vlasov equations. Those nonlinear partial differential equations can be approximated by mean field interacting diffusions (see [Szn91] for an introduction to the propagation of chaos theory). [Mal01] uses logarithmic Sobolev and concentration inequalities to describe this convergence. Nevertheless, those results are not useful from a practical point of view (since a computer does not simulate exactly a diffusion). In this paper we give precise confidence intervals for the convergence of the both explicit and implicit Euler schemes to the solution of the nonlinear McKean-Vlasov PDE. In particular, we study granular media equations and the Navier-Stokes Equation in dimension 2 thanks to the vortex method.

5.2. Diffusions with constant diffusion matrix

In this section, we assume that the diffusion matrix σ is constant and equal to the identity matrix I_d. In fact we study the diffusion $(X_t)_t$ which satisfies

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla U(X_t)\,dt$$

where U is a smooth function.

Remark 5.2.1. — *We deal with the gradient case in order to underline the connection between the diffusion process and its approximation. Nevertheless, an analogous work can be done replacing $-\nabla U$ (resp. Hess U) by a general drift b (resp. Jac b).*

5.2.1. The explicit Euler scheme. — We still assume here that ∇U is an uniformly Lipschitz function on $\mathbb{R}^d$. The typical example is the Ornstein-Uhlenbeck process ($U(x) = |x|^2/2$).

The associated Euler scheme is the Markov chain with probability transition given by

$$Kf(x) = \mathbb{E}\Big[f\Big(x - \nabla U(x)\gamma + \sqrt{2\gamma}Y\Big)\Big]$$

where Y is a Gaussian r.v. $\mathcal{N}(0, I_d)$ in $\mathbb{R}^d$.

Let λ be the greatest real such that for every x and v in $\mathbb{R}^d$,

$$\langle \text{Hess } U(x)v, v\rangle \geq \lambda|v|^2. \tag{5.6}$$

In what follows, we will assume that $\lambda\gamma < 1$. This technical assumption is not restrictive since the discretisation step γ is small.

Let us establish now that the Euler scheme satisfies a local logarithmic Sobolev inequality i.e. for every n, the kernels $(K^n(\cdot)(x))_x$ satisfy a log-Sobolev inequality with same constant (depending in n).

Theorem 5.2.2. — *For every $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ and (smooth) function f from $\mathbb{R}^d$ to $\mathbb{R}$,*

$$\mathrm{Ent}_{K^n}\left(f^2\right) \leq D_{\gamma,n} K^n\left(|\nabla f|^2\right)$$

where $D_{\gamma,n}$ is equal to

$$D_{\gamma,n} = \frac{4}{\lambda(2-\lambda\gamma)}\left(1-(1-\lambda\gamma)^{2n}\right). \tag{5.7}$$

Remark 5.2.3. — *If λ is equal to 0, $D_{\gamma,n}$ has to be understood as $4n\gamma$.*

Proof. — The kernel $K(\cdot)(x)_x$, which is nothing else than a Gaussian variable with covariance $2\gamma I$, satisfy a logarithmic Sobolev inequality with constant 4γ.

Moreover, one has

$$\nabla K f(x) = (I_d - \gamma \mathrm{Hess}\, U(x)) K(\nabla f)(x).$$

Then we get

$$|\nabla K f(x)| \leq (1-\gamma\lambda) K(|\nabla f|)(x). \tag{5.8}$$

The strategy to prove our theorem is to mimic the semigroup method developed by Bakry and Émery in the time continuous case. We perform here a discrete time integration of the entropy:

$$\mathrm{Ent}_{K^n}\left(f^2\right) = K^n(f^2 \log f^2) - K^n(f^2)\log K^n(f^2)$$

is equal to

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{K^i\left[K^{n-i}(f^2)\log K^{n-i}(f^2)\right] - K^{i-1}\left[K^{n-i+1}(f^2)\log K^{n-i+1}(f^2)\right]\right\}$$

In what follows, g_{n-i} stands for $\sqrt{K^{n-i}(f^2)}$. So we have

$$\mathrm{Ent}_{K^n}\left(f^2\right) = \sum_{i=1}^{n} K^{i-1}\left[\mathrm{Ent}_K\left(g_{n-i}^2\right)\right] \leq 4\gamma \sum_{i=1}^{n} K^i\left[|\nabla g_{n-i}|^2\right],$$

since K satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant 4γ.

Now, we make use of the commutation relation (5.8) to get, for $1 \leq i \leq n$,

$$|\nabla g_{n-i}|^2 = \frac{|\nabla K^{n-i}(f^2)|^2}{4K^{n-i}(f^2)} \leq (1-\lambda\gamma)^2 \frac{[K|\nabla K^{n-i-1}(f^2)|]^2}{4KK^{n-i-1}(f^2)}.$$

Then, since, from Cauchy-Schwarz inequality,

$$\frac{(Kf)^2}{K(g)} \leq K\left(\frac{f^2}{g}\right),$$

one has

$$\frac{[K|\nabla K^{n-i-1}(f^2)|]^2}{4KK^{n-i-1}(f^2)} \leq K\left[\frac{|\nabla K^{n-i-1}(f^2)|^2}{4K^{n-i-1}(f^2)}\right] = K\left[|\nabla g_{n-i-1}|^2\right].$$

A straightforward induction shows that, for $1 \leq i \leq n$,

$$|\nabla g_{n-i}|^2 \leq (1-\lambda\gamma)^{2(n-i)} K^{n-i}\left[|\nabla f|^2\right].$$

Then it follows that

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_{K^n}\big(f^2\big) &\leq 4\gamma\left[\sum_{i=0}^{n-1}(1-\lambda\gamma)^{2i}\right]K^n\left[|\nabla f|^2\right] = 4\gamma\frac{1-(1-\lambda\gamma)^{2n}}{1-(1-\lambda\gamma)^2}K^n\left[|\nabla f|^2\right] \\ &= \frac{4}{\lambda(2-\lambda\gamma)}\big(1-(1-\lambda\gamma)^{2n}\big)K^n\left[|\nabla f|^2\right],\end{aligned}$$

and the proof is completed. □

5.2.2. The implicit Euler scheme. — In this section we assume that U is a uniformly convex function i.e. there exists $\lambda > 0$ such that, for every $x, v \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle \mathrm{Hess}\ U(x)v, v\rangle \geq \lambda |v|^2.$$

One can guess that this is the fairest case. Nevertheless, the Euler scheme is known to diverge. One has to consider the implicit Euler scheme which is construct by the following way:

$$X_{n+1}^{\gamma} = X_n^{\gamma} - \nabla U\big(X_{n+1}^{\gamma}\big)\gamma + \sqrt{2\gamma}Y,$$

where Y is a standard Gaussian variable on $\mathbb{R}^d$. In other words, if φ is defined by

$$\varphi(x) = (I + \nabla U(x)\gamma)^{-1}(x),$$

then the kernel $\overline{K}$ of the Markov chain is given by

$$\overline{K}f(x) = \mathbb{E}\Big[f\circ\varphi\Big(x+\sqrt{2\gamma}Y\Big)\Big].$$

If $\mathcal{N}(x, 2\gamma I)$ is the Gaussian distribution with mean x and covariance matrix $2\gamma I_d$, then

$$\mathrm{Ent}_{\overline{K}}\big(f^2\big) = \mathrm{Ent}_{\mathcal{N}(x,2\gamma I)}\big((f\circ\varphi)^2\big) \leq 4\gamma\mathbb{E}_{\mathcal{N}(x,2\gamma I)}\left[|\nabla(f\circ\varphi)|^2\right].$$

Now, by the definition of φ, we get

$$\mathrm{Jac}\ \varphi(x) = [I_d + \gamma \mathrm{Hess}\ U(x)]^{-1}.$$

Then, for every v in $\mathbb{R}^d$, one has

$$\langle \mathrm{Jac}\ \varphi(x)v, v\rangle \leq (1+\gamma\lambda)^{-1}|v|^2.$$

So,

$$|\nabla(f\circ\varphi)| = |(\mathrm{Jac}\ \varphi)(\nabla f(\varphi))| \leq \frac{1}{1+\lambda\gamma}|(\nabla f)\circ\varphi|.$$

As a consequence, the kernels $\big(\overline{K}(\cdot)(x)\big)_x$ satisfy a logarithmic Sobolev inequality with the common constant

$$\frac{4\gamma}{1+\lambda\gamma}.$$

On the other hand,

$$\nabla\overline{K}f(x) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}(x,2\gamma I)}[(\mathrm{Jac}\ \varphi)(\nabla f)\circ\varphi].$$

Then $\overline{K}$ and ∇ satisfy the following commutation relation:

$$\left|\nabla\overline{K}(f)(x)\right| \leq (1+\gamma\lambda)^{-1}\overline{K}(|\nabla f|)(x).$$

Following the lines of the proof of Theorem 5.2.2, one sees that the implicit Euler scheme satisfies a local logarithmic Sobolev inequality with constant:

$$\frac{4\gamma}{1+\lambda\gamma}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+\lambda\gamma}\right)^2}\left(1-\left(\frac{1}{1+\lambda\gamma}\right)^{2n}\right)=\frac{4(1+\lambda\gamma)}{\lambda(2+\lambda\gamma)}\left(1-\frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2n}}\right).$$

Theorem 5.2.4. — *For every $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ and (smooth) function f from $\mathbb{R}^d$ to $\mathbb{R}$,*

$$\mathrm{Ent}_{\overline{K}^n}\left(f^2\right) \leq \overline{D}_{\gamma,n}\overline{K}^n\left(|\nabla f|^2\right)$$

where $\overline{D}_{\gamma,n}$ is equal to

$$\overline{D}_{\gamma,n}=\frac{4(1+\lambda\gamma)}{\lambda(2+\lambda\gamma)}\left(1-\frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2n}}\right). \tag{5.9}$$

5.3. The general case

The aim of this section is to establish that the law of X_n^γ defined by Equation (5.1) satisfies a Poincaré inequality with an explicit constant. Indeed, it does not seem possible to establish a logarithmic Sobolev inequality for the Euler scheme associated to a diffusion with a non-constant diffusion matrix.

Theorem 5.3.1. — *If σ and b belongs to $\mathcal{C}_b^1$, then, for every n in $\mathbb{N}$ and every (smooth enough) function f,*

$$K^n(f^2)(x)-(K^nf(x))^2 \leq C_{\gamma,n}K^n(|\nabla f|^2)(x),$$

where

$$C_{\gamma,n}=\gamma c\frac{1-(C_\gamma)^n}{1-C_\gamma}. \tag{5.10}$$

Remark 5.3.2. — *The constant C_γ is equivalent to $1+c'\gamma$ for sufficiently small γ that's why it is not surprising that γ appears in the numerator.*
The constant C_γ is defined by Equation (5.14) *and is increasing as γ increases. Then, it can be chosen uniformly in $\gamma \leq \gamma_0$.*
If C_γ is equal to 1, $(1-(C_\gamma)^n)/(1-C_\gamma)$ has to be understood as n.

Proof of Theorem 5.3.1. — As in the previous section, we perform a discrete time integration:

$$\begin{aligned}K^n(f^2)-(K^nf)^2 &= \sum_{i=1}^n\left\{K^i\left[(K^{n-i}f)^2\right]-K^{i-1}\left[\left(K^{n-i+1}f\right)^2\right]\right\}\\ &= \sum_{i=1}^n K^{i-1}\left\{K\left[(K^{n-i}f)^2\right]-\left[K\left(K^{n-i}f\right)^2\right]\right\}.\end{aligned}$$

Then we have obtained:

$$\mathbf{Var}_{K^n}(f)=\sum_{i=1}^n K^{i-1}\mathbf{Var}_K\left(K^{n-i}f\right). \tag{5.11}$$

One can notice that the operator $\mathbf{Var}_K()$ is the analogous of $\mathbf{\Gamma}$. The key point is then to obtain a discrete version of the commutation relation (5.4):

$$\mathbf{Var}_K(Kf) \leq c(\gamma) K \mathbf{Var}_K(f), \tag{5.12}$$

where $c(\gamma)$ is near of $e^{-2\rho\gamma}$ when γ is sufficiently small. This ensures that the behavior of the Euler scheme is the same than the one of the diffusion process it approximates. In fact, one can prove, using an expansion of $K(f)$, that $c(\gamma)$ looks like $1 - 2\rho\gamma + o(\gamma)$. So, one can reformulate (5.12) as

$$K\mathbf{Var}_K(f) - \mathbf{Var}_K(Kf) \geq 2\rho\gamma K \mathbf{Var}_K(f).$$

This criterion is not easy to deal with, since it is asymptotic, but it is quite optimal when the step γ tends to 0: one can recover the curvature criterion for the underlying diffusion.

In order to give a more tractable criterion (with an explicit constant), we choose to loose this idea of optimality. Let us use the Poincaré inequality for the kernel K which is the Gaussian law with mean $x + b(x)\gamma$ and covariance matrix $2\gamma\sigma(x)\sigma^*(x)$.

$$\mathbf{Var}_K(f)(x) \leq 2\gamma\, K\left(|\sigma(x)\nabla f|^2\right)(x) \leq c\gamma\, K\left(|\nabla f|^2\right)(x) \tag{5.13}$$

since σ is bounded. Now, to get a stronger relation than Inequality (5.12), one can compute $\nabla K f(x)$ and gets

$$\mathbb{E}[(I_d + \gamma \text{Jac } B(x) + \sqrt{\gamma}\text{Jac } (\sigma(x)Y))\nabla f(x + \gamma b(x) + \sqrt{\gamma}\sigma(x)Y)].$$

Let us recall that for any $d \times d$-matrix A and any vector v in $\mathbb{R}^d$,

$$|Av|^2 \leq \rho(AA^*)^2 |v|^2$$

where $\rho(AA^*)$ stands for the largest eigenvalue of AA^*. Then, Cauchy-Schwarz inequality leads to

$$|\nabla K f(x)|^2 \leq \mathbb{E}[\rho(A(x)A(x)^*)] K\left[|\nabla f|^2\right],$$

where the obvious notation

$$A(x) = I_d + \gamma \text{Jac } B(x) + \sqrt{\gamma}\text{Jac } (\sigma(x)Y)$$

has been used. We introduce at this point the following notation:

$$C_\gamma = \sup_x \mathbb{E}[\rho(A(x)A(x)^*)]. \tag{5.14}$$

Then, we have

$$|\nabla K(f)|^2 \leq C_\gamma K\left[|\nabla f|^2\right]. \tag{5.15}$$

Using Equations (5.15) and (5.13) in Equation (5.11), one gets

$$K^n\left(f^2\right) - \left(K^n f\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n c\gamma K^i\left(\left|\nabla K^{n-i} f\right|^2\right) \leq c\gamma\left(\sum_{i=1}^n (C_\gamma)^{n-i}\right) K^n\left(|\nabla f|^2\right),$$

which achieves the proof. $\square$

Remark 5.3.3. — *For the one-dimensional case, we have*

$$\nabla K(f)(x) = \mathbb{E}\Big[\Big(1 + b'(x)\gamma + \sqrt{2\gamma}\sigma'(x)Y\Big) f\Big(x + b(x)\gamma + \sqrt{2\gamma}\sigma(x)Y\Big)\Big].$$

The Cauchy-Schwarz inequality provides:

$$\begin{aligned} |\nabla K(f)|^2 &\le \mathbb{E}\Big[\Big(1 + b'(x)\gamma + \sqrt{2\gamma}\sigma'(x)Y\Big)^2\Big] K\big[|\nabla f|^2\big] \\ &\le \big((1 + b'(x)\gamma)^2 + 2\gamma\sigma'(x)^2\big) K\big[|\nabla f|^2\big], \end{aligned}$$

since Y is centered with variance 1. Then the "discrete time curvature criterion": for all $x \in \mathbb{R}$,

$$-\sigma'(x)^2 - b'(x) - \frac{\gamma}{2} b'(x)^2 \ge \rho,$$

provides the commutation relation:

$$|\nabla K(f)|^2 \le (1 - 2\gamma\rho) K\big(|\nabla f|^2\big).$$

A straightforward computation shows that the curvature criterion for the one-dimensional diffusion

$$dX_t = \sqrt{2}\sigma(X_t)\, dB_t + b(X_t)\, dt,$$

is equivalent to

$$\sigma\sigma'' + \frac{\sigma'}{\sigma} b - b' \ge \rho.$$

5.4. The general case in dimension one

The previous section has stressed that, when the diffusion coefficient is not constant, the Euler scheme does not satisfy the same commutation relation than the diffusion it approximates. Our aim is now to study, in dimension one, several approximating schemes which behavior is more closely related to the one of the diffusion process.

5.4.1. The commutation relation for the Bernoulli scheme. — Let us now introduce the approximation scheme with transition kernel J given by:

$$Jf(x) := \mathbb{E}\Big[f(x + \gamma b(x) + \sqrt{2\gamma}X)\Big],$$

where the law of X is the probability measure $(1/2)\delta_{-1} + (1/2)\delta_1$. The function $\sigma\nabla Jf$ is equal to:

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sigma(x)(1 + \gamma b'(x) + \sqrt{2\gamma}\sigma'(x)X)\Big) f'\Big(x + \gamma b(x) + \sqrt{2\gamma}\sigma(x)X\Big)\Big],$$

and can be rewritten as:

$$\sigma(x)\nabla Jf(x) = \mathbb{E}\Big[(1 - \alpha_x(\gamma))(\sigma f')\Big(x + \gamma b(x) + \sqrt{2\gamma}\sigma(x)X\Big)\Big],$$

where

$$\alpha_x(\gamma) := \frac{\sigma(x + \gamma b(x) + \sqrt{2\gamma}\sigma(x)X) - \sigma(x)(1 + \gamma b'(x) + \sqrt{2\gamma}\sigma'(x)X)}{\sigma(x + \gamma b(x) + \sqrt{2\gamma}\sigma(x)X)}.$$

The Taylor formula provides

$$\begin{aligned}\sigma\Big(x+\gamma b(x)+\sqrt{2\gamma}\sigma(x)X\Big) &= \sigma(x)+\sigma'(x)\Big(b(x)\gamma+\sqrt{2\gamma}\sigma(x)X\Big)\\ &\quad +\sigma''(x)\sigma(x)^2X^2\gamma+O(\gamma^{3/2}).\end{aligned}$$

Then we get that

$$\alpha_x(\gamma)=\left[\sigma(x)\sigma''(x)+\frac{\sigma'(x)b(x)}{\sigma(x)}-b'(x)\right]\gamma+O(\gamma^{3/2}),$$

since $X^2=1$ almost surely. The curvature criterion (5.5) leads to

$$\alpha_x(\gamma)\geq \rho\gamma+O(\gamma^{3/2}).$$

Then, if γ is sufficiently small,

$$|\sigma(x)\nabla Jf(x)|\leq \big[1-\rho\gamma+O(\gamma^{3/2})\big]J(|\sigma\nabla f|)(x).$$

Using the fact that the Bernoulli law satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant 2 (see [ABC$^+$00]), one can get that the iterated kernel J^n of the Bernoulli scheme satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant

$$\frac{2}{\rho+O(\gamma^{1/2})}\big(1-(1-\rho\gamma+O(\gamma^{3/2}))^{2n}\big).$$

5.4.2. Modified Milshstein schemes. — The previous result seems to be surprising since we have used the fact the Bernoulli r.v. satisfies $X^2=1$ a.s. Let us show what occurs for a modified Milshstein scheme. Consider the Markov chain with kernel

$$Jf(x):=\mathbb{E}\Big[f\Big(x+\gamma b(x)+\sqrt{2\gamma}Z+\sigma'(x)\sigma(x)(Z^2-1)\gamma\Big)\Big],$$

where the law of Z is a probability measure with compact support, mean 0 and variance 1. The Bernoulli scheme is an example of such scheme. As in the previous section, we compute $\sigma\nabla Jf$ and get:

$$\mathbb{E}\Big[(1-\beta_x(\gamma))(\sigma f')\Big(x+\gamma b(x)+\sqrt{2\gamma}\sigma Y+\sigma'(x)\sigma(x)(Y^2-1)\gamma\Big)\Big].$$

where

$$\beta_x(\gamma):=1-\frac{\sigma(x)\big(1+\gamma b'(x)+\sqrt{2\gamma}\sigma'(x)Y+\gamma(\sigma''(x)\sigma(x)+\sigma'(x)^2)(Y^2-1)\big)}{\sigma\big(x+\gamma b(x)+\sqrt{2\gamma}\sigma Y+\sigma'(x)\sigma(x)(Y^2-1)\gamma\big)}.$$

Then we use Taylor formula to expand $\beta_x(\gamma)$ and get

$$\beta_x(\gamma)=\left[\sigma(x)\sigma''(x)+\frac{\sigma'(x)b(x)}{\sigma(x)}-b'(x)\right]\gamma+O(\gamma^{3/2}).$$

The curvature criterion (5.5) leads to

$$\beta_x(\gamma)\geq\rho\gamma+O(\gamma^{3/2}).$$

Then, we get the commutation relation:

$$|\sigma(x)\nabla Jf(x)|\leq\big[1-\rho\gamma+O(\gamma^{3/2})\big]J(|\sigma\nabla f|)(x),$$

which allows us to establish a logarithmic Sobolev inequality for the iterated kernel J^n.

Proposition 5.4.1. — *Let μ be a probability measure with compact support, with mean 0 and variance 1 which satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant c. Then the iterated kernel J^n of the modified Milschstein scheme of increment μ satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant:*

$$\frac{c}{\rho + O(\gamma^{1/2})}\big(1 - (1 - \rho\gamma + O(\gamma^{3/2}))^{2n}\big).$$

5.5. Applications

One of the most useful properties of both Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities is that they are tensorisable.

Theorem 5.5.1. — *Let μ be a probability measure on $\mathbb{R}^d$. If μ satisfies a spectral gap (resp logarithmic Sobolev) inequality with constant C then the measure $\mu^{\otimes N}$ on $\mathbb{R}^{dN}$ still satisfies a spectral gap (resp logarithmic Sobolev) inequality with constant C.*

Moreover, they provide concentration properties *via* the Herbst's argument (see [Led99]). We will say that f is α-Lipschitz function if

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \alpha,$$

where $|\cdot|$ stands for the Euclidean norm.

Theorem 5.5.2. — *If a measure μ on $\mathbb{R}^d$ satisfies a spectral gap inequality with constant C then for every 1-Lipschitz (for the Euclidean norm) function*

$$\mathbb{P}(|f(X) - \mathbb{E}f(X)| \geq r) \leq 2e^{-r/C}.$$

If a measure μ on $\mathbb{R}^d$ satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant C then for every 1-Lipschitz (for the Euclidean norm) function

$$\mathbb{P}(|f(X) - \mathbb{E}f(X)| \geq r) \leq 2e^{-r^2/C}.$$

5.5.1. Monte Carlo methods for parabolic PDE's. — We present in this section the application of Theorem 5.5.2 to probabilistic numerical methods to solve PDE's. We study first the general case and we also investigate the case when σ is constant.

5.5.1.1. *The general case.* — Define the second order differential operator $\mathbf{L}$ by

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_{ij} + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i$$

where the $d \times d$ matrix a is defined by

$$a(\cdot) = \sigma(\cdot)\sigma^*(\cdot).$$

Consider the Cauchy problem

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u(t,x) = \mathbf{L}u(t,x) \quad \text{in } (0,T]\times\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x), \quad x\in\mathbb{R}^d. \end{array}\right. \tag{5.16}$$

The solution of (5.16) is given for every (t,x) in $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ by

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x f(X_t) = \mathbf{P}_t f(x),$$

where (X_t) is solution of the SDE:

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + \int_0^t b(X_s)\,ds. \tag{5.17}$$

In order to solve numerically (5.16), one has to mix the Euler scheme and the Monte-Carlo method. Let $(X_n^{\gamma,i})_{i=1,\dots,N}$ be N independent copies of the Euler scheme (5.1) and define

$$u^{\gamma,N}(t,x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f\left(X_t^{\gamma,i}(x)\right).$$

The problem is to give estimates for

$$|u(t,x) - u^{\gamma,N}(t,x)|.$$

A natural decomposition of this error is:

$$\begin{aligned} |u(t,x) - u^{\gamma,N}(t,x)| &\leq \left|u(t,x) - \mathbb{E}f\left(X_t^{\gamma,i}(x)\right)\right| \\ &\quad + \left|\mathbb{E}f\left(X_t^{\gamma,i}(x)\right) + u^{\gamma,N}(t,x)\right| \\ &:= \alpha^\gamma(t) + \beta^{\gamma,N}(t). \end{aligned}$$

The control of $\alpha^\gamma(t)$ can be efficient. In particular, it can be shown (see [TT90]) that

$$\alpha^\gamma = C(t)\gamma + O(\gamma^2).$$

The term $\beta^{\gamma,N}$ is usual controlled by standard technics involving central limit theorem or Berry-Essen inequalities. The Poincaré inequality provides better estimates. Indeed, we have the following exact confidence interval.

Theorem 5.5.3. — *If the coefficients a and b of Equation* (5.16) *are Lipschitz and bounded functions, then for every* 1*-Lipschitz function f and $r \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f\left(X_n^{\gamma,i}(x)\right) - \mathbb{E}f\left(X_n^{\gamma,i}(x)\right)\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\sqrt{N}r}{C_{\gamma,n}}\right).$$

Proof. — For every $i = 1,\dots,N$, the law of $(X_n^{\gamma,i}(x))$ satisfies a Poincaré inequality with constant $C_{\gamma,n}$ (see Equation (5.10)). By tensorisation (see Theorem 5.5.1) it is still true for $(X_n^{\gamma,i}(x))_{i=1,\dots,N}$. Then, applying the concentration inequality to the 1-Lipschitz function

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N f(x_i),$$

we get, for every $r \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} f\left(X_n^{\gamma,i}(x)\right) - \sqrt{N}\mathbb{E}f\left(X_n^{\gamma,i}(x)\right)\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{r}{C_{\gamma,n}}\right),$$

which achieves the proof. □

Corollary 5.5.4. — *If the coefficients a and b of Equation* (5.16) *are Lipschitz and bounded functions, then for every* 1*-Lipschitz function f and $r \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(X_n^{\gamma,i}(x)\right) - \mathbb{E}f(X_n(x))\right| \geq r + C(t)\gamma + O(\gamma^2)\right)$$

is bounded by $2\exp\left(-\frac{\sqrt{N}r}{C_{\gamma,n}}\right)$.

5.5.1.2. *The gradient case.* — Let us now investigate the case where the generator $\mathbf{L}$ is equal to

$$\mathbf{L}f(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x) - \nabla U(x)\cdot\nabla f(x).$$

We still associate to U the real λ defined in Equation (5.6).

Theorem 5.5.5. — *If the function ∇U is Lipschitz then the explicit Euler scheme satisfies the following concentration inequality:*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(X_t^{\gamma,i}(x)\right) - \mathbb{E}f\left(X_t^{\gamma,i}(x)\right)\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{D_{\gamma,t}}\right),$$

where $D_{\gamma,t}$ is defined in Equation (5.7).

If U is no longer Lipschitz then the implicit Euler scheme satisfies the following concentration inequality:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(X_t^{\gamma,i}(x)\right) - \mathbb{E}f\left(X_t^{\gamma,i}(x)\right)\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nr^2}{\overline{D}_{\gamma,t}}\right),$$

where $\overline{D}_{\gamma,t}$ is defined in Equation (5.9).

Remark 5.5.6. — *When λ is positive, $D_{\gamma,t}$ and $\overline{D}_{\gamma,t}$ are uniformly bounded by a constant D for every $t \in \mathbb{R}^+$ and $\gamma \in (0, \gamma_0]$. Then the previous confidence intervals are uniform in time* i.e. *for every $t \geq 0$.*

5.5.2. McKean-Vlasov equations. — The probabilistic Euler scheme is also efficient to solve numerically nonlinear PDE's. This section is dedicated to the study of McKean-Vlasov Equation which is given by:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}P_t = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}[x, P_t]P_t) - \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i[x, P_t]P_t) \\ P_0 \text{ is given,} \end{cases} \tag{5.18}$$

where P_t is a probability measure on $\mathbb{R}^d$ and

$$\begin{aligned}
b[x,p] &= \int_{\mathbb{R}^d} b(x,y)\,p(dy) \quad b(x,y) \text{ being a vector of } \mathbb{R}^d \\
a[x,p] &= \sigma[x,p]\sigma[x,p]^* \\
\sigma[x,p] &= \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x,y)\,p(dy) \quad \sigma(x,y) \text{ being a } d\times d \text{ matrix}
\end{aligned}$$

for p a probability measure on $\mathbb{R}^d$.

This equation has been introduced by [McK67] and then widely studied from both probabilistic and analytic points of view (see [Mél96] for a review). One of the ideas is to associate to Equation (5.18) the process $(\overline{X}_t)$ solution of the nonlinear stochastic differential equation:

$$\begin{cases} \overline{X}_t = \overline{X}_0 + \displaystyle\int_0^t \sigma\left[\overline{X}_s, P_s\right] dB_s + \int_0^t b\left[\overline{X}_s, P_s\right] ds \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t) = P_t, \end{cases}$$

where $\mathcal{L}(\overline{X}_t)$ stands for the law of $\overline{X}_t$.

This probabilistic interpretation suggests the introduction of the following particle system:

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \sigma(X_t^{i,N}, X_t^{j,N})dB_t^i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b(X_t^{i,N}, X_t^{j,N})\,dt \\ X_0^{i,N} = X_0^i, \quad i = \ldots, N, \end{cases}$$

where $(B_\cdot^i)_i$ are independent Brownian motions on $\mathbb{R}^d$. The idea is to replace the law P_t by the empirical measure μ_t^N of the particle system

$$\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}.$$

The convergence of the particle system to the nonlinear process has been deeply studied. In particular, it can be shown that the law of the particle system at time t satisfies a logarithmic Sobolev inequality with a constant which does not depend on the number of particles. This provides exact confidence intervals but they are not useful from a numerical point of view since those processes have to be simulated. A study of the convergence of the Euler scheme is performed by [BT96, BT97]. Moreover, according to the first section, the Euler scheme associated to the particle system satisfies a spectral gap inequality with a constant that does not depend on its size N. As a consequence, one can establish the following estimate.

Proposition 5.5.7. — *If the coefficients b and σ are bounded and Lipschitz functions then the Euler scheme associated to Equation* (5.18) *(*via *the mean field interacting particle system) satisfies, for every* 1*-Lipschitz function f and $r \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f\left(X_t^{\gamma,i,N}(x)\right) - \mathbb{E}f\left(X_t^{\gamma,i,N}(x)\right)\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\sqrt{N}r}{C_t^\gamma}\right).$$

5.5.3. The vortex method for the Navier-Stokes equation in dimension two. — The velocity $v(t,x)$ of viscous and incompressible fluid in the whole plan is driven by the Navier-Stokes Equation

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + (v\cdot\nabla)v(t,x) = \nu\Delta v(t,x) - \nabla p \\ \operatorname{div} v(t,x) = 0\,;\ v(t,x)\to 0 \text{ when } |x|\to\infty \end{array}\right. \tag{5.19}$$

where p is the pressure and $\nu > 0$ is the viscosity (assumed to be constant). This equation can be reformulated: let us introduce the vorticity $w(t,x)$ given by:

$$w(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(t,x) - \frac{\partial v}{\partial x_2}(t,x).$$

Then w is the solution of the following nonlinear PDE:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) + (v\cdot\nabla)w(t,x) = \nu\Delta w(t,x) \\ v(t,x) = \displaystyle\int K(x-y)w(t,y)\,dy \end{array}\right. \tag{5.20}$$

where K is the kernel of Biot and Savart defined by

$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2,x_1).$$

Equation (5.20) looks like a McKean-Vlasov equation with singular coefficients. In spite of this lack of regularity, it is possible to establish the existence of a weak solution for the associated SDE:

$$\left\{\begin{array}{l} d\overline{X}_t = \sqrt{2\nu}dB_t + K * w(t,\overline{X}_t)dt \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t) = w(t,y)\,dy. \end{array}\right. \tag{5.21}$$

To overcome the explosion of K at 0, one has to introduced a cutoffed kernel K_ε. Let us notice that K can be rewritten, for every x in $\mathbb{R}^2$, as

$$K(x) = \nabla^\perp g(|x|)$$

with

$$g(r) = -\frac{1}{2\pi}\log r \quad \textit{and} \quad \nabla^\perp F(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, -\frac{\partial F}{\partial x_2}\right).$$

For some $\varepsilon > 0$, let us consider g_ε such that $g_\varepsilon(r) = g(r)$ if $r > \varepsilon$ and extended on $[0,\varepsilon]$ in order to have $|g_\varepsilon'(r)| \le |g'(r)|$ and $|g_\varepsilon''(r)| \le |g''(r)|$. At last,

$$K_\varepsilon(x) = \nabla^\perp g_\varepsilon(|x|).$$

The introduction of those smoothing kernels is performed by [MP82]. Let us introduce the associated interacting particle system.

$$X_t^{i,N} = X_0^i + \sqrt{2B_t^i} + \int_0^t K_\varepsilon * \Pi_s^{N,\varepsilon}(X_s^{i,N})\,ds$$

where $\Pi_s^{N,\varepsilon}$ stands for the empirical measure of the system, i.e.

$$\Pi_s^{N,\varepsilon} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_s^{i,N}}.$$

There is propagation of chaos. More precisely, for every $T > 0$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\right|\right) \leq \frac{M_\varepsilon}{\sqrt{N}L_\varepsilon}\exp\left(c_0 T L_\varepsilon\right).$$

where $\overline{X}^i$ is solution of Equation (5.21) with B^i instead of B (see [Mél00]).

One could expect a similar result when $X_t^{i,N}$ is replaced by its approximating the Euler scheme X^γ. Furthermore, the law of X_n^γ satisfies a logarithmic Sobolev inequality which provides the following confidence interval: for every 1-Lipschitz function f,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_t^{\gamma,i,N}) - \mathbb{E}f(\overline{X}_t)\right| \geq r + \frac{M_\varepsilon}{\sqrt{N}L_\varepsilon}\exp\left(c_0 t L_\varepsilon\right)\right)$$

is bounded by $2\exp\left(-\dfrac{Nr^2}{K(t,\varepsilon)}\right)$ when the initial condition is a probability measure with compact support.

5.5.4. Granular media equations.

— In this section, we deal with the granular media equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left[\nabla u + u(\nabla V + \nabla W * u)\right],$$

where $*$ stands for the convolution and V and W are convex potentials on $\mathbb{R}^d$. This equation in $\mathbb{R}$ with $V = |x|^2/2$ and $W = |x|^3$ has been introduced by [BCP97] to describe the evolution of media composed of many particles colliding inelastically in a thermal bath.

It is possible to establish that the solution u_t of the nonlinear partial differential equation converge to an equilibrium distribution u_∞. The more intrinsic way to quantify this convergence is to use an generalization of the relative entropy:

$$\eta(u) = \int u\log u + \int uV + \frac{1}{2}\int\int W(x-y)u(x)u(y)$$

Theorem 5.5.8 ([CMV01]). — *If V is uniformly convex, i.e.* Hess $V \geq \lambda I$ *and W is even and convex then*

$$\eta(u_t) - \eta(u_\infty) \leq Ke^{-2\lambda t}$$

where u_∞ is the unique minimizer of η or equivalently the unique solution of

$$u_\infty = \frac{1}{Z}\exp\left(-V(x) - W * u_\infty(x)\right),$$

with

$$Z = \int \exp\left(-V(x) - W * u_\infty(x)\right)dx.$$

The granular media equations can be viewed as McKean-Vlasov equations. The associated particle system in mean field interaction is well defined and the propagation of chaos result holds uniformly in time (see [Mal01]):

$$\mathbb{E}\left(\left|X_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\right|\right) \leq \frac{c}{\sqrt{N}}.$$

The coefficients of the SDE which defines the particle system are not Lipschitz so the implicit Euler scheme has to be employed. At each step, one has to inverse a function with N variables (where N, the number of particles is great). This is not too hard when the potentials are uniformly convex since, in this case, the algorithm is efficient.

So, we can get confidence intervals for the convergence of the Euler scheme to u_∞.

Theorem 5.5.9. — *There exists a constant c such that, for every 1-Lipschitz function f,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(Y_t^{i,N,\gamma}) - \int f\, du_\infty\right| \geq r + c\sqrt{\gamma} + \frac{c}{\sqrt{N}} + ce^{-\lambda t}\right) \leq 2e^{-N\lambda r^2/2},$$

where $(Y_n^{N,\gamma})_{n\in\mathbb{N}}$ is the implicit Euler scheme with discretisation step γ associated to the interacting particle system.

Bibliography

[ABC+00] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto & G. Scheffer – *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[Bak97] D. Bakry – "On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups", *New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994)* (River Edge, NJ), Taniguchi symposium, World Sci. Publishing, 1997, p. 43–75.

[BCP97] D. Benedetto, E. Caglioti & M. Pulvirenti – "A kinetic equation for granular media", *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **31** (1997), no. 5, p. 615–641.

[BT96] M. Bossy & D. Talay – "Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles: application to the Burgers equation", *Ann. Appl. Probab.* **6** (1996), no. 3, p. 818–861.

[BT97] ______, "A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation", *Math. Comp.* **66** (1997), no. 217, p. 157–192.

[CMV01] J. Carrillo, R. McCann & C. Villani – "Kinetic equilibration rates for granular media", Work in progress, 2001.

[Led99] M. Ledoux – "Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities", Séminaire de Probabilités XXXIII. Lectures Notes in Math., vol 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 120–216.

[Mal01] F. Malrieu – "Logarithmic Sobolev inequalities for nonlinear PDE's", *Stochastic Process. Appl.* **95** (2001), no. 1, p. 109–132.

[McK67] H. P. McKean, Jr. – "Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations.", Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967), Air Force Office Sci. Res., Arlington, Va., 1967, p. 41–57.

[Mél96] S. Méléard – "Asymptotic behaviour of some interacting particle systems; McKean-Vlasov and Boltzmann models", Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995), Springer, Berlin, 1996, p. 42–95.

[Mél00] ______, "A trajectorial proof for the vortex method for the two-dimensional Navier-Stokes equation", *Ann. Appl. Probab.* **10** (2000), no. 4, p. 1197–1211.

[MP82] C. Marchioro & M. Pulvirenti – "Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory", *Comm. Math. Phys.* **84** (1982), no. 4, p. 483–503.

[Szn91] A.-S. Sznitman – "Topics in propagation of chaos", École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989. Lectures Notes in Math., vol 1464, Springer, Berlin, 1991, p. 165–251.

[Tal96] D. Talay – "Probabilistic numerical methods for partial differential equations: elements of analysis", Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995), Springer, Berlin, 1996, p. 148–196.

[TT90] D. Talay & L. Tubaro – "Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations", *Stochastic Anal. Appl.* **8** (1990), no. 4, p. 483–509 (1991).

ANNEXE A

LE CRITÈRE DE COURBURE-DIMENSION

A.1. Introduction

Après que GROSS a établi l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour les mesures gaussiennes, la question s'est posée de formuler des critères pour des mesures plus générales. L'objet de ce chapitre est de présenter l'un des pas les plus importants accomplis dans cette direction. Le critère de courbure-dimension, dû à BAKRY et EMERY, permet en effet d'établir des inégalités de POINCARÉ ou de SOBOLEV logarithmique pour un semi-groupe ou sa mesure invariante. L'idée est d'associer à un générateur de MARKOV sur une variété une « courbure » réelle et une « dimension » dans $[1, \infty]$ en extrapolant le cas du laplacien sur une variété riemannienne compacte.

Nous commençons par étudier le cas du semi-groupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK comme exemple fondamental de la méthode de semi-groupe qui constitue la clef de voûte du chapitre.

Après avoir présenté le critère de courbure en dimension infinie, nous montrons qu'il est une condition suffisante très pratique pour établir des inégalités de trou spectral ou de SOBOLEV logarithmique pour un semi-groupe de MARKOV, i.e. pour toutes les mesures $\mathbf{P}_t(\cdot)(x)$ uniformément en x. Nous établissons ensuite que le résultat reste vrai pour la mesure réversible du semi-groupe sous des conditions plus faibles (ce sont les critères intégrés). Le cas des générateurs de diffusion de la forme $\Delta - \nabla\Phi \cdot \nabla$ est l'exemple fondamental de toute cette étude.

Enfin, nous montrons que l'inégalité de courbure-dimension permet d'améliorer certains des résultats précédents. En particulier, elle fournit les constantes optimales des inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmique pour la mesure de volume sur la sphère de $\mathbb{R}^n$, mais aussi les inégalités entropie-énergie logarithmiques introduites au chapitre 4*.

A.2. L'exemple du semi-groupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK

Nous allons établir une nouvelle fois l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Toutefois, la méthode employée ici, dite de semi-groupe, se généralisera au cas d'une mesure sur une variété riemannienne et constituera la clef de ce chapitre.

Considérons le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^n$ comme il a été introduit au chapitre 2*. Rappelons que son générateur infinitésimal s'écrit, pour toute fonction f dans $\mathcal{A}$, l'algèbre standard associée,

$$\mathbf{L}f(x) = \Delta f(x) - x \cdot \nabla f(x),$$

qu'il admet γ, la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, pour mesure réversible et qu'il se représente ainsi :

$$\mathbf{P}_t f(x) = \mathbf{E}\Big(f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-t}}X)\Big)$$

où X suit une loi gaussienne centrée réduite. En particulier, le semi-groupe vérifie

$$\nabla \mathbf{P}_t f(x) = e^{-t}\mathbf{P}_t \nabla f(x). \tag{A.1}$$

De plus, il est clair que $\mathbf{P}_t f(x)$ converge vers $\mathbb{E}_\gamma(f)$ quand t tend vers $+\infty$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_\gamma(f) &= -\int\int_0^\infty \partial_s[\mathbf{P}_s f \log \mathbf{P}_s f]\, ds\, d\gamma \\
&= -\int\int_0^\infty (\log \mathbf{P}_s f + 1)\mathbf{L}\mathbf{P}_s f\, ds\, d\gamma \\
&= \int_0^\infty\int \nabla \log \mathbf{P}_s f \cdot \nabla \mathbf{P}_s f\, d\gamma\, ds = \int_0^\infty \int \frac{|\nabla \mathbf{P}_s f|^2}{\mathbf{P}_s f}\, d\gamma\, ds \qquad \text{(A.2)} \\
&\leq \int_0^\infty \int e^{-2s}\frac{(\mathbf{P}_s|\nabla f|)^2}{\mathbf{P}_s f}\, d\gamma\, ds \\
&\leq \int_0^\infty \int e^{-2s}\mathbf{P}_s\left(\frac{|\nabla f|^2}{f}\right) d\gamma\, ds \qquad \text{(A.3)} \\
&\leq \mathbf{E}_\gamma\left(\frac{|\nabla f|^2}{f}\right)\int_0^\infty e^{-2s}\, ds = \frac{1}{2}\mathbf{E}_\gamma\left(\frac{|\nabla f|^2}{f}\right),
\end{aligned}$$

où (A.2) est obtenue par réversibilité de γ et (A.3) découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En remplaçant f par f^2, on retrouve l'inégalité de Sobolev logarithmique de constante 2 pour la mesure gaussienne

$$\mathrm{Ent}_\gamma\big(f^2\big) \leq 2\mathbf{E}_\gamma\big(|\nabla f|^2\big).$$

Ainsi la clef du raisonnement est la relation (A.1) de commutation de $\mathbf{P}_t$ et de ∇. Nous allons voir que le critère de Bakry-Emery permet de caractériser les situations où

$$\sqrt{\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}_t f} \leq e^{-\rho t}\mathbf{P}_t\sqrt{\mathbf{\Gamma} f}$$

est vraie pour un certain ρ réel et tout t positif.

A.3. Définitions

Dans tout le chapitre, nous nous placerons sous l'hypothèse d'algèbre standard. Ceci permet de justifier les raisonnements de type semi-groupe qui utilisent des compositions de $\mathbf{P}_t$, $\mathbf{L}$, etc ...

***Hypothèse A.3.1* (de l'algèbre standard).** — *On suppose l'existence d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions (dite algèbre standard), incluse dans tous les espaces $\mathbf{L}^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, dense dans chacun d'eux. On demande à cette algèbre d'être stable par tous les opérateurs $\mathbf{P}_t$, ainsi que par $\mathbf{L}$, et par composition avec les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui sont nulles en 0. Lorsque la mesure μ est une probabilité, nous demanderons en plus que cette algèbre contienne les constantes, et soit stable par composition avec toutes les fonctions C^∞, sans restriction de nullité en 0.*

Rappelons brièvement la définition de l'opérateur carré du champ associé à un générateur $\mathbf{L}$: pour f et g dans $\mathcal{A}$,

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) = \frac{1}{2}[\mathbf{L}(fg) - f\mathbf{L}g - g\mathbf{L}f].$$

Nous pouvons à présent introduire l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$.

Définition A.3.2. — *On appelle* opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$ *la forme bilinéaire symétrique suivante : pour f et g dans $\mathcal{A}$,*

$$\mathbf{\Gamma_2}(f,g) \overset{déf.}{=} \frac{1}{2}[\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}(f,g) - \mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}g) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{L}f,g)]. \tag{A.4}$$

On notera $\mathbf{\Gamma}(f)$ et $\mathbf{\Gamma_2}(f)$ pour $\mathbf{\Gamma}(f,f)$ et $\mathbf{\Gamma_2}(f,f)$. La définition A.3.2 se comprend bien si l'on considère le procédé itératif suivant. On peut construire à partir d'une forme bilinéaire Q sur $\mathcal{A}$ une autre forme bilinéaire $\mathcal{B}(Q)$ en posant, pour f et g dans $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{B}(Q)(f,g) = \frac{1}{2}[\mathbf{L}Q(f,g) - Q(f,\mathbf{L}g) - Q(\mathbf{L}f,g)]. \tag{A.5}$$

Il est clair que si $Q(f,g) = fg$, alors

$$\mathcal{B}(Q) = \mathbf{\Gamma}(f,g) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(\mathcal{B}(Q)) = \mathbf{\Gamma_2}(f,g).$$

A.3.1. Exemple fondamental. — Nous présentons ici un exemple générique qui est d'ailleurs l'un des seuls cas où l'on soit capable d'expliciter les objets considérés. Nous nous plaçons sur $\mathbb{R}^n$ et nous nous donnons une fonction Φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\Phi}dx$ soit égale à 1. L'opérateur $\mathbf{L}$ défini par

$$\mathbf{L}f = \Delta f - \nabla\Phi \cdot \nabla f$$

admet pour mesure réversible μ de densité $\exp(-\Phi)$. En effet, pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned}
\int (\mathbf{L}f) g d\mu &= -\sum_{i=1}^n \int \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} d\mu + \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial f}{\partial x_i} g \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\mu \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial f}{\partial x_i} g \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\mu \\
&= -\int \nabla f \cdot \nabla g d\mu = \int f \mathbf{L} g d\mu.
\end{aligned}$$

On montre aussi que $\mathbf{\Gamma}(f,g) = \nabla f \cdot \nabla g$. Calculons à présent $\mathbf{\Gamma_2}(f)$. On a, indépendamment de μ,

$$\mathbf{L\Gamma}(f) = 2\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + 2\sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} - 2\sum_{i,j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

et

$$\begin{aligned} 2\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}f) &= 2\sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} - 2\sum_{i,j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &\quad -2\sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne, par définition de l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$,

$$\mathbf{\Gamma_2}(f) = \|\text{Hess } f\|_2^2 + (\nabla f)^\top(\text{Hess } \Phi)(\nabla f),$$

où

$$\|\text{Hess } f\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2.$$

Nous avons en fait retrouvé dans un cas particulier la formule de BOCHNER que nous utiliserons à nouveau un peu plus loin.

Remarque A.3.3. — *Si Δ désigne le laplacien sur $\mathbb{R}^n$, le calcul précédent montre que pour f et g dans $\mathcal{A}$,*

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) = \nabla f \cdot \nabla g \text{ et } \mathbf{\Gamma_2}(f) = \|\text{Hess } f\|_2^2.$$

On a donc, par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, *pour toute fonction f dans $\mathcal{A}$,*

$$\mathbf{\Gamma_2}(f) \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2.$$

A.3.2. Un peu de géométrie. — Afin de bien comprendre la pertinence du critère que nous allons introduire, il nous faut faire un peu de géométrie. Dans le paragraphe qui suit, nous tenterons d'allier simplicité et rigueur et nous renvoyons à [Cha93] ou [GHL90] pour une présentation complète.

Soit M une variété compacte de dimension n munie d'une métrique riemannienne g i.e. une application différentiable sur M qui à tout point x de M associe un produit scalaire sur l'espace tangent à M en x. On peut donc identifier g_x à une matrice définie positive. Nous désignerons alors son inverse par g_x^{-1}. Nous noterons enfin μ la mesure de volume normalisée associée à (M,g). Il existe sur M un opérateur, dit de LAPLACE-BELTRAMI, qui généralise la notion de laplacien sur $\mathbb{R}^n$ (et que nous noterons encore Δ). Son action sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ définit un générateur de MARKOV dont le semi-groupe associé est réversible sur $\mathbf{L}^2(\mu)$. On a de plus, pour toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\mathbf{\Gamma}(f) = g^{-1}(\nabla f, \nabla f).$$

La dernière notion de géométrie riemannienne dont nous aurons besoin est celle du tenseur de RICCI qui sera noté Ric. Pour une variété de dimension 2, ce tenseur s'exprime simplement

$$\mathrm{Ric}_x = K(x) g_x^{-1},$$

où $K(x)$ désigne la courbure scalaire (ou courbure de GAUSS) : c'est le produit de la plus petite et de la plus grande courbure en x des courbes tracées sur M. De manière générale, le tenseur de RICCI, dans un système de coordonnées locales, s'identifie à une matrice symétrique $n \times n$ et si $\rho(x)$ est sa plus petite valeur propre (par rapport au produit scalaire g_x^{-1}), il vient :

$$\mathrm{Ric}_x(\nabla f, \nabla f) \geq \rho(x) g_x^{-1}(\nabla f, \nabla f).$$

Puisque M est compacte, il existe un plus grand réel ρ tel que pour toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(M)$

$$\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geq \rho \mathbf{\Gamma}(f), \tag{A.6}$$

c'est l'infimum de $\rho(x)$ sur M. Enfin, la formule de BOCHNER (que nous admettrons ici) assure

$$\mathbf{\Gamma_2}(f) = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \|\mathrm{Hess\ f}\|_2^2.$$

Donc, d'après (A.6) et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, pour toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\mathbf{\Gamma_2}(f) \geq \rho \mathbf{\Gamma}(f) + \frac{1}{n}(\Delta f)^2. \tag{A.7}$$

Exemple 2. — *Pour la sphère de dimension* 2 *(resp. le tore ou l'espace hyperbolique de dimension* 2*), ρ est égal à* 1 *(resp.* -1*).*

Le langage de la géométrie a le mérite de s'affranchir des calculs dans les systèmes de coordonnées locales puisqu'il fournit un sens intrinsèque aux notions de laplacien ou de tenseur de RICCI. Nous allons toutefois expliciter, pour le lecteur courageux, les formules qui permettent de calculer l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$. On pourra omettre ce qui suit en première lecture.

Soit $\mathbf{L}$ un opérateur de diffusion sur une variété M de dimension n. Il s'écrit dans un système de coordonnées locales :

$$\mathbf{L} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

La matrice définie positive $(g_{ij})_{i,j}$ (l'inverse de $(g^{ij})_{i,j}$) munit $\mathbb{R}^n$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$) d'une métrique riemannienne. Grâce à la formule de BOCHNER, le calcul de $\mathbf{\Gamma_2}$ se ramène à celui du tenseur de RICCI associé à $\mathbf{L}$. Il est constitué de deux termes provenant respectivement des termes de second et de premier ordre de $\mathbf{L}$.

Introduisons tout d'abord les symboles de CHRISTOPHEL

$$\Gamma_{ki}^j \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n g^{ip} \left(\frac{\partial g_{pi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^p} \right) \text{ pour } i, j, k = 1, \ldots, n.$$

L'opérateur $\mathbf{L}$ s'écrit alors

$$\mathbf{L} = \Delta + X$$

où Δ est l'opérateur de LAPLACE-BELTRAMI associé à la structure riemannienne induite par g et X est le champ de vecteur donné par :

$$X^i = b^i + \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\Gamma^i_{kl}.$$

Le tenseur de courbure de RIEMANN associé à (M, g) est défini par

$$R^i_{qkl} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \sum_{p=1}^{n} \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk} - \sum_{p=1}^{n} \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} \text{ pour } i, q, k, l = 1, \dots, n.$$

Le tenseur de RICCI (R_{ql}) provenant du terme de second ordre s'écrit alors

$$R_{ql} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} R^i_{qil} \text{ pour } q, l = 1, \dots, n.$$

Celui qui provient du terme de dérive s'écrit quant à lui :

$$M_{ij} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2}\big(\nabla^i X^j + \nabla^j X^i\big)$$

où

$$\nabla^i X^j = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{n} \Gamma^j_{ki} X^k \text{ pour } i, j = 1, \dots, n.$$

Nous appellerons alors *tenseur de* RICCI *de* $\mathbf{L}$ la différence $R - M$.

Remarquons pour finir qu'il n'est pas très difficile de voir que, dans le cadre de notre exemple fondamental (voir section A.3.1), le tenseur de RICCI est bien égal à la matrice hessienne de Φ.

A.3.3. Le critère. — Une généralisation de la relation (A.7) va nous permettre d'associer à un opérateur différentiel des notions de « courbure » et de « dimension ». Cette idée permet d'unifier les exemples géométriques et analytiques $(\Delta - \nabla\Phi \cdot \nabla)$.

Définition A.3.4. — *Nous dirons que l'opérateur* $\mathbf{L}$ *vérifie une* inégalité de courbure-dimension $CD(\rho, m)$, *avec* $\rho \in \mathbb{R}$ *et* $m \in [1, \infty]$, *si pour toute fonction* f *de* $\mathcal{A}$,

$$\boldsymbol{\Gamma}_2(f) \geq \rho\boldsymbol{\Gamma}(f) + \frac{1}{m}(\mathbf{L}f)^2. \tag{A.8}$$

L'inégalité en dimension infinie

$$\boldsymbol{\Gamma}_2(f) \geq \rho\boldsymbol{\Gamma}(f) \tag{A.9}$$

est appelée *critère de courbure* ou *critère* $\boldsymbol{\Gamma}_2$.

Remarque A.3.5. — *Les laplaciens sont les seuls générateurs de* MARKOV *de diffusion (voir définition A.4.3) pour lesquels la dimension dans* $CD(\rho, m)$ *coïncide avec la dimension de la variété (pour les autres opérateurs, on a toujours* $m > n$*). En effet, on peut montrer (voir* [Bak94]*), dans le cadre général, la propriété suivante : le générateur* $\mathbf{L} = \Delta - \nabla\Phi \cdot \nabla$ *vérifie* $CD(\rho, m)$ *si et seulement si* $m \geq n$ *et*

$$(Ric(\Delta) - \nabla\nabla\Phi - \rho\boldsymbol{\Gamma})(m - n) \geq \nabla\Phi \otimes \nabla\Phi.$$

Remarque A.3.6. — *En reprenant les notations de la section A.3.1, l'opérateur* $\mathbf{L}$ *vérifie le critère* $CD(\rho,\infty)$ *si et seulement si* ρ *minore le spectre de Hess* Φ *sur tout* $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, l'opérateur $\mathbf{L}$ *étudié dans la section A.3.2 vérifie le critère* $CD(\rho,\infty)$ *si et seulement si*

$$R - M \geq \rho g^{-1}$$

en tout point de la variété (la minoration ci-dessus étant à prendre au sens des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$*).*

A.4. Courbure en dimension infinie et inégalités locales

Soit $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de Markov associé à $\mathbf{L}$. Nous appellerons inégalité locale une inégalité fonctionnelle vérifiée par les mesures $\mathbf{P}_t(\cdot)(x)$ uniformément en x. Nous allons voir qu'elles sont liées de façon très naturelle à $\mathrm{CD}(\rho,\infty)$.

A.4.1. L'inégalité de Poincaré locale. —

Proposition A.4.1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{CD}(\rho,\infty)$ *est vérifiée*

(ii) $\forall f\in\mathcal{A}, \forall t>0, \quad \mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_t f)\leq e^{-2\rho t}\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(f))$

(iii) $\forall f\in\mathcal{A}, \forall t>0, \quad \mathbf{P}_t(f^2)-(\mathbf{P}_t f)^2\leq \dfrac{1-e^{-2\rho t}}{\rho}\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(f)).$

Démonstration. —

(i)⇒(ii)

Soit $f\in\mathcal{A}$ et $t>0$. On considère la fonction $\Psi:[0,t]\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\Psi(s)=\mathbf{P}_s(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_{t-s}f)).$$

Remarquons que c'est pour que Ψ soit bien définie et pour que les calculs qui suivent soient licites que nous nous plaçons sur l'algèbre $\mathcal{A}$. On notera dans la suite g pour $\mathbf{P}_{t-s}f$. On a alors, d'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned}\Psi'(s) &= \mathbf{P}_s\left[\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}(g)-2\mathbf{\Gamma}(g,\mathbf{L}g)\right]\\ &= 2\mathbf{P}_s\mathbf{\Gamma}_2(g)\geq 2\rho\mathbf{P}_s\mathbf{\Gamma}(g)=2\rho\Psi(s).\end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme de Gronwall, $\Psi(t)\geq\Psi(0)\exp(2\rho t)$, ce qui n'est autre que (ii).

(ii)⇒(iii)

Posons à présent $\Psi(s)=\mathbf{P}_s[(\mathbf{P}_{t-s}f)^2]$ et encore $g=\mathbf{P}_{t-s}f$. Alors

$$\Psi'(s)=\mathbf{P}_s[\mathbf{L}(g^2)-2g\mathbf{L}g]=2\mathbf{P}_s(\mathbf{\Gamma}(g)).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_t(f^2) - (\mathbf{P}_t f)^2 = \Psi(t) - \Psi(0) &= 2\int_0^t \mathbf{P}_s \mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_{t-s} f)ds \\
&\le 2\int_0^t e^{-2\rho s}\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{t-s}\mathbf{\Gamma}(f)ds \qquad \text{(A.10)}\\
&= \left(2\int_0^t e^{-2\rho s}ds\right)\mathbf{P}_t\mathbf{\Gamma}(f) \qquad \text{(A.11)}\\
&= \frac{1-e^{-2\rho t}}{\rho}\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(f)).
\end{aligned}$$

(iii)⇒(i)
Par la formule de TAYLOR appliquée à $t \mapsto \mathbf{P}_t f$ en 0, il vient :

$$\mathbf{P}_t f = f + t\mathbf{L}f + \frac{t^2}{2}\mathbf{L}(\mathbf{L}f) + o(t^2).$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_t(f^2) - (\mathbf{P}_t f)^2 &= t\left[\mathbf{L}(f^2) - 2f\mathbf{L}f\right] \\
&\quad + \frac{t^2}{2}\left[\mathbf{L}\big(\mathbf{L}(f^2)\big) - 2f\mathbf{L}(\mathbf{L}f) - 2(\mathbf{L}f)^2\right] + o(t^2).
\end{aligned}$$

En utilisant deux fois la relation

$$\mathbf{L}(gh) = 2\mathbf{\Gamma}(g,h) + g\mathbf{L}h + h\mathbf{L}g,$$

on remarque que

$$\mathbf{L}(\mathbf{L}(f^2)) = 2\mathbf{L}[\mathbf{\Gamma}f + f\mathbf{L}f] = 2\left[\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}f + 2\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}f) + (\mathbf{L}f)^2 + f\mathbf{L}(\mathbf{L}f)\right].$$

Il vient donc

$$\mathbf{P}_t(f^2) - (\mathbf{P}_t f)^2 = 2t\mathbf{\Gamma}f + t^2[\mathbf{L}(\mathbf{\Gamma}f) + 2\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}f)] + o(t^2).$$

D'autre part,

$$\frac{1-e^{-2\rho t}}{\rho}\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(f)) = 2t\mathbf{\Gamma}f + 2t^2[\mathbf{L}(\mathbf{\Gamma}f) - \rho\mathbf{\Gamma}f] + o(t^2).$$

En comparant les deux développements grâce à l'assertion (iii), on obtient exactement la propriété (i). Remarquons que l'on n'utilise ici qu'un développement limité de $(1-e^{-2\rho t})/\rho$ à l'ordre 2 pour obtenir (i). On peut donc remplacer (iii) par une version affaiblie, i.e. remplacer $(1-e^{-2\rho t})/\rho$ par une fonction ϕ définie sur $[0,t_0]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\phi(t) = 2t - 2\rho t^2 + o(t^2) \text{ en } 0.$$

□

Remarque A.4.2. — *Chacune des assertions de la proposition A.4.1 est encore équivalente à*

$$\forall f \in \mathcal{A}, \forall t > 0, \quad \mathbf{P}_t(f^2) - (\mathbf{P}_t f)^2 \ge \frac{e^{2\rho t}-1}{\rho}\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_t f).$$

Il suffit en effet de remarquer que, de manière symétrique à (A.10), *(ii) assure aussi*

$$\mathbf{P}_s\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_{t-s}f) \geq e^{2\rho s}\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{t-s}f).$$

A.4.2. L'inégalité de Sobolev logarithmique locale. — On peut améliorer la proposition A.4.1 lorsque $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de diffusion. Nous donnons la définition générale qui permet de prendre en compte le cas des diffusions sur les variétés. Pour fixer les idées, on pourra penser à une diffusion comme un opérateur différentiel du second ordre sans terme constant.

$$\mathbf{L}f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

de matrice $(a_{ij})_{i,j}$ symétrique positive.

Définition A.4.3. — *On dit qu'un opérateur* $\mathbf{L}$ *est une* diffusion *si pour toute fonction* Φ*, de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$*, et toute fonction* $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *dans* $\mathcal{A}^n$*,*

$$\mathbf{L}(\Phi(f)) = \sum_i \Phi'_i(f)\mathbf{L}(f_i) + \sum_{i,j} \Phi''_{ij}(f)\mathbf{\Gamma}(f_i, f_j). \tag{A.12}$$

Par extension, on dira aussi qu'un semi-groupe est de diffusion lorsque son générateur infinitésimal est un opérateur de diffusion.

La propriété de diffusion (A.12) permet d'obtenir, par un calcul direct que nous ne détaillerons pas ici (et que l'on pourra trouver dans [Bak94]), les formules de changement de variables suivantes :

Lemme A.4.4. — *Soit* Φ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* f *égale à* $(f_1, ..., f_n)$ *un élément de* $\mathcal{A}^n$*. On a alors*

$$\mathbf{\Gamma}[\Phi(f)] = \sum_{i,j} \partial_i\Phi(f)\partial_j\Phi(f)\mathbf{\Gamma}(f_i, f_j) \tag{A.13}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma_2}[\Phi(f)] \quad = \quad & \sum_{i,j} \partial_i\Phi(f)\partial_j\Phi(f)\mathbf{\Gamma_2}(f_i, f_j) && \text{(A.14)}\\ & +2\sum_{i,j,k} \partial_i\Phi(f)\partial^2_{jk}\Phi(f)H(f_i)(f_j, f_k) \\ & + \sum_{i,j,k,l} \partial^2_{ij}\Phi(f)\partial^2_{kl}\Phi(f)\mathbf{\Gamma}(f_i, f_k)\mathbf{\Gamma}(f_j, f_l) && \text{(A.15)}\end{aligned}$$

où $\mathrm{H}(f)(g, h) = \dfrac{1}{2}[\mathbf{\Gamma}(g, \mathbf{\Gamma}(f, h)) + \mathbf{\Gamma}(h, \mathbf{\Gamma}(f, g)) - \mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{\Gamma}(g, h))]$.

On peut alors établir le résultat suivant :

Lemme A.4.5. — *Si* $\mathrm{CD}(\rho, \infty)$ *est vérifiée et* $\mathbf{L}$ *est un générateur de diffusion, on a*

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad 4\mathbf{\Gamma}(f)[\mathbf{\Gamma_2}(f) - \rho\mathbf{\Gamma}(f)] \geq \mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Gamma}(f)). \tag{A.16}$$

Preuve. — En utilisant la formule (A.14) pour une fonction Φ de deux variables qui vérifie

$$\partial_2\Phi = \partial^2_{11}\Phi = \partial^2_{22}\Phi = 0,\ \partial_1\Phi = 1 \text{ et } \partial^2_{12}\Phi = \alpha$$

au point $(f(x_0), g(x_0))$, le critère $\mathbf{\Gamma_2}$ appliqué à $\Phi(f)$ donne

$$\mathbf{\Gamma_2}(f) + 4\mathrm{H}(f)(f,g)\alpha + 2\big[\mathbf{\Gamma}(f,g)^2 + \mathbf{\Gamma}(f)\mathbf{\Gamma}(g)\big]\alpha^2 \geq \rho\mathbf{\Gamma}(f).$$

On écrit alors que le discriminant de ce trinôme est négatif. En remarquant que

$$\mathrm{H}(f)(f,g) = \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}(g, \mathbf{\Gamma}(f)) \text{ et } \mathbf{\Gamma}(f,g)^2 \leq \mathbf{\Gamma}(f)\mathbf{\Gamma}(g),$$

il vient :

$$\mathbf{\Gamma}(g, \mathbf{\Gamma}(f))^2 \leq 4[\mathbf{\Gamma_2}(f) - \rho\mathbf{\Gamma}(f)]\mathbf{\Gamma}(f)\mathbf{\Gamma}(g).$$

Il ne reste plus qu'à choisir g égale à $\mathbf{\Gamma}(f)$ pour achever la preuve. □

Ce lemme constitue une amélioration importante par rapport à la première partie puisqu'il entraîne le résultat suivant :

Proposition A.4.6. — *Si* $\mathbf{L}$ *est une diffusion, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{CD}(\rho,\infty)$ *est vérifiée*

(ii) $\forall f \in \mathcal{A}, \forall t > 0, \sqrt{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_t f)} \leq \exp(-\rho t)\mathbf{P}_t(\sqrt{\mathbf{\Gamma} f})$.

Remarque A.4.7. — *L'inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ *assure que*

$$(\mathbf{P}_t f)^2 \leq \mathbf{P}_t(f^2),$$

donc l'assertion (ii) ci-dessus renforce bien la propriété (ii) de la proposition A.4.1.

Remarquons encore que dans le cas où $\mathbf{L}$ *est de la forme* $\Delta - \nabla\Phi\cdot\nabla$ *sur* $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{\Gamma}$ *est tout simplement le carré de la norme du gradient et donc l'assertion (ii) s'écrit aussi*

$$|\nabla \mathbf{P}_t f| \leq \exp(-\rho t)\mathbf{P}_t|\nabla f|.$$

Preuve de la proposition A.4.6. —

(i)⇒(ii)

D'après le lemme A.4.5, il suffit de montrer que (A.16) implique (ii). Pour cela, considérons la fonction $\Psi(s) = \exp(-\rho s)\mathbf{P}_s\sqrt{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_{t-s} f)}$. On écrira encore $g = \mathbf{P}_{t-s} f$.

$$\Psi'(s) = -\rho\Psi(s) + \exp(-\rho s)\mathbf{P}_s[\mathbf{L}\sqrt{\mathbf{\Gamma}(g)}] - \exp(-\rho s)\mathbf{P}_s\left[\frac{\mathbf{\Gamma}(g, \mathbf{L}g)}{\sqrt{\mathbf{\Gamma}(g)}}\right].$$

D'après la formule de changement de variables (A.12), on a

$$\mathbf{L}\sqrt{\mathbf{\Gamma}(g)} = \frac{\mathbf{L}(\mathbf{\Gamma}(g))}{2\sqrt{\mathbf{\Gamma}(g)}} - \frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Gamma}(g))}{4\mathbf{\Gamma}(g)^{3/2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\Psi'(s) &= \exp(-\rho s)\mathbf{P}_s\left[\frac{\mathbf{L}(\mathbf{\Gamma}(g)) - 2\mathbf{\Gamma}(g,\mathbf{L}g)}{2\sqrt{\mathbf{\Gamma}(g)}} - \frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Gamma}(g))}{4(\mathbf{\Gamma}(g))^{3/2}} - \rho\sqrt{\mathbf{\Gamma}(g)}\right] \\ &= \exp(-\rho s)\mathbf{P}_s\left[\frac{4\mathbf{\Gamma}(g)(\mathbf{\Gamma}_2(g) - \rho\mathbf{\Gamma}(g)) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Gamma}(g))}{4(\mathbf{\Gamma}(g))^{3/2}}\right] \geq 0,\end{aligned}$$

donc Ψ est croissante et $\Psi(t) \geq \Psi(0)$, ce qui n'est autre que (ii).

(ii)⇒(i)

Il suffit de remarquer que la fonction qui à t positif associe

$$\phi(t) = \exp(-\rho t)\mathbf{P}_t(\sqrt{\mathbf{\Gamma} f}) - \sqrt{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_t f)}$$

est positive, nulle en 0 et dérivable. En particulier, $\phi'(0) \geq 0$, i.e. l'assertion (i) est vraie. □

Nous sommes à présent en mesure d'améliorer la proposition A.4.1.

Théorème A.4.8. — *Si* $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe de diffusion et* ρ *est un nombre réel, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{CD}(\rho,\infty)$ *est vérifiée*

(ii) *Pour tout* $f \in \mathcal{A}$ *et tout* $t > 0$,

$$\mathbf{P}_t(f^2\log f^2) - \mathbf{P}_t(f^2)\log\mathbf{P}_t(f^2) \leq \frac{2}{\rho}(1 - e^{-2\rho t})\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(f))$$

(iii) *Il existe une fonction* c *positive définie sur un intervalle* $[0,t_0]$ *qui s'écrit*

$$4t - 4\rho t^2 + o(t^2) \text{ en } 0,$$

telle que, pour toute f *dans* $\mathcal{A}$ *et* t *dans* $[0,t_0]$,

$$\mathbf{P}_t(f^2\log f^2) - \mathbf{P}_t(f^2)\log\mathbf{P}_t(f^2) \leq c(t)\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(f)).$$

Preuve. —

(ii)⇒(iii)

C'est immédiat.

(iii)⇒(i)

On utilise ici l'argument qui permet de comparer dans la section 1.2.6* les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique. Dans (iii), on remplace f par $1+\varepsilon g$. Pour toute mesure de probabilité ν, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\mathrm{Ent}_\nu(f)\big((1+\varepsilon g)^2\big) = 2\varepsilon^2\mathbf{Var}_\nu(g) + o(\varepsilon^2).$$

Comme de plus $\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(1+\varepsilon g)) = \varepsilon^2\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma} g)$, il vient

$$\mathbf{P}_t(g^2) - (\mathbf{P}_t g)^2 \leq \frac{c(t)}{2}\mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(g)),$$

qui est une inégalité de Poincaré locale qui est équivalente à $\mathrm{CD}(\rho,\infty)$ d'après la proposition A.4.1.

(i)⇒(ii)
Soit Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\Psi(s) = \mathbf{P}_s(\Phi(\mathbf{P}_{t-s}f))$. Par la propriété de diffusion (A.12),

$$\Psi'(s) = \mathbf{P}_s[\mathbf{L}\Phi(\mathbf{P}_{t-s}f) - \Phi'(\mathbf{P}_{t-s}f)\mathbf{L}\mathbf{P}_{t-s}f] = \mathbf{P}_s[\Phi''(\mathbf{P}_{t-s}f)\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}_{t-s}f].$$

En choisissant $\Phi(x) = x\log x$, on obtient, grâce à la proposition A.4.6,

$$\Psi'(s) = \mathbf{P}_s\left[\frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_{t-s}f)}{\mathbf{P}_{t-s}f}\right] \leq e^{-2\rho(t-s)}\mathbf{P}_s\left[\frac{\left[\mathbf{P}_{t-s}\sqrt{\mathbf{\Gamma}f}\right]^2}{\mathbf{P}_{t-s}f}\right].$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour toutes fonctions h et k positives,

$$\frac{(\mathbf{P}_{t-s}k)^2}{\mathbf{P}_{t-s}h} \leq \mathbf{P}_{t-s}\left(\frac{k^2}{h}\right). \tag{A.17}$$

Avec $h = f$ et $k = \sqrt{\mathbf{\Gamma}(f)}$, on obtient

$$\Psi'(s) \leq e^{-2\rho(t-s)}\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{t-s}\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right) = e^{-2\rho(t-s)}\mathbf{P}_t\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right).$$

Il ne reste plus qu'à écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_{\mathbf{P}_t(\cdot)}(f) &= \Psi(t) - \Psi(0)\\ &\leq \left(\int_0^t e^{-2\rho(t-s)}ds\right)\mathbf{P}_t\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right)\\ &\leq \frac{1}{2\rho}(1-e^{-2\rho t})\mathbf{P}_t\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right).\end{aligned}$$

On applique l'inégalité précédente à f^2 en utilisant $\mathbf{\Gamma}(f^2)/f^2 = 4\mathbf{\Gamma}(f)$. □

Remarque A.4.9. — *La propriété (i) est encore équivalente à*

$$\forall f\in\mathcal{A}, \forall t>0, \quad \mathbf{P}_t(f^2\log f^2) - \mathbf{P}_t(f^2)\log\mathbf{P}_t(f^2) \geq \frac{1}{2\rho}(e^{2\rho t}-1)\frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_t(f^2))}{\mathbf{P}_t(f^2)}.$$

Pour obtenir cette minoration, la preuve débute de la même manière, puis on écrit cette fois-ci

$$\Psi'(s) = \mathbf{P}_s\left[\frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_{t-s}f)}{\mathbf{P}_{t-s}f}\right] \geq \frac{\left[\mathbf{P}_s\sqrt{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_{t-s}f)}\right]^2}{\mathbf{P}_tf} \geq e^{2\rho s}\frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_tf)}{\mathbf{P}_tf}$$

grâce à (A.17).

Exemple 3. — *Nous allons retrouver ici de manière très rapide que la mesure gaussienne standard de* $\mathbb{R}^n$ *satisfait une inégalité de* Sobolev *logarithmique de constante 2 dont nous savons déjà qu'elle est optimale (voir théorème* 1.5.2**).*

Le laplacien dans $\mathbb{R}^n$ *vérifie le critère* $CD(0,\infty)$. *Le calcul des opérateurs* $\mathbf{\Gamma}$ *et* $\mathbf{\Gamma_2}$ *est un cas particulier de l'exemple fondamental détaillé dans la section A.3.1. D'autre part, le semi-groupe associé au laplacien (dit* semi-groupe de la chaleur*)* *admet la représentation suivante : pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ à dérivées bornées,*

$$\mathbf{P}_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \frac{dy}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Remarquons que $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ est aussi, à une renormalisation en temps près, le semi-groupe du mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^n$.

Appliquons à présent le théorème A.4.8. La constante $2(1-e^{-2\rho t})/\rho$ se prolonge en $4t$ pour ρ nulle. Enfin, remarquons que pour $t = 1/2$ et $x = 0$, on retrouve l'inégalité de Sobolev *logarithmique pour la gaussienne standard, ce qui achève notre propos.*

Remarque A.4.10. — *Sous les hypothèses du théorème A.4.8, on peut encore montrer que $CD(\rho, \infty)$ est équivalente à une autre inégalité locale, dite d'isopérimétrie gaussienne fonctionnelle (voir* [BL96]*).*

A.5. Inégalités pour la mesure réversible et critères intégrés

Lorsque $\rho > 0$, le critère de courbure permet d'obtenir les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique pour la mesure invariante et le carré du champ associés à l'opérateur $\mathbf{L}$. Il suffit pour cela de supposer que le semi-groupe est ergodique :

Définition A.5.1. — *Un semi-groupe $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ de mesure invariante μ est dit* ergodique*, au sens $\mathbf{L}^2(\mu)$, si*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_t f = \mathbf{E}_\mu(f) \text{ dans } \mathbf{L}^2(\mu).$$

Une condition suffisante d'ergodicité est que l'opérateur $\mathbf{\Gamma}$ ne s'annule que pour les fonctions constantes (voir [Bak94]). Dans l'exemple fondamental A.3.1, les semi-groupes associés aux opérateurs de la forme $\Delta - \nabla\Phi \cdot \nabla$ sont toujours ergodiques puisqu'alors $\mathbf{\Gamma}(f)$ est égal à $|\nabla f|^2$.

Si $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ est ergodique et $\rho > 0$, on peut faire tendre t vers l'infini dans la proposition A.4.1 pour montrer que μ vérifie l'inégalité de Poincaré de constante $1/\rho$ et dans le théorème A.4.8 pour montrer que μ vérifie l'inégalité de Sobolev logarithmique de constante $2/\rho$.

Considérons à nouveau l'exemple A.3.1. La question naturelle est alors de déterminer à quelle condition la mesure μ de densité $\exp(-\Phi)$ par rapport à la mesure de Lebesgue vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique. Une condition suffisante évidente est alors de supposer Φ strictement uniformément convexe c'est-à-dire que le spectre de la matrice hessienne de Φ est minoré par un nombre strictement positif.

Corollaire A.5.2. — *Si la fonction Φ sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme la somme d'une fonction strictement uniformément convexe U et d'une fonction bornée B, alors la mesure de probabilité μ de densité $Z_\Phi^{-1}\exp(-\Phi)$ vérifie une inégalité de* Sobolev *logarithmique.*

Preuve. — L'opérateur défini pour f dans $\mathcal{A}$ par

$$\mathbf{L}f = \Delta f - \nabla U \cdot \nabla f$$

a pour mesure réversible la mesure de probabilité $Z_U^{-1}\exp(-U)$ et vérifie le critère $\mathrm{CD}(\rho,\infty)$ pour un certain $\rho>0$ car

$$\mathbf{\Gamma_2}(f) = \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 + (\mathrm{Hess} U \nabla f)\cdot\nabla f \geq \rho|\nabla f|^2 = \rho\mathbf{\Gamma}(f).$$

La mesure $Z_U^{-1}\exp(-U)$ vérifie donc une inégalité de SOBOLEV logarithmique de constante $2/\rho$. On utilise ensuite le théorème de perturbation 3.4.3* pour conclure.

□

Toutefois, ce critère peut être affaibli lorsque l'on s'intéresse uniquement à la mesure réversible, comme le montrent les résultats qui suivent.

A.5.1. L'inégalité de POINCARÉ pour la mesure réversible. — Dans toute la suite du chapitre, nous nous placerons sous l'hypothèse de réversibilité de la mesure invariante. Nous regroupons dans la remarque suivante les conséquences de cette hypothèse auxquelles nous aurons recours de manière intensive.

Remarque A.5.3. — *Si la mesure invariante est réversible, on a en particulier :*

$$\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f,g)) = -\mathbf{E}_\mu(f\mathbf{L}g) \ \textit{et}\ \mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma_2} f) = -\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}f)) = \mathbf{E}_\mu\big((\mathbf{L}f)^2\big). \tag{A.18}$$

Proposition A.5.4. — *Si $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ admet μ pour mesure réversible, est ergodique et si $\rho>0$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall f\in\mathcal{A},\quad \mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma_2}(f)) \geq \rho\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f))$

(ii) $\forall f\in\mathcal{A},\quad \mathbf{Var}_\mu(f) \leq \dfrac{1}{\rho}\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f)).$

Preuve. —

(ii)⇒(i)

L'invariance de la mesure et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ assurent que

$$-\int f\mathbf{L}f\,d\mu = \int(\mathbf{E}_\mu(f)-f)\mathbf{L}f\,d\mu \leq (\mathbf{Var}_\mu(f))^{1/2}\left(\int(\mathbf{L}f)^2d\mu\right)^{1/2},$$

donc, par (A.18) et (ii), il vient

$$\int\mathbf{\Gamma}(f)d\mu \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\int\mathbf{\Gamma}(f)d\mu\right)^{1/2}\left(\int\mathbf{\Gamma_2}(f)d\mu\right)^{1/2}.$$

(i)⇒(ii)

La clé est d'écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}_\mu(f) &= -\int\int_0^\infty \frac{d}{ds}(\mathbf{P}_s f)^2 ds\,d\mu\\ &= -2\int_0^\infty\int(\mathbf{P}_s f)\mathbf{L}\mathbf{P}_s f\,d\mu\,ds = 2\int_0^\infty\int\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s f)d\mu\,ds.\end{aligned}$$

Posons $\Psi(s)=\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s f))$. On a alors

$$\begin{aligned}\Psi'(s) &= 2\int\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s f,\mathbf{L}\mathbf{P}_s f)d\mu\\ &= -2\int\mathbf{\Gamma_2}(\mathbf{P}_s f)d\mu \leq -2\rho\int\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s f)d\mu = -2\rho\Psi(s).\end{aligned}$$

On a donc $\Psi(s) \leq \exp(-2\rho s)\Psi(0)$, d'après le lemme de GRONWALL. Ceci donne

$$2\int_0^\infty \Psi(s)ds \leq \left(2\int_0^\infty \exp(-2\rho s)ds\right)\int \mathbf{\Gamma}(f)d\mu,$$

ou encore

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{\rho}\int \mathbf{\Gamma}(f)d\mu.$$

□

A.5.2. L'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour la mesure réversible. — Nous venons de voir un critère intégré pour l'inégalité de POINCARÉ. Sous l'hypothèse supplémentaire de diffusion nous allons établir un critère suffisant mais non nécessaire pour l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Nous suivrons ici le même schéma que dans la proposition A.5.4 en écrivant :

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int\int_0^\infty \mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s f, \log \mathbf{P}_s f)dsd\mu$$

puis en calculant la dérivée de $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s f, \log \mathbf{P}_s f)$. Nous rassemblons dans le lemme suivant (dont la preuve peut être omise en première lecture) les relations qui permettent de simplifier les expressions qui découlent de cette dérivation.

Lemme A.5.5. — *Si* $\mathbf{L}$ *est un générateur de diffusion, on a, pour toutes fonctions* ϕ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et* f *dans* $\mathcal{A}$,

$$\mathbf{E}_\mu\big(\phi(f)(\mathbf{L}f)^2\big) = \mathbf{E}_\mu\left(\phi(f)\mathbf{\Gamma_2}(f) + \frac{3}{2}\phi'(f)\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f)) + \phi''(f)(\mathbf{\Gamma}(f))^2\right) \tag{A.19}$$

et

$$\mathbf{E}_\mu(\phi(f)\mathbf{L}(f)\mathbf{\Gamma}(f)) = -\mathbf{E}_\mu\big(\phi(f)\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f)) + \phi'(f)(\mathbf{\Gamma}(f))^2\big). \tag{A.20}$$

En particulier :

$$\mathbf{E}_\mu\left(\frac{1}{f}(\mathbf{L}f)^2\right) = \mathbf{E}_\mu\left(\frac{1}{f}\mathbf{\Gamma_2}(f) - \frac{3}{2}\frac{1}{f^2}\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f)) + \frac{2}{f^3}(\mathbf{\Gamma}f)^2\right), \tag{A.21}$$

$$\mathbf{E}_\mu\left(\frac{1}{f^2}\mathbf{L}(f)\mathbf{\Gamma}(f)\right) = \mathbf{E}_\mu\left(-\frac{1}{f^2}\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f)) + \frac{2}{f^3}(\mathbf{\Gamma}f)^2\right). \tag{A.22}$$

Preuve. — Démontrons tout d'abord (A.19). Rappelons que l'hypothèse de diffusion confère à $\mathbf{\Gamma}$ les propriétés suivantes : d'une part, $\mathbf{\Gamma}$ est une dérivation, i.e.

$$\mathbf{\Gamma}(f, gh) = g\mathbf{\Gamma}(f,h) + h\mathbf{\Gamma}(f,g), \tag{A.23}$$

d'autre part, la formule de changement de variables (A.13) donne

$$\mathbf{\Gamma}(\phi(f),\psi(g)) = \phi'(f)\psi'(g)\mathbf{\Gamma}(f,g). \tag{A.24}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\mu\big[\phi(f)(\mathbf{L}f)^2\big] &= \mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{L}(f)\phi(f)\mathbf{L}(f)\Big] = -\mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}\big(f,\phi(f)\mathbf{L}(f)\big)\Big]\\ &= -\mathbf{E}_\mu\Big[\phi(f)\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}(f))\Big] - \mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}(f,\phi(f))\mathbf{L}(f)\Big]\end{aligned}$$

par (A.18) et la propriété (A.23) de dérivation de $\mathbf{\Gamma}$. En utilisant la définition de $\mathbf{\Gamma_2}$, il vient

$$\begin{aligned}
-\mathbf{E}_\mu\Big(\phi(f)\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}f)\Big) &= \mathbf{E}_\mu\Big(\phi(f)\mathbf{\Gamma_2}(f) - \frac{1}{2}\phi(f)\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}(f)\Big) \\
&= \mathbf{E}_\mu\Big(\phi(f)\mathbf{\Gamma_2}(f) + \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}(\phi(f),\mathbf{\Gamma}(f))\Big) \\
&= \mathbf{E}_\mu\Big(\phi(f)\mathbf{\Gamma_2}(f) + \frac{1}{2}\phi'(f)\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f))\Big)
\end{aligned}$$

grâce à (A.18) et (A.24). D'autre part, toujours avec (A.18), (A.24) et (A.23), il vient :

$$\begin{aligned}
-\mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}(f,\phi(f))\mathbf{L}f\Big] &= \mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}\big(f,\mathbf{\Gamma}(f,\phi(f))\big)\Big] = \mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}(f,\phi'(f)\mathbf{\Gamma}(f))\Big] \\
&= \mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f))\phi'(f) + \mathbf{\Gamma}(f)\mathbf{\Gamma}(f,\phi'(f))\Big] \\
&= \mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f))\phi'(f) + \phi''(f)(\mathbf{\Gamma}(f))^2\Big].
\end{aligned}$$

L'équation (A.20) est plus simple à établir, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\mu\Big[\phi(f)\mathbf{\Gamma}(f)\mathbf{L}f\Big] &= -\mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}(f,\phi(f)\mathbf{\Gamma}(f))\Big] \\
&= -\mathbf{E}_\mu\Big[\phi(f)\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f)) + \phi'(f)(\mathbf{\Gamma}(f))^2\Big].
\end{aligned}$$

Pour obtenir (A.21) et (A.22), il suffit de prendre $\phi(x) = 1/x$ et $\phi(x) = 1/x^2$. □

Nous sommes à présent en mesure d'établir le résultat annoncé.

Proposition A.5.6. — *Soit $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion réversible et ergodique par rapport à μ et soit $\rho > 0$, satisfaisant l'assertion suivante, dite critère super intégral,*

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{E}_\mu\big(e^f\mathbf{\Gamma_2}(f)\big) \geq \rho\mathbf{E}_\mu\big(e^f\mathbf{\Gamma}(f)\big). \tag{A.25}$$

Alors la mesure μ vérifie l'inégalité de Sobolev *logarithmique*

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad Ent_\mu\big(f^2\big) \leq \frac{2}{\rho}\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f)).$$

Preuve. — On écrit de manière analogue à la preuve de la proposition A.5.4

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_\mu(f) &= -\int\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[\mathbf{P}_s f\log\mathbf{P}_s f\right] ds d\mu \\
&= -\int\int_0^\infty (\mathbf{L}\mathbf{P}_s f)\log\mathbf{P}_s f\, ds d\mu \\
&= \int\int_0^\infty \mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s f,\log\mathbf{P}_s f) ds d\mu.
\end{aligned}$$

Posons $\Psi(s) = \mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_s f, \log \mathbf{P}_s f))$. Par la formule de dérivation des fonctions composées, en notant $g = \mathbf{P}_s f$, on a :

$$\begin{aligned}\Psi'(s) &= \mathbf{E}_\mu\left(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{L}g, \log g) + \mathbf{\Gamma}\left(g, \frac{1}{g}\mathbf{L}g\right)\right) \\ &= \mathbf{E}_\mu\left(-(\mathbf{L}g)(\mathbf{L}\log g) - \frac{(\mathbf{L}g)^2}{g}\right).\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{L}(\log g) = (\mathbf{L}g)/g - \mathbf{\Gamma}(g)/g^2$, il vient

$$\Psi'(s) = -\mathbf{E}_\mu\big(2(\mathbf{L}g)^2/g - \mathbf{L}g\mathbf{\Gamma}(g)/g^2\big).$$

Utilisons alors (A.21) et (A.22) pour obtenir

$$\Psi'(s) = -2\mathbf{E}_\mu\left(\frac{1}{g}\mathbf{\Gamma_2}(g) - \frac{1}{g^2}\mathbf{\Gamma}(g, \mathbf{\Gamma}(g)) + \frac{1}{g^3}(\mathbf{\Gamma}g)^2\right).$$

Enfin, grâce au lemme A.4.4 de changement de variables pour l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$,

$$\Psi'(s) = -2\mathbf{E}_\mu(g\mathbf{\Gamma_2}(\log g)).$$

Le critère super intégral (A.25) assure donc que

$$\Psi'(s) \leq -2\rho\mathbf{E}_\mu(g\mathbf{\Gamma}(\log g))) = -2\rho\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(g, \log g)) = -2\rho\Psi(s)$$

et par suite $\Psi(s) \leq e^{-2\rho s}\Psi(0)$. Ceci entraîne

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leq \left(\int_0^\infty e^{-2\rho s} ds\right) \mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f, \log f)) = \frac{1}{2\rho}\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f, \log f)).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer ce résultat à f^2 pour obtenir

$$\mathrm{Ent}_\mu\big(f^2\big) \leq \frac{1}{2\rho}\mathbf{E}_\mu\Big[\mathbf{\Gamma}\big(f^2, \log(f^2)\big)\Big] = \frac{2}{\rho}\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f)).$$

□

On peut bien sûr se demander si l'équivalence a lieu dans la proposition précédente. Helffer a construit l'exemple suivant où elle est mise en défaut.

Exemple 4. — *Soit $\alpha > 0$, et $a, b \in \mathbb{R}$. Considérons la mesure de probabilité*

$$\mu(dx) = Z^{-1}e^{-\alpha(x^4 - bx^2)}dx$$

où Z est la constante de normalisation ; on notera $\Phi(x) = \alpha(x^4 - bx^2)$. On lui associe naturellement l'opérateur

$$\mathbf{L}f = f'' - \alpha(4x^3 - 2bx)f'$$

pour lequel μ est réversible (voir section A.3.1). La mesure μ vérifie une inégalité de Sobolev *logarithmique (cela se voit grâce au corollaire A.5.2) mais on va montrer que, si $f(x) = \alpha a x^2$, alors $\int e^f \mathbf{\Gamma_2}(f)d\mu$ est strictement négatif pour certaines valeurs des paramètres. Le critère super intégral sera ainsi clairement mis en défaut. D'après la section A.3.1,*

$$\int e^f\mathbf{\Gamma_2}(f)d\mu = \frac{(2\alpha a)^2}{Z}\int_{\mathbb{R}}[1 + \alpha(12x^4 - 2bx^2)]e^{-\alpha(x^4-(a+b)x^2)}dx$$

qui est du signe de

$$\int_{\mathbb{R}} \left[1 + 12x^4/\alpha - 2bx^2\right] e^{-\frac{x^4}{\alpha}+(a+b)x^2} dx.$$

Sous la condition $a+b<0$, la limite du membre de droite, quand α tend vers l'infini, est du signe de

$$\int_{\mathbb{R}} (1-2bx^2) e^{(a+b)x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{b}{a+b}\right) e^{(a+b)x^2} dx.$$

Donc si a et b vérifient simultanément $a+b<0$ et $a+2b>0$ (par exemple $a=-3$ et $b=2$), pour α assez grand, $\int e^f \mathbf{\Gamma_2}(f) d\mu < 0$. La relation (A.25) *ne peut donc pas être satisfaite.*

A.6. Le cas de la dimension finie

On suppose dans cette partie que $\mathbf{L}$ vérifie $\mathrm{CD}(\rho, m)$ avec $\rho > 0$ et $m > 1$ et qu'il est symétrique par rapport à la mesure μ. Ceci permet d'améliorer les constantes des inégalités de POINCARÉ et SOBOLEV logarithmique (pour la mesure invariante) données par le critère.

A.6.1. Inégalité de POINCARÉ. — En intégrant $\mathrm{CD}(\rho, m)$ et en utilisant encore la formule d'intégration par parties (A.18), on a

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma_2}(f)) \geq \frac{m\rho}{m-1} \mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f)).$$

Ceci montre, grâce à la proposition A.5.4, que μ vérifie l'inégalité de POINCARÉ

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{Var}_\mu(f) \leq \frac{m-1}{m\rho} \mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f)).$$

A.6.2. Inégalité de SOBOLEV logarithmique. — On peut arriver à la même amélioration pour cette inégalité en ajoutant l'hypothèse de diffusion :

Théorème A.6.1. — *Si $\mathbf{L}$ est un générateur de diffusion de mesure réversible μ et vérifie $CD(\rho, m)$ avec ρ strictement positif alors*

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad Ent_\mu(f^2) \leq 2\frac{m-1}{m\rho} \mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f)).$$

Preuve. — La méthode est la même que pour l'inégalité de POINCARÉ : on montre que $\mathrm{CD}(\rho, m)$ implique (A.25) avec la bonne constante. Pour cela, appliquons le critère $\mathrm{CD}(\rho, m)$ à $f^{\beta+1}$ où f est une fonction positive de $\mathcal{A}$ et β est un réel quelconque. En utilisant la formule (A.14) du changement de variables pour $\mathbf{\Gamma_2}$ et en divisant par $(\beta+1)^2$, on obtient que

$$f^{2\beta} \mathbf{\Gamma_2}(f) + \beta f^{2\beta-1} \mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{\Gamma}(f)) + \beta^2 f^{2\beta-2} (\mathbf{\Gamma} f)^2$$

est supérieur à

$$\rho f^{2\beta} \mathbf{\Gamma}(f) + \frac{1}{m}\left[f^\beta \mathbf{L} f + \beta f^{\beta-1} \mathbf{\Gamma}(f)\right]^2.$$

Divisons les deux membres de l'inégalité par $f^{2\beta+1}$ et intégrons. Après avoir développé le carré, on utilise (A.21) et (A.22) et on obtient en regroupant les termes et multipliant par $m/(m-1)$:

$$\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma_2}(f)}{f}+\frac{(m+2)\beta+3/2}{m-1}\frac{\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f))}{f^2}+\left(\beta^2-2\frac{2\beta+1}{m-1}\right)\frac{(\mathbf{\Gamma}f)^2}{f^3}\right)$$

est supérieur à

$$\frac{m\rho}{m-1}\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right).$$

Choisissons alors

$$\beta=-\frac{2m+1}{2(m+2)}\text{ pour que }\frac{(m+2)\beta+3/2}{m-1}=-1.$$

Ceci assure que

$$\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma_2}(f)}{f}-\frac{\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}f)}{f^2}+\frac{(\mathbf{\Gamma}f)^2}{f^3}\right)$$

est supérieur ou égal à

$$\frac{m\rho}{m-1}\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}+\frac{4m-1}{4(m+2)^2}\frac{(\mathbf{\Gamma}f)^2}{f^3}\right).$$

On minore alors ce dernier terme par

$$\frac{m\rho}{m-1}\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right).$$

Enfin, on a

$$\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right)=\mathbf{E}_\mu(f\mathbf{\Gamma}(\log f)),$$

et par la formule de changement de variables (A.14),

$$\mathbf{E}_\mu(f\mathbf{\Gamma_2}(\log f))=\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma_2}(f)}{f}-\frac{\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f))}{f^2}+\frac{(\mathbf{\Gamma}f)^2}{f^3}\right).$$

Ceci nous donne le critère super intégral (A.25) avec la constante

$$m\rho/(m-1)$$

et achève la preuve. □

Remarque A.6.2. — *Ce critère de courbure-dimension est optimal. En effet, il fournit la meilleure constante pour les sphères de rayon* 1 *dans* $\mathbb{R}^{n+1}$. *En effet, ces variétés satisfont* $CD(n-1,n)$ *et la première valeur propre non nulle de leur laplacien est* $-n$ *(voir* [Ber77] *ou* [GHL90]*).*

A.6.3. Inégalité entropie-énergie logarithmique. — Nous allons à présent voir que le critère de courbure-dimension permet d'aller encore plus loin puisqu'il implique des inégalités entropie-énergie logarithmiques. Celles-ci ont été introduites au chapitre 4*.

Théorème A.6.3. — *Si* $\mathbf{L}$ *est un générateur de diffusion de mesure réversible* μ *et vérifie*

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{E}_\mu\big(e^f \mathbf{\Gamma_2}(f)\big) \geq \rho \mathbf{E}_\mu\big(e^f \mathbf{\Gamma}(f)\big) + \frac{1}{m}\mathbf{E}_\mu\big(e^f (\mathbf{L}f)^2\big) \tag{A.26}$$

avec $\rho > 0$ *et* $m > 1$*, alors il satisfait à l'inégalité entropie-énergie logarithmique suivante :*

$$Ent_\mu\big(f^2\big) \leq \frac{m}{2}\mathbf{E}_\mu\big(f^2\big)\log\left(1 + \frac{4}{\rho m}\frac{\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f))}{\mathbf{E}_\mu(f^2)}\right).$$

Preuve. — En changeant f^2 en f, on est ramené à montrer que

$$\mathbf{E}_\mu(f) = 1 \Rightarrow \mathbf{E}_\mu(f\log f) \leq \frac{m}{2}\log\left(1 + \frac{1}{\rho m}\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right)\right).$$

Pour f positive dans $\mathcal{A}$, posons

$$\Phi(t) = \mathbf{E}_\mu(\mathbf{P}_t f \log \mathbf{P}_t f).$$

Nous noterons encore $g = \mathbf{P}_t f$. Remarquons que $\Phi(\infty)$ est égal à 0 et que, comme nous l'avons vu dans la preuve de la proposition A.5.6,

$$\Phi'(t) = -\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(g, \log g)) < 0 \quad \text{et} \quad \Phi''(t) = 2\mathbf{E}_\mu(g\mathbf{\Gamma_2}(\log g)).$$

Si f est de moyenne 1, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ assure que

$$(\mathbf{E}_\mu(f\mathbf{L}\log f))^2 \leq \mathbf{E}_\mu\big(f(\mathbf{L}\log f)^2\big).$$

Donc l'inégalité (A.26) appliquée à $\log g$ implique que

$$\mathbf{E}_\mu(g\mathbf{\Gamma_2}(\log g)) \geq \rho\mathbf{E}_\mu(g\mathbf{\Gamma}(\log g)) + \frac{1}{m}(\mathbf{E}_\mu(g\mathbf{L}\log g))^2.$$

Par suite, Φ vérifie l'inégalité différentielle suivante :

$$\Phi''(t) \geq -2\rho\Phi'(t) + \frac{2}{m}\Phi'(t)^2. \tag{A.27}$$

Introduisons la fonction α définie par

$$\alpha(t) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2\rho}\log\left(\frac{2}{m} - \frac{2\rho}{\Phi'(t)}\right).$$

Il est clair que (A.27) s'écrit $\alpha'(t) \geq 1$. Ceci donne

$$-\Phi'(t) \leq \frac{-m\rho\Phi'(0)}{(m\rho - \Phi'(0))\exp(2\rho t) + \Phi'(0)}.$$

Il reste à intégrer cette relation pour obtenir :

$$\Phi(0) = \Phi(0) - \Phi(\infty) \leq -\frac{m}{2}\Phi'(0)\int_0^\infty \frac{2\rho dt}{(m\rho - \Phi'(0))\exp(2\rho t) + \Phi'(0)}$$

En utilisant la relation

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^t+a} = \frac{1}{a}\log(1+a),$$

il vient

$$\Phi(0) \le \frac{m}{2}\log\left(1-\frac{\Phi'(0)}{\rho m}\right).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\Phi'(0) = -\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right)$. □

Dans la preuve du théorème A.6.1, nous avons notamment établi que pour toute fonction f positive dans $\mathcal{A}$,

$$\mathbf{E}_\mu(f\mathbf{\Gamma_2}(\log f)) \ge \frac{m\rho}{m-1}\left(\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right) + \frac{4m-1}{4(m+2)^2}\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)^2}{f^3}\right)\right).$$

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ assure encore, pour f de moyenne 1, que

$$\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)^2}{f^3}\right) \ge \left(\mathbf{E}_\mu\left(\frac{\mathbf{\Gamma}(f)}{f}\right)\right)^2.$$

Donc, sous les hypothèses du théorème A.6.3, nous avons établi l'inégalité entropie-énergie logarithmique :

$$\mathbf{E}_\mu\big(f^2\big) = 1 \Rightarrow \mathbf{E}_\mu\big(f^2\log f^2\big) \le \frac{m'}{2}\log\left(1+\frac{4}{\alpha m'}\mathbf{E}_\mu(\mathbf{\Gamma}(f))\right)$$

avec $m' = \dfrac{4(m+2)^2}{4m-1}$ et $\alpha = \dfrac{\rho m}{m-1}$.

Remarque A.6.4. — *Peut-on comparer les deux inégalités entropie-énergie logarithmiques que nous venons d'établir ? La réponse est non : la première est optimale pour la dimension, la deuxième pour α (voir remarque A.6.2). On peut montrer qu'il n'existe pas en général d'inégalité optimale pour ces deux critères à la fois (voir* [Bak94]*). Enfin, la première inégalité est établie sous la simple hypothèse du critère super intégral tandis que nous avons supposé que le critère de courbure-dimension était vérifié pour établir la seconde. Il faut toutefois remarquer que la constante de* SOBOLEV *logarithmique (que l'on retrouve en majorant* $\log(1+u)$ *par* u*) est meilleure dans le deuxième cas.*

A.7. Notes

Dans [Bak85], BAKRY étudie le comportement d'une diffusion sous la condition $\mathbf{\Gamma_2}$ positif (ou nul) et montre notamment que c'est la bonne condition pour obtenir la relation de commutation entre $\mathbf{P}_t$ et $\sqrt{\mathbf{\Gamma}}$ (voir proposition A.4.6).

En 1976, NEVEU [Nev76] avait retrouvé l'hypercontractivité pour la mesure gaussienne grâce au calcul d'Itô. En adaptant sa preuve à la sphère, BAKRY et EMERY [BE85] font le lien entre le critère $\mathrm{CD}(\rho,\infty)$ intégré et l'hypercontractivité du semi-groupe de diffusion. Ce résultat est équivalent à notre proposition A.5.6 d'après le théorème de GROSS (voir chapitre 2.8.2*). Toujours dans [BE85], le critère de courbure-dimension est exploité pour améliorer la constante de Sobolev logarithmique (voir théorème A.6.1) et de nombreux exemples sont développés. On pourra également consulter [Bak94] et [Rot86].

La relation de commutation du semi-groupe et de son carré du champ pour une courbure quelconque que nous avons établie dans la proposition A.4.6 est utilisée dans [Bak87] et [Bak88] pour l'étude des transformations de Riesz.

Les inégalités locales de trou spectral (voir proposition A.4.1) et de Sobolev logarithmique (voir théorème A.4.8) sont établies dans [Bak97].

Les preuves des inégalités entropie-énergie logarithmiques sont tirées de [Bak94].

Bibliographie

[Bak85] D. Bakry – « Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques. II. Étude sous la condition $\Gamma_2 \geq 0$ », Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, p. 145–174.

[Bak87] ______, « Étude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée », Séminaire de Probabilités, XXI, Lecture Notes in Math., vol. 1247, Springer, Berlin, 1987, p. 137–172.

[Bak88] ______, « La propriété de sous-harmonicité des diffusions dans les variétés », Séminaire de Probabilités, XXII, Lecture Notes in Math., vol. 1321, Springer, Berlin, 1988, p. 1–50.

[Bak94] ______, « L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes », École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXII—1992. Lectures Notes in Math., vol 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.

[Bak97] ______, « On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups », *New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994)* (River Edge, NJ), Taniguchi symposium, World Sci. Publishing, 1997, p. 43–75.

[BE85] D. Bakry & M. Emery – « Diffusions hypercontractives », Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Springer, Berlin, 1985, p. 177–206.

[Ber77] M. Berger – *Géométrie. Vol. 5*, CEDIC, Paris, 1977, La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères.

[BL96] D. Bakry & M. Ledoux – « Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator », *Invent. Math.* **123** (1996), no. 2, p. 259–281.

[Cha93] I. Chavel – *Riemannian geometry, a modern introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[GHL90] S. Gallot, D. Hulin & J. Lafontaine – *Riemannian geometry*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Nev76] J. Neveu – « Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien », *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)* **12** (1976), no. 2, p. 105–109.

[Rot86] O. S. Rothaus – « Hypercontractivity and the Bakry-Emery criterion for compact Lie groups », *J. Funct. Anal.* **65** (1986), no. 3, p. 358–367.

ANNEXE B

LES INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES ET DE TROU SPECTRAL SUR LA DROITE RÉELLE

B.1. Introduction

Nous avons vu au chapitre 5*, avec le critère de courbure-dimension, une condition suffisante, très utile en pratique, pour établir des inégalités de POINCARÉ ou de SOBOLEV logarithmiques. Nous allons maintenant présenter un résultat, dû à BOBKOV et GÖTZE, qui permet de caractériser les mesures sur $\mathbb{R}$ qui vérifient de telles inégalités et fournit un encadrement des constantes optimales.

Nous commencerons par introduire une inégalité de HARDY dans un cas simple et nous montrerons comment elle permet de caractériser les mesures sur $\mathbb{R}$ qui vérifient une inégalité de trou spectral. Nous rappellerons ensuite sans démonstration les résultats sur les espaces d'ORLICZ dont nous aurons besoin.

Nous établirons alors la condition nécessaire et suffisante de BOBKOV et GÖTZE pour qu'une mesure sur $\mathbb{R}$ vérifie une inégalité de SOBOLEV logarithmique. Leur preuve étant assez conséquente, nous nous attacherons essentiellement à dégager les grandes étapes du raisonnement en en soulignant les points délicats.

Enfin nous donnerons des exemples concrets d'applications qui vont au-delà du critère de courbure-dimension.

B.2. Présentation d'ingrédients indispensables

B.2.1. Inégalités de HARDY. — Les travaux de MUCKENHOUPT (voir [Muc72]) sur les inégalités de HARDY sont à l'origine de tous les résultats du chapitre. Nous n'en présentons ici que la version simplifiée dont nous aurons besoin dans la suite. Nous dirons que le couple (μ, ν) de mesures sur $\mathbb{R}^+$ vérifie une *inégalité de* HARDY de constante A si, pour toute fonction f suffisamment régulière,

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 d\mu(x) \leq A \int_0^\infty f(x)^2\, d\nu(x). \tag{B.1}$$

Remarquons que l'on peut aussi écrire (B.1) de la manière suivante : pour toute fonction F suffisamment régulière,

$$\int_0^\infty (F(x) - F(0))^2\, d\mu(x) \leq A \int_0^\infty F'(x)^2\, d\nu(x). \tag{B.2}$$

Dans toute la suite, nous supposerons que les mesures μ et ν sont finies et absolument continues par rapport à la mesure de LEBESGUE. On notera encore $\mu(x)$ et $\nu(x)$ leurs densités respectives. Le résultat principal est le suivant :

Théorème B.2.1. — *Si $\nu(x)$ est strictement positive pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors la meilleure constante A pour laquelle (μ, ν) vérifie* (B.1) *est finie si et seulement si*

$$B = \sup_{x \geq 0} \left\{ \int_x^\infty d\mu(t) \int_0^x \frac{1}{\nu(t)} \, dt \right\}$$

est fini. Dans ce cas, on a de plus $B \leq A \leq 4B$.

Preuve. — Supposons tout d'abord que la constante B soit finie. Posons

$$g(x) = \left(\int_0^x \frac{1}{\nu(t)} \, dt \right)^{1/2}.$$

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a

$$\left(\int_0^x f(t) \, dt \right)^2 \leq \int_0^x f(t)^2 \nu(t) g(t) \, dt \int_0^x \frac{1}{\nu(t) g(t)} \, dt.$$

Le théorème de FUBINI assure donc que

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t) \, dt \right)^2 d\mu(x)$$

est majoré par

$$\int_0^\infty f(t)^2 \nu(t) g(t) \left(\int_t^\infty \mu(x) \int_0^x \frac{1}{\nu(u) g(u)} \, du \, dx \right) dt.$$

Par définition de g et de B, il vient, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x \frac{du}{\nu(u) g(u)} = 2 \int_0^x g'(u) \, du = 2g(x) \leq 2\sqrt{B} \left(\int_x^\infty \mu(u) \, du \right)^{-1/2}.$$

On a donc, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \mu(x) \int_0^x \frac{1}{\nu(u) g(u)} \, du \, dx &\leq 2\sqrt{B} \int_t^\infty \mu(x) \left(\int_x^\infty \mu(u) \, du \right)^{-1/2} dx \\ &= 4\sqrt{B} \left(\int_t^\infty \mu(x) \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq 4B \frac{1}{g(t)}. \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t) \, dt \right)^2 d\mu(x) \leq 4B \int_0^\infty f(t)^2 \nu(t) \, dt.$$

Comme A est la meilleure constante possible, on a : $A \leq 4B$.

Pour montrer que $B \leq A$, il suffit d'appliquer (B.1) à la fonction $(1/\nu)\mathbb{1}_{[0,r]}$. Il vient alors

$$\left(\int_r^\infty \mu(x)\,dx\right)\left(\int_0^r \frac{dt}{\nu(t)}\right)^2 \leq \int_0^\infty \left(\int_0^{x\wedge r} \frac{dt}{\nu(t)}\right)^2 \mu(x)\,dx \leq A\int_0^r \frac{dx}{\nu(x)}. \tag{B.3}$$

Ceci assure que B est fini.

Supposons à présent que la constante B soit infinie. Pout tout $n \in \mathbb{N}$, par définition, il existe un réel $x \geq 0$ tel que

$$\int_x^\infty d\mu(t) \int_0^x \frac{1}{\nu(t)}\,dt \geq n.$$

Ainsi, l'inégalité (B.3) permet de conclure $A \geq n$. Le caractère arbitraire de n achève la preuve. □

Rappelons ici qu'une *médiane* m de la mesure μ sur $\mathbb{R}$ est un réel qui vérifie :

$$\mu(]-\infty, m]) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mu([m, +\infty[) \geq \frac{1}{2}.$$

Pour une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité strictement positive, la médiane est unique et est caractérisée par

$$\mu(]-\infty, m]) = 1/2.$$

Pour α réel, nous définissons les quantités (éventuellement infinies) suivantes :

$$B_\alpha^+ = \sup_{x\geq\alpha}\left\{\int_x^\infty d\mu(y) \int_\alpha^x \frac{1}{\mu(y)}dy\right\} \tag{B.4}$$

et

$$B_\alpha^- = \sup_{x\leq\alpha}\left\{\int_{-\infty}^x d\mu(y) \int_x^\alpha \frac{1}{\mu(y)}dy\right\}.$$

Le théorème suivant permet de caractériser les mesures sur $\mathbb{R}$ qui vérifient une inégalité de Poincaré.

Théorème B.2.2. — *Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}$ absolument continue par rapport à la mesure de* Lebesgue, *de densité strictement positive, et m sa médiane. Alors μ vérifie une inégalité de* Poincaré *si et seulement si B_m^+ et B_m^- sont finis. Dans ce cas, la constante optimale de* Poincaré *c vérifie*

$$\frac{1}{2}\big(B_m^+ \vee B_m^-\big) \leq c \leq 4\big(B_m^+ \vee B_m^-\big).$$

Preuve. — Commençons par montrer la majoration de c. Soit F une fonction suffisamment régulière. La formule variationnelle de la variance assure que, pour tout α,

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}_\mu(F) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - F(\alpha))^2 d\mu \\ &\leq \int_{-\infty}^{\alpha} (F(x) - F(\alpha))^2 d\mu + \int_\alpha^{+\infty} (F(x) - F(\alpha))^2 d\mu.\end{aligned}$$

Notons A_α^+, respectivement A_α^-, la plus petite constante telle que μ vérifie, pour toute fonction F de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\int_\alpha^\infty (F(x) - F(\alpha))^2 d\mu(x) \leq A_\alpha^+ \int_\alpha^\infty F'(x)^2 d\mu(x),$$

respectivement

$$\int_{-\infty}^\alpha (F(x) - F(\alpha))^2 d\mu(x) \leq A_\alpha^- \int_{-\infty}^\alpha F'(x)^2 d\mu(x).$$

Un changement de variables donne immédiatement d'après le théorème B.2.1 les encadrements suivants :

$$B_\alpha^+ \leq A_\alpha^+ \leq 4B_\alpha^+ \text{ et } B_\alpha^- \leq A_\alpha^- \leq 4B_\alpha^- \tag{B.5}$$

Si c désigne la meilleure constante de Poincaré pour μ, on a

$$c \leq 4(B_\alpha^+ \vee B_\alpha^-)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et donc en particulier pour $\alpha = m$.

Il nous reste à présent à établir la minoration de c (que l'on supposera finie). Supposons tout d'abord que $B_m^+ \vee B_m^-$ soit fini et vaille B_m^+. Pour tout $\varepsilon > 0$, comme A_m^+ est optimale, il existe f_ε telle que

$$\int_m^\infty \left(\int_m^x f_\varepsilon(t) dt \right)^2 d\mu(x) \geq \left(A_m^+ - \varepsilon \right) \int_m^\infty f_\varepsilon(x)^2 d\mu(x). \tag{B.6}$$

Sans perte de généralité, nous supposerons f_ε positive. Définissons alors F_ε sur $\mathbb{R}$:

$$F_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq m \\ \int_m^x f_\varepsilon(t) dt & \text{si } x \geq m. \end{cases}$$

Le choix de la valeur de m assure que $\mu(\{F_\varepsilon = 0\}) \geq \mu(\{x \leq m\}) \geq 1/2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne donc

$$\left(\int F_\varepsilon(x) d\mu(x) \right)^2 \leq \int F_\varepsilon(x)^2 d\mu(x) \mu(F_\varepsilon > 0) \leq \frac{1}{2} \int F_\varepsilon(x)^2 d\mu(x). \tag{B.7}$$

On a donc, en utilisant successivement (B.7), (B.6), (B.5) et l'inégalité de Poincaré pour la mesure μ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}_\mu(F_\varepsilon) &\geq \frac{1}{2} \int F_\varepsilon(x)^2 d\mu(x) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(A_m^+ - \varepsilon \right) \int_m^\infty F_\varepsilon'(x)^2 d\mu(x) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(B_m^+ - \varepsilon \right) \int_m^\infty F_\varepsilon'(x)^2 d\mu(x) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(B_m^+ - \varepsilon \right) \frac{1}{c} \mathbf{Var}_\mu(F_\varepsilon). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous retrouvons bien le résultat annoncé.

Si B_m^+ est infini, il suffit de faire le même raisonnement que précédemment pour tout n avec une fonction f_n telle que

$$\int_m^\infty \left(\int_m^x f_n(t)dt\right)^2 d\mu(x) \geq n \int_m^\infty f_n(x)^2 d\mu(x)$$

pour établir que c est, elle aussi, infinie. □

Remarque B.2.3. — *On aura remarqué qu'au cours de la démonstration, on a démontré mieux qu'annoncé dans le théorème. En effet, on a obtenu*

$$c \leq 4 \inf_\alpha (B_\alpha^+ \vee B_\alpha^-).$$

Comme par ailleurs $B_m^+ \vee B_m^- \geq \inf_\alpha (B_\alpha^+ \vee B_\alpha^-)$, *on a aussi, grâce à la démonstration du théorème,*

$$\frac{1}{2} \inf_\alpha (B_\alpha^+ \vee B_\alpha^-) \leq c.$$

Cette remarque prouve en particulier que $B_m^+ \vee B_m^-$ *et* $\inf_\alpha (B_\alpha^+ \vee B_\alpha^-)$ *sont du même ordre de grandeur.*

Remarque B.2.4. — MICLO *établit dans* [Mic99a] *un résultat similaire au théorème B.2.2 pour les mesures sur* $\mathbb{Z}$.

B.2.2. Résultats fondamentaux sur les espaces d'ORLICZ. — L'objet de ce paragraphe est de présenter les résultats, exposés dans [RR91], qui nous seront utiles dans la section suivante. On pourra également consulter [KA82].

Définition B.2.5. — *On appelle* fonction de YOUNG *toute fonction* Φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0, \infty]$ *convexe, paire, telle que* $\Phi(0) = 0$ *et* $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$.

Si Φ est une fonction de YOUNG, on peut lui associer sa transformée de LEGENDRE Ψ, qui est définie par :

$$\Psi(y) = \sup_{x\geq 0} \{x|y| - \Phi(x)\}.$$

On dit que Ψ est la *conjuguée* de Φ et on remarque que c'est encore une fonction de YOUNG.

Exemple 5. — *Soit* $p > 1$ *et* q *son conjugué (i.e.* $1/p + 1/q = 1$*). Si* $\Phi(x) = |x|^p/p$, *alors* $\Psi(y) = |y|^q/q$.

Il existe une autre façon de définir Ψ. La fonction Φ étant convexe et nulle en 0, elle s'écrit sur $[0, +\infty[$:

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t)dt,$$

où $\phi : \mathbb{R}^+ \to [0, \infty]$ est croissante et continue à droite.

On définit alors l'inverse (généralisée) de ϕ, pour $u \geq 0$, par

$$\psi(u) = \inf\{t > 0, \phi(t) > u\}.$$

La fonction

$$\Psi(y) = \int_0^y \psi(u)du$$

est alors la conjuguée de Φ (une fois prolongée à $\mathbb{R}$ par parité).

Nous pouvons maintenant présenter les espaces d'ORLICZ.

Définition B.2.6. — *Soit* (Ω, μ) *un espace de probabilité et* Φ *une fonction de* YOUNG. *L'ensemble*

$$L^{\Phi}(\mu) = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ mesurable } ; \exists \alpha > 0, \int_{\Omega} \Phi(\alpha f) d\mu < \infty\}$$

est appelé espace d'ORLICZ *associé à* Φ.

On peut le munir de deux normes utiles en pratique et qui lui confèrent la structure d'espace de BANACH :

$$N_{\Phi}(f) = \inf \left\{ \lambda > 0 \, ; \, \int_{\Omega} \Phi(f/\lambda) d\mu \leq 1 \right\} \tag{B.8}$$

et

$$\|f\|_{\Phi} = \sup_{g} \left\{ \int_{\Omega} |fg| d\mu \, ; \, \int_{\Omega} \Psi(g) d\mu \leq 1 \right\}. \tag{B.9}$$

On peut montrer (voir [RR91]) que ces deux normes sont équivalentes et que l'on a

$$N_{\Phi}(f) \leq \|f\|_{\Phi} \leq 2 N_{\Phi}(f). \tag{B.10}$$

Nous sommes à présent en mesure de généraliser le théorème B.2.1 (voir [BG99]) :

Proposition B.2.7. — *Soit c la meilleure constante telle que l'inégalité*

$$\|f^2\|_{\Phi} \leq A \int_0^{\infty} f'(x)^2 d\nu(x) \tag{B.11}$$

soit vérifiée pour toute fonction f *suffisament régulière et nulle en* 0. *On suppose* ν *de densité strictement positive.*

Alors, $B \leq A \leq 4B$ *avec*

$$B = \sup_{x>0} \left\{ \|\mathbb{1}_{[x,\infty[}\|_{\Phi} \int_0^x \frac{dt}{\nu(t)} \right\}.$$

Preuve. — Appliquons le théorème B.2.1 aux mesures $\mu_g(dx)$ de la forme

$$\mu_g(dx) = |g(x)| \mu(dx).$$

Il vient

$$B_g \leq A_g \leq 4 B_g. \tag{B.12}$$

D'après l'expression de la norme (B.9) et puisque A est optimale, on obtient

$$A = \sup_{g} \left\{ A_g \, ; \, \int_0^{\infty} \Psi(g) d\mu \leq 1 \right\},$$

et

$$B = \sup_{g} \left\{ B_g \, ; \, \int_0^{\infty} \Psi(g) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Il ne reste plus qu'à prendre le supremum dans (B.12). □

B.3. Inégalité de Sobolev logarithmique sur la droite réelle

Dans cette section, nous allons chercher à caractériser les mesures sur $\mathbb{R}$ vérifiant une inégalité de Sobolev logarithmique. Rappelons la définition de celle-ci : on dira qu'une mesure μ sur $\mathbb{R}$ satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique de constante c si, pour toute fonction f suffisamment régulière,

$$(SL) \qquad \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leq c \int f'^2 d\mu.$$

Nous allons pour cela reprendre une démonstration de Bobkov et Götze (voir [BG99]). Nous commençons par passer de l'inégalité (SL) à une inégalité de type Sobolev en introduisant une norme d'Orlicz convenable et en découpant $\mathbb{R}$ en deux demi-droites. Nous utilisons ensuite la proposition B.2.7 pour conclure. Afin de simplifier les démonstrations, nous nous restreindrons au cas où μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, de densité strictement positive, les résultats restant vrais en toute généralité.

B.3.1. Première étape : se ramener à une norme d'Orlicz. — Le membre de droite de l'inégalité (SL) est invariant par le changement de fonction $f \mapsto f + a$ pour toute constante $a \in \mathbb{R}$; ainsi, cette inégalité est équivalente à

$$\sup_{a\in\mathbb{R}} \mathbf{Ent}_\mu((f+a)^2) \leq c \int f'^2 d\mu.$$

Si l'on pose à présent

$$M(f) = \sup_{a\in\mathbb{R}} \mathbf{Ent}_\mu((f+a)^2) \quad \text{et} \quad \Theta(x) = x^2 \log(1+x^2),$$

qui est une fonction de Young, on a le résultat suivant :

Lemme B.3.1. — *Pour toute fonction f suffisamment régulière,*

$$\text{(B.13)} \qquad \frac{2}{3}\|f - \int f d\mu\|_\Theta^2 \leq M(f) \leq \frac{5}{2}\|f - \int f d\mu\|_\Theta^2.$$

La démonstration de ce résultat (voir [BG99]) étant technique, on ne la détaille pas ici. Elle s'appuie essentiellement sur une amélioration du lemme 4.7*, due à Rothaus [Rot86]. Celle-ci assure que, pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$ et tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{Ent}_\mu((f+a)^2) \leq \mathbf{Ent}_\mu(f^2) + 2\mathbf{E}_\mu\big(f^2\big).$$

Grâce à cette réduction, l'inégalité de Sobolev logarithmique (SL) est équivalente, à une constante multiplicative près, à l'inégalité

$$\text{(B.14)} \qquad \|f - \int f d\mu\|_\Theta^2 \leq C \int f'^2 d\mu.$$

Le lien entre les constantes c et C est donné par la relation (B.13) :

$$\frac{2}{3}C \leq c \leq \frac{5}{2}C.$$

B.3.2. Deuxième étape : se ramener à une inégalité de type Sobolev. — On introduit la fonction de Young $\Phi(x) = |x| \log(1+|x|)$ et la médiane m de μ. Pour toute fonction f, on notera $f_- = f \mathbb{1}_{]-\infty,m]}$ et $f_+ = f \mathbb{1}_{[m,\infty[}$.

Remarquons de plus que si $f \in \mathbf{L}^\Theta(\mu)$, alors

$$f^2 \in \mathbf{L}^\Phi(\mu) \quad \text{et} \quad N_\Phi(f^2) = (N_\Theta(f))^2.$$

Ainsi, d'après l'encadrement (B.10), on a

$$\frac{1}{4}\|f\|_\Theta^2 \leq \|f^2\|_\Phi \leq 2\|f\|_\Theta^2. \tag{B.15}$$

La proposition suivante permet de ramener l'étude de l'inégalité de Sobolev logarithmique (SL) à l'étude d'inégalités de type Sobolev :

Proposition B.3.2. — *Supposons que μ satisfasse à une inégalité de* Sobolev *logarithmique de constante $c > 0$. Alors, pour toute fonction f suffisamment régulière telle que $f(m) = 0$,*

$$\|f_-^2\|_\Phi + \|f_+^2\|_\Phi \leq d \int f'^2 d\mu, \tag{B.16}$$

avec $d = 75c$.

Inversement, si l'inégalité précédente (B.16) *a lieu avec une constante $d > 0$, alors μ satisfait à une inégalité de* Sobolev *logarithmique* (SL) *de constante $c = 180d$.*

Preuve. — Au cours de la démonstration, nous aurons besoin de deux résultats qui proviennent de [BG99], lemme 4.4. Leur preuve est technique. Nous prenons le parti de ne pas la détailler car nous estimons qu'elle n'est pas essentielle à la compréhension du chapitre. Nous les résumons dans le lemme suivant :

Lemme B.3.3. — *Pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^\Theta(\mu)$,*

$$\Big\|f - \int f d\mu\Big\|_\Theta \leq 3\|f\|_\Theta. \tag{B.17}$$

Si de plus $f = 0$ sur $]-\infty, m[$ (ou si $f = 0$ sur $]m, \infty[$), on a aussi

$$\|f\|_\Theta \leq 5\Big\|f - \int f d\mu\Big\|_\Theta. \tag{B.18}$$

Déduisons tout d'abord l'inégalité (B.16) de l'inégalité de Sobolev logarithmique. Soit pour cela une fonction f vérifiant $f(m) = 0$. L'inégalité de Sobolev logarithmique et le lemme B.3.1 nous donnent

$$\frac{2}{3}\Big\|f - \int f d\mu\Big\|_\Theta^2 \leq c \int f'^2 d\mu.$$

La mesure μ étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut, dans l'inégalité précédente, se contenter d'intégrer sur $\mathbb{R}\backslash\{m\}$ au lieu de $\mathbb{R}$. En outre, comme $f(m) = 0$, les fonctions f_- et f_+ sont suffisament régulière pour leur appliquer la dernière inégalité, on obtient

$$\frac{2}{3}\Big\|f_- - \int f_- d\mu\Big\|_\Theta^2 \leq c \int_{-\infty}^m f'^2 d\mu,$$

et
$$\frac{2}{3}\|f_+ - \int f_+ d\mu\|_\Theta^2 \leq c\int_m^\infty f'^2 d\mu.$$
Or d'après (B.18) et l'inégalité $\|f^2\|_\Phi \leq 2\|f\|_\Theta^2$, établie en (B.15), il vient
$$\frac{1}{75}\|f_-^2\|_\Phi \leq c\int_{-\infty}^m f'^2 d\mu,$$
et
$$\frac{1}{75}\|f_+^2\|_\Phi \leq c\int_m^\infty f'^2 d\mu.$$
En sommant, on obtient finalement l'inégalité (B.16) avec $d = 75c$, c'est-à-dire le résultat escompté.

Réciproquement, supposons à présent que (B.16) soit vérifiée. Plaçons nous tout d'abord sous l'hypothèse $f(m) = 0$. Comme $f = f_- + f_+$, en utilisant l'inégalité triangulaire et (B.17), on a,
$$\begin{aligned}\|f - \int f d\mu\|_\Theta^2 &\leq \left(\|f_- - \int f_- d\mu\|_\Theta + \|f_+ - \int f_+ d\mu\|_\Theta\right)^2\\ &\leq \left(3\|f_-\|_\Theta + 3\|f_+\|_\Theta\right)^2.\end{aligned}$$
L'inégalité $\|f\|_\Theta^2 \leq 4\|f^2\|_\Phi$ (voir (B.15)) nous assure alors
$$\|f - \int f d\mu\|_\Theta^2 \leq 72\left(\|f_-^2\|_\Phi + \|f_+^2\|_\Phi\right).$$
Enfin, le lemme B.3.1 nous permet de conclure que
$$M(f) \leq \frac{5}{2}\|f - \int f\, d\mu\|_\Theta^2 \leq 180d\int_{-\infty}^\infty f'^2\, d\mu.$$
Cette inégalité étant invariante par translation $f \mapsto f + a$, on peut maintenant s'abstenir de l'hypothèse $f(m) = 0$. Ceci achève la preuve car $\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leq M(f)$. □

B.3.3. Troisième étape : utiliser l'inégalité de Hardy. — En toute généralité, on peut se placer dans le cas $m = 0$. D'après la proposition B.3.2, pour montrer l'inégalité de Sobolev logarithmique (SL), il suffit de montrer les deux inégalités de type Hardy :
$$\|f_-^2\|_\Phi \leq d_-\int_{-\infty}^0 f'^2 d\mu,$$
et
$$\|f_+^2\|_\Phi \leq d_+\int_0^\infty f'^2 d\mu,$$
pour f_- et f_+ deux fonctions quelconques sur $]-\infty, 0]$ et $[0, \infty[$ respectivement, avec $f_-(0) = f_+(0) = 0$. Soit $\mu(x)$ la densité de μ par rapport à la mesure de Lebesgue. On applique la proposition B.2.7 à ces deux inégalités afin d'obtenir
$$\sup_{x>0}\left\{\|\mathbb{1}_{[x,\infty[}\|_\Phi\int_0^x \frac{1}{\mu(t)}\, dt\right\} \leq d_+ \leq 4\sup_{x>0}\left\{\|\mathbb{1}_{[x,\infty[}\|_\Phi\int_0^x \frac{1}{\mu(t)} dt\right\},$$

et une inégalité semblable pour d_- sur $\mathbb{R}^-$. De manière élémentaire, on remarque, avec les notations de (B.8), que

$$N_\Phi(\mathbb{1}_{[x,\infty[}) = \left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu([x,\infty[)}\right)\right)^{-1}.$$

De plus, on montre que pour $t \geq 2$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{2}\frac{t}{\log t} \leq \Phi^{-1}(t) \leq 2\frac{t}{\log t}.$$

À présent, le fait que 0 soit une médiane de μ assure que $1/\mu([x,\infty[) \geq 2$. Il vient donc, d'après l'encadrement $N_\Phi(f) \leq \|f\|_\Phi \leq 2N_\Phi(f)$ (voir (B.10)),

$$\frac{1}{2}\mu([x,\infty[)\log\frac{1}{\mu([x,\infty[)} \leq \|\mathbb{1}_{[x,\infty[}\|_\Phi \leq 4\mu([x,\infty[)\log\frac{1}{\mu([x,\infty[)}.$$

Enfin, on pose

$$D_- = \sup_{x<0}\left\{\mu(]-\infty,x])\log\frac{1}{\mu(]-\infty,x])}\int_x^0\frac{1}{\mu(t)}dt\right\},$$

et

$$D_+ = \sup_{x>0}\left\{\mu([x,\infty[)\log\frac{1}{\mu([x,\infty[)}\int_0^x\frac{1}{\mu(t)}dt\right\}.$$

On aboutit alors aux encadrements de type Hardy,

$$\frac{1}{2}D_- \leq d_- \leq 16D_-\ ,$$

et

$$\frac{1}{2}D_+ \leq d_+ \leq 16D_+\ .$$

D'après la proposition B.3.2, l'inégalité de Sobolev logarithmique (SL) implique l'inégalité $\|f_-^2\|_\Phi + \|f_+^2\|_\Phi \leq d\int f'^2 d\mu$ avec $d = 75c$. Or d est égal à $\max(d_-, d_+)$, ainsi,

$$D_- \vee D_+ \leq 2\max(d_-, d_+) \leq 150c.$$

Cette inégalité fournit une minoration de la constante c intervenant dans l'inégalité de Sobolev logarithmique (SL).

Inversement, toujours d'après la proposition B.3.2, on a

$$\begin{aligned} c &\leq 180d = 180\max(d_-, d_+) \\ &\leq 180 \times 16D_- \vee D_+ \\ &\leq 2880D_- \vee D_+. \end{aligned}$$

En conclusion, en regroupant ces calculs, on obtient le théorème suivant qui donne la caractérisation attendue des mesures sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à une inégalité de Sobolev logarithmique.

Posons tout d'abord de manière générale, si m désigne une médiane de μ,

$$D_- = \sup_{x<m}\left\{\mu(]-\infty,x])\log\frac{1}{\mu(]-\infty,x])}\int_x^m\frac{1}{\mu(t)}dt\right\}, \tag{B.19}$$

et

$$D_+ = \sup_{x>m} \left\{ \mu([x,\infty[) \log \frac{1}{\mu([x,\infty[)} \int_m^x \frac{1}{\mu(t)} dt \right\}. \tag{B.20}$$

Théorème B.3.4. — *Considérons une mesure de probabilité μ absolument continue par rapport à la mesure de* Lebesgue *sur $\mathbb{R}$, de densité $\mu(x)$ strictement positive. Soient D_- et D_+ définies en (B.19) et (B.20). Alors, la constante optimale c de l'inégalité de* Sobolev *logarithmique (SL) vérifie*

$$\frac{1}{150}(D_- \vee D_+) \leq c \leq 2880(D_- \vee D_+).$$

On peut remarquer en premier lieu que les constantes trouvées ne sont pas optimales. On a en effet, au cours de la démonstration, effectué un certain nombre d'approximations numériques. L'important ici est qu'il existe des constantes universelles qui relient la constante de Sobolev logarithmique à la constante $D_- \vee D_+$. Pourtant, dans [Mic99b], Miclo améliore ce résultat, dans le cadre des espaces discrets. Il obtient l'encadrement $(1/31)D_- \vee D_+ \leq c \leq 20D_- \vee D_+$ (où D_-, D_+ et c sont les équivalents en discret des constantes introduites ici).

Signalons enfin que si l'on donne une caractérisation des mesures sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à une inégalité de Sobolev logarithmique, on a reporté le problème au calcul des constantes D_- et D_+. La section suivante donne des exemples où l'on peut majorer effectivement ces constantes.

B.4. Applications pratiques

B.4.1. Quelques notations. — On considère dans ce qui suit une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ absolument continue, de densité $e^{-\Phi}$ par rapport à la mesure de Lebesgue et de médiane m. On adoptera les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
B_- &= \sup_{x<m} \left\{ \int_x^m e^{\Phi(t)} dt \int_{-\infty}^x e^{-\Phi(t)} dt \right\}, \\
B_+ &= \sup_{x>m} \left\{ \int_m^x e^{\Phi(t)} dt \int_x^{+\infty} e^{-\Phi(t)} dt \right\}, \\
D_- &= \sup_{x<m} \left\{ \left(\int_x^m e^{\Phi(t)} dt \right) \left(\log \frac{1}{\int_{-\infty}^x e^{-\Phi(t)} dt} \right) \left(\int_{-\infty}^x e^{-\Phi(t)} dt \right) \right\}, \\
D_+ &= \sup_{x>m} \left\{ \left(\int_m^x e^{\Phi(t)} dt \right) \left(\log \frac{1}{\int_x^{+\infty} e^{-\Phi(t)} dt} \right) \left(\int_x^{+\infty} e^{-\Phi(t)} dt \right) \right\}.
\end{aligned}$$

B.4.2. Calcul d'équivalents d'intégrales. — Plaçons nous dans un cadre où nous pourrons estimer ces intégrales. Le résultat général (dont on trouvera la preuve dans [VP94]) est le suivant :

Proposition B.4.1. — *Soit $f > 0$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*
– *f' ne s'annule pas sur un voisinage V_f de $+\infty$,*

– *la fonction* $h = f/f'$ *est dérivable sur* V_f,
– $h'(x) = o(1)$ *au voisinage de* $+\infty$.

Alors

1. *si* $f' > 0$ *sur* V_f, *alors, pour tout* a *dans* $\mathbb{R}$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge et*
$$\int_a^x f(t)dt \sim \frac{f^2(x)}{f'(x)},$$
2. *si* $f' < 0$ *sur* V_f, *alors, pour tout* a *dans* $\mathbb{R}$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge et*
$$\int_x^\infty f(t)dt \sim -\frac{f^2(x)}{f'(x)},$$

L'adaptation de cette proposition à notre cadre ne pose pas de difficulté :

Corollaire B.4.2. — *Soit* Φ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *pour laquelle il existe* A *réel tel que*
– $\Phi'(x)$ *ne s'annule pas pour* $|x| \geq A$,
– $\Phi''(x)/[\Phi'(x)]^2 \to 0$ *quand* $|x| \to \infty$.

Alors, pour tout réel a,

1. $\displaystyle\int_a^x e^{\Phi(t)}dt \sim \frac{e^{\Phi(x)}}{\Phi'(x)}$,
2. $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\Phi(t)}dt \sim \frac{e^{-\Phi(x)}}{\Phi'(x)}$.

B.4.3. Résultats généraux. — En rassemblant les résultats de la section précédente et les rappels ci-dessus, nous arrivons au théorème suivant :

Théorème B.4.3. — *Soit* Φ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* μ *la mesure de densité* $\exp(-\Phi)$ *par rapport à la mesure de* LEBESGUE. *Si* Φ *vérifie :*
– *pour* x *assez grand (en valeur absolue)* $|\Phi'(x)|$ *est strictement positif,*
– $\Phi''(x)/[\Phi'(x)]^2 \to 0$ *quand* $|x| \to \infty$.

Alors

1. *la mesure* μ *satisfait à une inégalité de trou spectral si et seulement s'il existe* A *tel que* $1/\Phi'(x)$ *soit borné sur* $\{|x| \geq A\}$ *;*
2. *la mesure* μ *satisfait à une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique si et seulement s'il existe* A *tel que*
$$\frac{\Phi(x)}{[\Phi'(x)]^2} + \frac{\log|\Phi'(x)|}{[\Phi'(x)]^2}$$
soit borné sur $\{|x| \geq A\}$.

Preuve. — Soit m la médiane de μ. Nous pouvons calculer un équivalent (au voisinage de $+\infty$) de $B_+(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_m^x e^{\Phi(t)}dt \int_x^{+\infty} e^{-\Phi(t)}dt$:
$$B_+(x) \sim \frac{e^{\Phi(x)}}{\Phi'(x)} \frac{e^{-\Phi(x)}}{\Phi'(x)} = \frac{1}{[\Phi'(x)]^2}.$$

Donc il existe $A > 0$ et $M > 0$ tels que pour $x \geq A$, on a $B_+(x) \leq M$. Enfin, $B_+(x)$ est une fonction continue sur $[m, A]$ et y est donc bornée. On procède de façon identique pour montrer que B_- est finie.

De la même manière, D_+ (resp D_-) est finie si et seulement si

$$\frac{\Phi(x)}{[\Phi'(x)]^2} + \frac{\log|\Phi'(x)|}{[\Phi'(x)]^2}$$

est bornée au voisinage au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$). □

Remarque B.4.4. — *Dans le cas où $\Phi''(x) \geq a > 0$ pour tout x réel, il existe b et c réels tels que pour tout x de $\mathbb{R}$,*

$$\Phi'(x) \geq ax + b \quad \textit{et} \quad \Phi(x) \geq \frac{a}{2}x^2 + bx + c.$$

Il est clair qu'alors Φ vérifie les hypothèses du théorème B.4.3 et que donc μ vérifie une inégalité de SOBOLEV *logarithmique. On retouve ainsi le résultat classique du corollaire A.5.2.*

B.4.4. Deux exemples d'utilisation. — Commençons par nous intéresser aux fonctions puissances.

Corollaire B.4.5. — *Si $\Phi(x) = |x|^\alpha$ pour $\alpha > 0$, alors*

1. *la mesure μ satisfait une inégalité de trou spectral si et seulement si $\alpha \geq 1$,*
2. *la mesure μ satisfait une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique si et seulement si $\alpha \geq 2$,*

Notons que le fait que $\Phi(x) = |x|^\alpha$, avec $\alpha \in]0, 1[$, ne soit pas deux fois dérivable en 0 ne change rien pour le calcul des équivalents.

Considérons à présent la fonction $\Phi : x \mapsto x^2 + x \sin x$. On a alors

$$\Phi'(x) = (2 + \cos x)x + \sin x$$

qui est strictement positif sur $\mathbb{R}^+$ et qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. De plus,

$$\Phi''(x) = -x \sin x + 2(1 + \cos x).$$

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème B.4.3 puisque

$$\frac{\Phi''(x)}{[\Phi'(x)]^2} = \frac{\sin x + 2/x(1 + \cos x)}{x[2 + \cos x + \frac{\sin x}{x}]^2} \to 0 \quad \text{quand} \quad x \to \infty.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que $(\log|\Phi'|)/(\Phi')^2$ et

$$\frac{\Phi(x)}{[\Phi'(x)]^2} = \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{[2 + \cos x + \frac{\sin x}{x}]^2} \quad \text{sont bornés sur} \quad \mathbb{R}.$$

La mesure μ vérifie donc une inégalité de SOBOLEV logarithmique bien que Φ ne soit pas la somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction bornée. Cet exemple sort ainsi du cadre d'application du corollaire A.5.2.

On voit donc que le critère de BOBKOV et GÖTZE s'avère très utile (à la condition de pouvoir estimer l'équivalent d'une intégrale fonction de sa borne supérieure) pour agrandir la liste des mesures dont on sait qu'elles vérifient une inégalité de Sobolev logarithmique ou de trou spectral.

B.5. Notes

L'inégalité de Hardy originelle s'écrit ainsi (voir [Zyg59, Muc72]) :

Proposition B.5.1. — *Si $1 \leq p \leq \infty$ et $bp < -1$, alors*

$$\left[\int_0^\infty \left| x^b \int_0^x f(t)dt \right|^p dx\right]^{1/p} \leq \frac{-p}{bp+1} \left[\int_0^\infty \left| x^{b+1} f(x)\right|^p dx\right]^{1/p},$$

dès que les intégrales ont un sens. De plus, $-p/(bp+1)$ est la meilleure constante.

On pourra aussi consulter le célèbre livre de Hardy, Littlewood et Polya [HL48].

De nombreux auteurs ont cherché à généraliser ce genre d'inégalités. Dans les années 60, Tomaselli [Tom69], Talenti [Tal69] et Artola (dans un manuscrit non publié) ont remplacé x^b et x^{b+1} par des fonctions U et V en se demandant ce qu'elles devaient vérifier pour conserver le résultat. Ils apportent la réponse suivante (voir [Muc72]) :

Théorème B.5.2. — *Si $1 \leq p \leq \infty$, il existe une constante finie C telle que*

$$\left[\int_0^\infty \left| U(x) \int_0^x f(t)dt \right|^p dx\right]^{1/p} \leq C \left[\int_0^\infty |V(x) f(x)|^p dx\right]^{1/p}, \tag{B.21}$$

si et seulement si

$$B = \sup_{r>0} \left[\int_r^\infty |U(x)|^p dx\right]^{1/p} \left[\int_0^r |V(x)|^{-p'} dx\right]^{1/p'} < \infty,$$

avec $1/p + 1/p' = 1$.

De plus, si C est la meilleure constante pour laquelle (B.21) a lieu, on a alors $B \leq C \leq p^{1/p} p'^{1/p'} B$ pour $1 < p < \infty$, et $B = C$ pour $p = 1$ ou $p = \infty$.

C'est Muckenhoupt (voir [Muc72]) qui franchit en 1972 l'étape suivante en remplaçant U et V par des mesures :

Théorème B.5.3. — *Si μ et ν sont des mesures de Borel et p est un réel supérieur ou égal à 1, alors il existe une constante finie C telle que*

$$\left[\int_0^\infty \left| \int_0^x f(t)dt \right|^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leq C \left[\int_0^\infty |f(x)|^p d\nu(x)\right]^{1/p},$$

si et seulement si

$$B = \sup_{r>0} [\mu([r, \infty[)]^{1/p} \left[\int_0^r \left(\frac{d\nu^{ac}}{dx}\right)^{-p'/p} dx\right]^{1/p'} < \infty,$$

où ν^{ac} désigne la partie absolument continue de ν, supposée strictement positive.

De plus, si C est la meilleure constante pour laquelle (B.1) a lieu, on a alors $B \leq C \leq p^{1/p} p'^{1/p'} B$ pour $1 < p < \infty$, et $B = C$ pour $p = 1$.

Plus récemment, Chung, Hunt, Kurtz [CHK82] et Sawyer [Saw84] ont généralisé les inégalités de Hardy aux espaces de Lorentz. Dans les années 90, Evans, Harris et Pick [EHP95] les ont transposées sur les arbres.

On trouvera dans [ABdMBG87] une approche plus analytique des inégalités de Hardy appliquées aux opérateurs différentiels. Davies (voir [Dav90]) fait une synthèse des résultats les plus récents sur ce sujet. Nous renvoyons principalement à Maz'ja [Maz85] et Davies [Dav98] pour une lecture synthétique et une bibliographie complète autour des inégalités de Hardy.

Ce n'est que récemment que le lien entre les inégalités de Hardy d'un côté et de Poincaré ou Sobolev logarithmique de l'autre a été établi. Miclo [Mic99a, Mic99b] adapte la preuve de Muckenhoupt au cas discret (i.e. sur $\mathbb{N}$) et traite le cas des mesures sur $\mathbb{Z}$. Parallèlement, Bobkov et Götze [BG99] ont adopté une méthode similaire sur $\mathbb{R}$: c'est leur méthode que nous avons détaillée dans ce chapitre.

Signalons des applications récentes des inégalités de Hardy : autour du théorème B.2.1 pour prouver l'existence de la constante de Poincaré pour des systèmes de spins non bornés (voir [GR00]) ; et autour du théorème B.3.4, dans le cas discret, pour contrôler la constante de Sobolev logarithmique sous la dynamique de Kawasaki (voir [CMR00], l'article [CM00] s'intéresse quant à lui à l'inégalité de trou spectral sous la dynamique de Kawasaki, ici, des inégalités de Cheeger sont utilisées).

Dans [GR00], les auteurs apportent des éléments de réponse à la question suivante : étant donnée la famille de mesures de probabilité de densité (par rapport à la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}$) $Z_\theta^{-1}\exp(\Phi(x)-\theta x)$ indexée par le paramètre $\theta\in\mathbb{R}$, comment évolue la constante de Poincaré en fonction de ce paramètre ? Si c_θ désigne la constante de Poincaré associée à la mesure μ_θ, dans le cas où $\Phi(x)=|x|^s$, le résultat est le suivant (voir aussi [Hel98]) :

(i) si $1<s<2$, alors $\lim_{\theta\to\infty} c_\theta=\infty$,

(ii) si $s=2$, alors la constante c_θ est indépendante du paramètre θ;

(iii) si $s>2$, alors $\lim_{\theta\to\infty} c_\theta=0$.

Signalons que ces résultats se généralisent à des fonctions Φ moins spécifiques (voir [GR00]). Enfin, dans le prolongement du corollaire B.4.5, [KKR93] analyse le cas où α est strictement supérieur à 2.

Bibliographie

[ABdMBG87] W. Amrein, A. Boutet de Monvel-Berthier & V. Georgescu – « Hardy type inequalities for abstract differential operators », *Mem. Amer. Math. Soc.* **70** (1987), no. 375, p. iv+119.

[BG99] S. G. Bobkov & F. Götze – « Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities », *J. Funct. Anal.* **163** (1999), no. 1, p. 1–28.

[CHK82] H. M. Chung, R. A. Hunt & D. S. Kurtz – « The Hardy Littlewood maximal function on $L(p, q)$ spaces with weights », *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982), no. 1, p. 109–120.

[CM00] N. Cancrini & F. Martinelli – « On the spectral gap of Kawasaki dynamics under a mixing condition revisited », *J. Math. Phys.* **41** (2000), no. 3, p. 1391–1423, Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.

[CMR00] N. Cancrini, F. Martinelli & C. Roberto – « On the logarithmic Sobolev inequality for Kawasaki dynamics under a mixing condition revisited », prépublication, 2000.

[Dav90] E. B. Davies – *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Dav98] E. Davies – « A review of Hardy inequalities », prépublication, 1998.

[EHP95] W. D. Evans, D. J. Harris & L. Pick – « Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees », *J. London Math. Soc. (2)* **52** (1995), no. 1, p. 121–136.

[GR00] I. Gentil & C. Roberto – « Spectral gaps for spin systems: some non-convex phase examples », à paraître in Jour. Func. Anal., 2000.

[Hel98] B. Helffer – « Analyse semi-classique et mécanique statistique », Cours Post-DEA, Université Paul SAbatier de Toulouse, 1998.

[HL48] G. H. Hardy & J. E. Littlewood – *Inequalities*, Gosudarstv. Izdat. Inostr. Lit., Moscow, 1948.

[KA82] L. V. Kantorovich & G. P. Akilov – *Functional analysis*, 2ème ed., Pergamon Press, Oxford, 1982, Translated from the Russian by Howard L. Silcock.

[KKR93] O. Kavian, G. Kerkyacharian & B. Roynette – « Quelques remarques sur l'ultracontractivité », *J. Funct. Anal.* **111** (1993), no. 1, p. 155–196.

[Maz85] V. G. Maz'ja – *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Translated from the Russian by T. O. Shaposhnikova.

[Mic99a] L. Miclo – « An example of application of discrete Hardy's inequalities », *Markov Process. Related Fields* **5** (1999), p. 319–330.

[Mic99b] ______, « Relations entre isopérimetrie et trou spectral pour les chaînes de Markov finies », *Probability Theory and Related Fields* **114** (1999), p. 431–485.

[Muc72] B. Muckenhoupt – « Hardy's inequality with weights », *Studia Math.* **44** (1972), p. 31–38, collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, **I**.

[Rot86] O. S. Rothaus – « Hypercontractivity and the Bakry-Emery criterion for compact Lie groups », *J. Funct. Anal.* **65** (1986), no. 3, p. 358–367.

[RR91] M. M. Rao & Z. D. Ren – *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[Saw84] E. Sawyer – « Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator », *Trans. Amer. Math. Soc.* **281** (1984), no. 1, p. 329–337.

[Tal69] G. Talenti – « Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze », *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **39** (1969), p. 171–185.

[Tom69] G. Tomaselli – « A class of inequalities », *Boll. Un. Mat. Ital.* **21** (1969), p. 622–631.

[VP94] J. Vauthier & J.-J. Prat – *Cours d'analyse mathématique de l'agrégation*, 2ème ed., Masson, Paris, 1994.

[Zyg59] A. Zygmund – *Trigonometric series*, 2ème ed., vol. I & II, Cambridge University Press, New York, 1959.

ANNEXE C

CONVERGENCE TO EQUILIBRIUM FOR GRANULAR MEDIA EQUATIONS AND THEIR EULER SCHEMES

Cette annexe est répond à la question soulevée dans le chapitre 4. Nous étudions le comportement de la solution de l'équation non linéaire décrite par Benachour *et al* [BRTV98, BRV98], c'est-à-dire l'équation des milieux granulaires généralisée avec uniquement un potentiel d'interaction. Nous introduisons un nouveau système de particules pour lequel nous établissons un résultat de propagation du chaos uniforme en temps. Nous en déduisons une vitesse exponentielle de convergence à l'équilibre pour la solution de l'équation non linéaire et retrouvons ainsi un résultat dû à Carrillo *et al* [CMV01]. Enfin nous établissons des intervalles de confiance exacts et gaussiens pour la convergence d'un schéma d'Euler implicite vers la mesure stationnaire du problème d'évolution non linéaire.

C.1. Introduction

In this paper, we study an interacting particle system and an implicit Euler scheme to describe and solve numerically, by a probabilistic way, the following nonlinear equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot [\nabla u + u \nabla W * u], \tag{C.1}$$

where $u(t,\cdot)$ is a time-dependent probability measure on $\mathbb{R}^d$ and $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is an interaction potential. The symbol ∇ stands for the gradient operator whereas $\nabla\cdot$ denotes the divergence operator. At last, $*$ stands for the convolution operator:

$$\nabla W * u(x) = \int \nabla W(x-y)\, u(dy).$$

The function W is supposed to be symmetric

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad W(-x) = W(x), \tag{A1}$$

uniformly convex

$$\exists \lambda > 0,\ \forall x, v \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \text{Hess } W(x) v, v\rangle \geq \lambda \langle v, v\rangle, \tag{A2}$$

and such that its grandient is a locally Lipschitz function with polynomial growth: there exists a polynom P such that

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad |\nabla W(x) - \nabla W(y)| \leq |x-y||P(x) + P(y)|. \tag{A3}$$

Remark C.1.1. — *This equation has several physical interpretations. In particular, Eq.* (C.1)*, in the case when* $W(x) = |x|^3$ *and* $d = 1$*, arises in the modeling of granular media. Consider many infinitesimal particles colliding inelastically. Passing to the limit with the good renormalisation between the frequency and the inelasticity of the collisions, the distribution of the velocity of "a particle among an infinity" turns to be solution of Eq.* (C.1) *(*[BCP97] *provides a complete description of this framework).*

The probabilistic interpretation of Eq. (C.1) is to consider a Markov process which law at time t is u. The nonlinear process $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ is the solution of:

$$\text{(C.2)} \qquad \begin{cases} d\overline{X}_t &= \sqrt{2}\,dB_t - \nabla W * u_t(\overline{X}_t)\,dt, \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t) &= u_t(dy) \quad \text{for } t \geq 0, \end{cases}$$

where $\mathcal{L}(\overline{X}_t)$ stands for the lax of $\overline{X}_t$.

Remark C.1.2. — *The process* $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ *or the stochastic differential equation* (C.2) *(in short SDE) are said to be nonlinear since the coefficients of the SDE depend on the law of* $\overline{X}_t$.

We want to investigate the long time behavior of the nonlinear process and provide a way to simulate its invariant law with Gaussian confidence intervals thanks to an implicit Euler scheme. To achieve this goal, we construct from $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ an interacting particle system, *i.e.* a diffusion on $(\mathbb{R}^d)^{\times N}$ such that:

1. the propagation of chaos holds uniformly in time: roughly speaking, the law of the first coordinate of the particle system at time t converges to u_t and a fixed number of particles are asymptotically independent when the size of the system converges to infinity.
2. the particle system converges to equilibrium, as $t \to \infty$, with an explicit and exponential rate.
3. the associated Euler scheme satisfies Gaussian concentration inequalities uniformly in time and in its size.

The natural way to associate a particle system to the nonlinear process is to replace the law u in the coefficients of Eq. (C.1) by the empirical measure of the system. Let $(B^i_\cdot)_{i\in\mathbb{N}}$ and $(X^i_0)_{i\in\mathbb{N}}$ be two independent collections of independent Brownian motions and independent r.v. with law u_0. One can introduce the process $(X^N_t)_{t\geq 0}$ solution of the following SDE:

$$\text{(C.3)} \qquad \begin{cases} dX^{i,N}_t &= \sqrt{2}\,dB^i_t - \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \nabla W\left(X^{i,N}_t - X^{j,N}_t\right) dt \quad \text{for } i = 1,\ldots,N, \\ X^{i,N}_0 &= X^i_0 \quad \text{for } i = 1,\ldots,N. \end{cases}$$

In Section C.2, we explain why this particle system, which has been studied by Benachour *et al* in [BRTV98], cannot help us to fulfill the program: the propagation of chaos is not uniform in time and the particle system is ill-behaved when time grows. But Carrillo *et al*, in [CMV01], showed that the nonlinear process converges exponentially fast to equilibrium. The aim of this paper is to construct another particle system which shares this property.

We show, in Section C.3, that the former particle system has a bad behavior in the direction $(v, \dots, v)$ and a good one in the other directions. Then we introduce a new particle system $(Y_t^N)_{t\geq 0}$ which is the projection of (C.3) on the orthogonal of $(v, \dots, v)$.

The section C.4 is devoted to the study of this new particle system. We first establish that it satisfies the Bakry-Emery criterion with positive curvature λ where λ is given by (A2). Then the invariant measure $u_\infty^{(N)}$ of the particle system satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant $2/\lambda$: for every smooth function f on $(\mathbb{R}^d)^{\times N}$,

$$\mathrm{Ent}_{u_\infty^{(N)}}\big(f^2\big) \leq \frac{2}{\lambda}\int |\nabla f|^2 \, du_\infty^{(N)},$$

where

$$\mathrm{Ent}_\mu\big(f^2\big) := \int f^2 \log f^2 \, d\mu - \int f^2 \, d\mu \log \int f^2 \, d\mu = \int f^2 \log \frac{f^2}{\int f^2 \, d\mu} \, d\mu.$$

This result implies that the relative entropy of $u_t^{(N)}$, the law of the particle system at time t, with respect to $u_\infty^{(N)}$ decreases exponentially fast:

$$\mathrm{Ent}\Big(u_t^{(N)} \,|\, u_\infty^{(N)}\Big) \leq \mathrm{Ent}\Big(u_0^{(N)} \,|\, u_\infty^{(N)}\Big) e^{-2\lambda t},$$

where

$$\mathrm{Ent}(\nu \,|\, \mu) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu & \text{if } \nu \ll \mu \\ +\infty & \text{else.} \end{cases}$$

In Section C.5, we establish that the uniform propagation of chaos holds for the convergence of the projected particle system.

Theorem C.1.3. — *If W satisfies* (A1), (A2) *and* (A3), *then there exists a constant C such that, for every $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\bigg(\Big|Y_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\Big|^2\bigg) \leq \frac{C}{N}.$$

At this point we are able to use the program. We recover in Section C.6 the exponential convergence to equilibrium for the nonlinear PDE established in [CMV01] in term of Wasserstein distance:

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(\nu, \mu) := \sqrt{\inf \iint \frac{1}{2}|x-y|^2 \, d\pi(x, y)},$$

where the infimum is running over all probability measures π on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ with respective marginals ν and μ.

Theorem C.1.4. — *If W satisfies* (A1), (A2) *and* (A3), *then, there exists a constant K such that:*

$$W_{\mathbf{2}}(u_t, u_\infty) \leq K e^{-\lambda t}.$$

At last, in Section C.7, we introduce the implicit Euler scheme that approximates the projected particle system. We show that it satisfies a logarithmic Sobolev inequality which is independent of its size and time. We deduce Gaussian concentration inequalities for the convergence of the empirical measure to its mean. This provides exacts confidence intervals for the simulation of the solution of (C.1) or its equilibrium measure u_∞.

Theorem C.1.5. — *There exists a constant c shuch that, for every function f with Lipschitz seminorm less than 1,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(Y_n^{i,N,\gamma}) - \int f\,du_\infty\right| \geq r + c\sqrt{\gamma} + \frac{c}{\sqrt{N}} + ce^{-\lambda\gamma n}\right) \leq 2e^{-N\lambda r^2/2},$$

where $(Y_n^{N,\gamma})_{n\in\mathbb{N}}$ is the implicit Euler scheme with discretisation step γ.

This result allows to choose the values of each parameter (number of particles, step and number of iterations of the Euler scheme): suppose that c and λ are equal to 1, then to get a result with precision 4ε with probability $2e^{-a^2}$, one can take

$$r = \frac{2a\varepsilon}{a+1}, \quad N = \frac{(a+1)^2}{4\varepsilon^2}, \quad \gamma = \varepsilon^2, \quad \text{and} \quad n = -\frac{\log\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

C.2. A simple particle system which is not enough precise

Benachour *et al*, in [BRTV98, BRV98], study Eq. (C.1) from the probabilistic point of view. They establish a polynomial convergence to the equilibrium and they associate to Eq. (C.1) a nonlinear Markov process $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ solution of (C.2) and an interacting particle system $(X_t^N)_{t\geq 0}$ solution of (C.3). In the sequel we introduce a family of independent nonlinear processes $(\overline{X}^i_\cdot)_{i\in\mathbb{N}^*}$ defined by:

$$\text{(C.4)} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} d\overline{X}_t^i &=& \sqrt{2}\,dB_t^i - \nabla W * u_t(\overline{X}_t^i)\,dt, \\ \mathcal{L}(\overline{X}_t^i) &=& u_t(dy) \quad \text{for } t\geq 0, \\ \overline{X}_0^i &=& X_0^i. \end{array}\right.$$

The process $(\overline{X}_t^i)_{t\geq 0}$ is driven by the same Brownian motion than the i^{th} particle of the system and they are equal at time 0.

The nonlinear process is not simpler to study than Eq. (C.1). The fruitful idea, initiated in the general case by McKean and Kac, is to associate to $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ an interacting particle system. This process is much more simpler to study or to simulate than $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$. Unfortunately, the three requirements of the program fail to be true for the particle system (C.3)!

C.2.1. Propagation of chaos. — First, the propagation of chaos phenomenon holds but not uniformly in time.

***Theorem C.2.1* (Benachour *et al*).** — *If $\mathbb{E}\big(|X_0|^2\big)$ is finite, then, there exists a constant C such that, for every $T \geq 0$ and $N \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left(\left|X_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\right|^2\right) \leq \frac{CT^2}{N},$$

where the process $(\overline{X}_t^i)_{t\geq 0}$ is defined Eq. (C.4).

C.2.2. Long time behavior of the first particle system. — Secondly, it can be proved that the distribution of the particle system (C.3) does not converge when t grows to infinity to a probability measure. The simplest way to establish this point is to notice that, thanks to the assumption (A1), ∇W is odd and then, the mean of the empirical measure is equal to

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_t^{i,N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} B_t^i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_0^i$$

which is a sum of a Gaussian random variable $\mathcal{N}(0, t/N)$ and a fixed (in time) random variable and then does not converge, as $t \to \infty$, to a probability measure. This fact suggests that the direction $(v, \ldots, v)$ badly influences the long time behavior of the particle system.

Let us now establish that the situation is much more better in the other directions. In the sequel, we deal with derivation operators on $\mathbb{R}^d$ and $(\mathbb{R}^d)^{\times N}$. The operators on the product space will be written with bold fonts. For example, the symbol $\boldsymbol{\nabla}$ stands for the gradient operator on $(\mathbb{R}^d)^{\times N}$.

Eq. (C.3) which defines the particle system can be rewritten as:

$$dX_t^N = \sqrt{2}d\mathcal{B}_t - \boldsymbol{\nabla} U(X_t^N)\, dt,$$

where $\mathcal{B}_t = (B_t^1, \ldots, B_t^N)$ and $U\ :\ \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is equal to

$$U(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{2N}\sum_{1\leq i,j\leq N} W(x_i - x_j).$$

Equivalently, the law of the particle system $v_t^{(N)}$ is solution of the linear Fokker-Planck equation:

$$\frac{\partial v^{(N)}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\big[\boldsymbol{\nabla} v^{(N)} + v^{(N)}\boldsymbol{\nabla} U\big].$$

At this point, let us recall a result established by Bakry [Bak97] which provides logarithmic Sobolev inequalities for the semigroup $(\mathbf{P}_t)_t$ associated to $(X_t^N)_{t\geq 0}$.

***Theorem C.2.2* (Bakry).** — *If $(\mathbf{P}_t)_t$ is the semigroup associated to the process $(X_t^N)_{t\geq 0}$ and ρ is a real number, then the following properties are equivalent:*

1. *for every x and v in $(\mathbb{R}^d)^N$,*

$$\langle \mathbf{Hess}\ U(x)v, v\rangle \geq \rho|v|^2$$

2. *for every* $t \geq 0$, *and* x *in* $(\mathbb{R}^d)^N$, *the measure* $\mathbf{P}_t(\cdot)(x)$ *satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant*

$$C_t = \frac{2}{\rho}\big(1 - e^{-2\rho t}\big).$$

Remark C.2.3. — *If* ρ *is equal to 0, the constant* C_t *is equal to* $4t$.

The next step is then the study of the Hessian matrix of U and in particular of its spectrum.

Lemma C.2.4. — *If* W *satisfies* (A2), *then, the vectors* $\boldsymbol{v} = (v, \dots, v)$, *where* v *is a vector of* $\mathbb{R}^d$, *belong to the kernel of the matrix* $\mathbf{Hess}\ U(x)$.

Proof. — The matrix $\mathbf{Hess}\ U(x)$ has a special property: dividing $\mathbf{Hess}\ U(x)$ in blocks of size $d \times d$, one can see that each diagonal entry is equal to the sum of the other terms of its row. Then it is clear that a vector $(v, \dots, v)$ where v belongs to $\mathbb{R}^d$ is such that $(\mathbf{Hess}\ U(x))\mathbf{v} = 0$. □

Proposition C.3.1 perform a complete study of the eigenvalues and eigenspaces of $\mathbf{Hess}\ U(x)$.

As a conclusion, the law of the particle system at time t satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant $4t$. This result gives no information when time grows to infinity. Moreover, one can notice that the measure $\exp(-U)$ has an infinite mass.

C.2.3. Long time behavior of the nonlinear process. — Nevertheless Carrillo *et al* [CMV01] investigate the long time behavior of the solution of Eq. (C.1) studying the time evolution of the functional:

$$\eta(u) = \int u(x) \log u(x)\, dx + \frac{1}{2} \iint W(x-y) u(x) u(y)\, dx\, dy. \tag{C.5}$$

The method consists in an extension to the nonlinear framework of the Bakry and Emery strategy which is used in Section C.4:

– show that the function β from $\mathbb{R}_+$ to $\mathbb{R}$ defined by $\beta(t) = \eta(u_t) - \eta(u_\infty)$ is decreasing,
– find a differential inequality between β' and β'' and then use Gronwall lemma.

This strategy is very attractive but the computation of β'' requires high attention and precision.

***Theorem C.2.5* (Carrillo *et al*).** — *If* W *satisfies* (A1) *and* (A2), *the solution of Eq.* (C.1) *converges exponentially fast to equilibrium. More precisely, there exists a constant* K, *depending on* $\eta(u_0)$, *such that*

$$\eta(u_t) - \eta(u_\infty) \leq K \exp(-2\lambda t)$$

where u_∞ *is the unique minimizer of* η *with the mean of* u_0.

Thus, we face the paradoxical situation where the particle system does not behave as well as the nonlinear process it approximates.

C.3. Another particle system

In this section we carefully investigate the reason why the choice of the process $(X_t^N)_{t\geq 0}$ is not the best one.

C.3.1. A remark on the nonlinear evolution. — First, the time evolution of the solution of Eq. (C.1) occurs in the class of the probability measures with mean equal to the one of the initial condition u_0. Indeed,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{X}_t) &= \mathbb{E}(\overline{X}_0) - \int_0^t \mathbb{E}\big[\nabla W * u_s(\overline{X}_s)\big]\,ds \\ &= \mathbb{E}(\overline{X}_0) - \int_0^t \mathbb{E}\Big[\nabla W(\overline{X}_s - \overline{X}'_s)\Big]\,ds,\end{aligned}$$

where $(\overline{X}'_t)_{t\geq 0}$ is an independent copy of $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$. According to Assumption (A1), ∇W is an odd function, for every $s \in \mathbb{R}_+$, one has

$$\mathbb{E}\Big[\nabla W(\overline{X}_s - \overline{X}'_s)\Big] = 0,$$

and then $\mathbb{E}(\overline{X}_t) = \mathbb{E}(\overline{X}_0)$ for every $t \in \mathbb{R}_+$.

Since our aim is to construct a particle system which empirical measure is a good approximation of u_t, it seems reasonable to choose its mean near of the one of u_0. As we will see, this remark is the key of the problem.

C.3.2. The projected particle system. — We have already stressed that the vectors $\mathbf{v} = (v, \ldots, v)$ prevent the particle system from converging to equilibrium. The following result provides a complete description of spec **Hess** U.

Proposition C.3.1. — *If W satisfies* (A2)*, then,*

1. *the matrix* **Hess** $U(x)$ *admits* 0 *as an eigenvalue with multiplicity d and the associated eigenvectors are of the following form $\mathbf{v} = (v, \ldots, v)$ where v belongs to $\mathbb{R}^d$,*
2. *the others eigenvalues are greater or equal than λ.*

Proof. — We have already noticed (see Lemma C.2.4) that the vectors that can be written $(v, \ldots, v)$ are in the kernel of **Hess** $U(x)$. We have now to study the other directions. Let us decompose the Hessian matrix of U in blocks of size $d \times d$. The entries of **Hess** U are denoted by $(H_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$:

$$H_{ii} = \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} \mathrm{Hess}\; W(x_i - x_j) \quad \text{and} \quad H_{ij} = -\frac{1}{N}\mathrm{Hess}\; W(x_i - x_j) \quad \text{for } i \neq j.$$

The first point of the proposition is easy to check.

Let us study the other eigenvalues. In the sequel the matrix A stands for

$$A := \lambda \mathrm{Id} - \frac{\lambda}{N}\mathbb{1}$$

where $\mathbb{I}$ is the matrix whose all blocks of size $d \times d$ are equal to I the identity matrix on $\mathbb{R}^{d\times d}$:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I & \dots & I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I & \dots & I \end{pmatrix}$$

The matrix H can be written $H(x) = A + H(x) - A$. The spectrum of the matrix A is $\{0, \lambda\}$ with respective multiplicity d and $d(N-1)$ and eigenvectors the sets $\{\mathbf{v} = (v, \dots, v)\}$ and

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N), \quad \sum_{i=1}^N v_i = 0 \right\}.$$

At last, let us show that $H - A$ is a nonnegative symmetric matrix. Denoting by

$$B_{ij} = \frac{1}{N}(\text{Hess } W(x_i - x_j) - \lambda I) \quad \text{for } i \neq j,$$

we have

$$(H - A)_{ii} = \sum_{j \neq i} B_{ij} \quad \text{and} \quad (H - A)_{ij} = -B_{ij} \quad \text{for } i \neq j.$$

Moreover, $\langle B_{ij} v, v\rangle \geq \lambda |v|^2$ and B_{ij} is symmetric. Then, for every vector $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$,

$$\begin{aligned} \langle (H - A)\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle &= \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^N \left(\langle B_{ij} v_i, v_i\rangle - \langle B_{ij} v_i, v_j\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^N \langle B_{ij}(v_i - v_j), (v_i - v_j)\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

This achieves the proof. $\square$

According to Proposition C.3.1, the natural idea is to project the particle system on the set $\mathcal{M}$ which is orthogonal to $\{\mathbf{v} = (v, \dots, v)\}$:

$$\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N , \quad \sum_{i=1}^N x_i = 0 \right\},$$

Project the vector X^N on $\mathcal{M}$ is nothing else than subtract to all its coordinates the mean of its coordinates. Let us introduce the process $(Y_t^N)_{t\geq 0}$ on $\mathbb{R}^{dN}$ defined by

$$Y_t^{i,N} = X_t^{i,N} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_t^{j,N} \quad \text{for all } i = 1, \dots, N\,.$$

By definition of Y^N,

$$X_t^{i,N} - X_t^{j,N} = Y_t^{i,N} - Y_t^{j,N}\,.$$

Then, one has

$$Y_t^{i,N} = X_0^i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_0^j + \sqrt{2}B_t^i - \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{j=1}^N B_t^j - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^t \nabla W(Y_s^{i,N} - Y_s^{j,N})\, ds.$$

Remark C.3.2. — *Notice that the projected process $(Y_t^N)_{t\geq 0}$ is still a diffusion on $\mathcal{M}$. This is due to the invariance of the drift by translation of any vector in $\{\boldsymbol{v} = (v,\dots,v)\}$. One could rewrite Y_t^N with the help of $N-1$ independent Brownian motions in a system of coordinates in $\mathcal{M}$ but this would destroy the symmetry in the writing of Y_t^N.*

C.4. Long time behavior of the projected particle system

One of the most efficient tools to study the convergence to equilibrium for a diffusion process to establish a logarithmic Sobolev inequality for its invariant probability measure. To get such a result one can use the following theorem.

***Theorem C.4.1* (Bakry-Emery).** — *If for every $x \in \mathbb{R}^{dN}$,*

$$\mathbf{Hess}U(x) \geq \rho Id$$

then, the measure μ with density

$$\frac{1}{Z}e^{-U(x)} \quad \text{where} \quad Z = \int e^{-U(x)}\, dx,$$

satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant $2/\rho$ i.e. *for every smooth function f,*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq \frac{2}{\rho}\int |\nabla f|^2\, d\mu,$$

where

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) := \int f^2 \log f^2\, d\mu - \int f^2\, d\mu \log \int f^2\, d\mu.$$

Remark C.4.2. — *By an analogy with Riemannian geometry, we will call ρ the curvature of the diffusion process with infinitesimal generator $\Delta f - \nabla U \cdot \nabla f$.*

The process $(Y_t^N)_{t\geq 0}$ on $\mathcal{M}$ has a curvature greater than λ. To establish this point, one can write the process $(X_t^N)_{t\geq 0}$ in an orthonormal basis with the first d vectors in $\mathcal{N}$ and the other in $\mathcal{M}$. The two processes are independent and the first one is a standard Brownian motion whereas the second one is diffusion with a curvature greater than λ. This is not surprising: this fact is contained in Proposition C.3.1. As a consequence we get that its invariant measure satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant $2/\lambda$.

Proposition C.4.3. — *If W satisfies* (A1) *and* (A2), *then, the invariant law of (Y_t^N) which is equal to*

$$u_\infty^{(N)} = \frac{1}{Z_N}\mathbb{1}_{\mathcal{M}}(y)\exp\left(\frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^N W(y_i - y_j)\right) dy,$$

with

$$Z_N = \int_{\mathcal{M}} \exp\left(\frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^{N} W(y_i - y_j)\right) dy,$$

satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant $2/\lambda$.

As it s well known, this inequality implies an estimate for the convergence to equilibrium in terms of relative entropy.

Corollary C.4.4. — *If* $u_t^{(N)}$ *stands for the density of the law of* Y_t^N*, then, for every* $t \geq 0$*,*

$$\mathrm{Ent}\left(u_t^{(N)} \,|\, u_\infty^{(N)}\right) \leq \mathrm{Ent}\left(u_0^{(N)} \,|\, u_\infty^{(N)}\right) e^{-2\lambda t}.$$

Remark C.4.5. — *This result is quite classical but we reproduce its proof in order to give an idea of the strategy used in* [CMV01].

Proof of Corollary C.4.4. — We study the time evolution of the function α from $\mathbb{R}_+$ to $\mathbb{R}$ defined by:

$$\alpha(t) := \mathrm{Ent}\left(u_t^{(N)} \,|\, u_\infty^{(N)}\right) = \int \log \frac{u_t^{(N)}}{u_\infty^{(N)}} du_t^{(N)}.$$

Using the fact that $u_t^{(N)}$ is solution of the Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial u^{(N)}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\boldsymbol{\nabla} u^{(N)} + u^{(N)} \boldsymbol{\nabla} U\right],$$

one gets

$$\alpha'(t) = -\int \left| \frac{\boldsymbol{\nabla} u_t^{(N)}}{u_t^{(N)}} - \frac{\boldsymbol{\nabla} u_\infty^{(N)}}{u_\infty^{(N)}} \right|^2 du_t^{(N)}.$$

Moreover, the logarithmic Sobolev inequality for $u_\infty^{(N)}$ ensures that:

$$\mathrm{Ent}\left(u_t^{(N)} \,|\, u_\infty^{(N)}\right) \leq \frac{1}{2\lambda} \int \left| \frac{\boldsymbol{\nabla} u_t^{(N)}}{u_t^{(N)}} - \frac{\boldsymbol{\nabla} u_\infty^{(N)}}{u_\infty^{(N)}} \right|^2 du_t^{(N)}.$$

So, α satisfies a differential inequality:

$$\alpha'(t) \leq -2\lambda \alpha(t),$$

which achieves the proof. □

C.5. Uniform propagation of chaos

We have now to establish the propagation of chaos phenomenon.

Theorem C.5.1. — *If W satisfies* (A1) *and* (A2)*, then there exists a constant C such that, for every $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\Big(\Big|Y_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\Big|^2\Big) \leq \frac{C}{N}.$$

Proof. — The following proof follows the lines of the one of Theorem C.2.1 established in [BRTV98] and the improvement will comes from the fact that the new particle system is on $\mathcal{M}$.

Let us first define, for $i = 1, \dots, N$, the process $(\overline{Y}_t^{i,N})_{t\geq 0}$ by:

$$\overline{Y}_t^{i,N} := \overline{X}_t^i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \overline{X}_t^j.$$

This is the i^{th} coordinate of the projection on $\mathcal{M}$ of the vector $(\overline{X}_t^1, \dots, \overline{X}_t^N)$.

To control $\mathbb{E}\Big(\Big|Y_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\Big|^2\Big)$, we write

$$\sqrt{\mathbb{E}\Big(\Big|Y_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\Big|^2\Big)} \leq \sqrt{\mathbb{E}\Big(\Big|Y_t^{i,N} - \overline{Y}_t^{i,N}\Big|^2\Big)} + \sqrt{\mathbb{E}\Big(\Big|\overline{Y}_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\Big|^2\Big)}. \tag{C.6}$$

The second term of the right hand side is easy to deal with. By independence of the processes of $\overline{X}_t^i$ and $\overline{X}_t^j$,

$$\mathbb{E}\Big(\Big|\overline{Y}_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\Big|^2\Big) = \frac{1}{N}\mathbb{E}\Big(\Big|\overline{X}_t^i\Big|^2\Big).$$

Moreover the moments of the process $(\overline{X}_t)_{t\geq 0}$ are bounded, uniformly in time, as soon as they are finite at time 0.

***Lemma C.5.2* (Benachour *et al*).** — *If $\mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_0\big|^{2n}\Big)$ is finite, then there exists a K_n such that*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_t\big|^{2n}\Big) \leq K_n.$$

Proof. — Let us investigate the proof of the case $n = 1$ in order to show the role of the assumptions A1 and A2. A complete proof of this result is performed by Proposition 3.8 in [BRTV98].

By the Itô formula, we get

$$\mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_t\big|^2\Big) - \mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_0\big|^2\Big) = -2\int_0^t \mathbb{E}\big[\overline{X}_s \cdot \nabla W * u_s(\overline{X}_s)\big]\, ds + 2t.$$

Let $(\overline{X}'_t)_{t\geq 0}$ be an independent copy of $(\overline{X}'_t)_{t\geq 0}$. Since ∇W is an odd function, one has

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_t\big|^2\Big) - \mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_0\big|^2\Big) &= -2\int_0^t \mathbb{E}\Big[\overline{X}_s\cdot\nabla W(\overline{X}_s - \overline{X}'_s)\Big]\,ds + 2t\\ &= -\int_0^t \mathbb{E}\Big[(\overline{X}_s - \overline{X}'_s)\cdot\nabla W(\overline{X}_s - \overline{X}'_s)\Big]\,ds + 2t.\end{aligned}$$

The assumption (A2) of strict convexity for W provides

$$\mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_t\big|^2\Big) - \mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_0\big|^2\Big) \leq -\lambda\int_0^t \mathbb{E}\Big[\Big(\overline{X}_s - \overline{X}'_s\Big)^2\Big]\,ds + 2t.$$

Then we use that $\mathbb{E}(\overline{X}_s) = \mathbb{E}(\overline{X}_0)$ for every $s\in\mathbb{R}_+$ to get

$$\mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_t\big|^2\Big) - \mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_0\big|^2\Big) \leq -2\lambda\int_0^t \mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_s\big|^2\Big)\,ds + 2t\Big(\lambda\big[\mathbb{E}(\overline{X}_0)\big]^2 + 1\Big).$$

Gronwall lemma achieves the proof in the case $n = 1$:

$$\mathbb{E}\Big(\big|\overline{X}_t\big|^2\Big) \leq \left[\Big(\mathbb{E}(\overline{X}_0)\Big)^2 + \frac{1}{2\lambda}\right]\Big(1 - e^{-2\lambda t}\Big) + \mathbb{E}\Big(\overline{X}_0^2\Big)e^{-2\lambda t}.$$

An induction achieves the proof of the Lemma C.5.2. □

Let us turn to the first term of the right hand side of (C.6).

$$\begin{aligned}Y_t^{i,N} - \overline{Y}_t^{i,N} &= -\frac{1}{N}\int_0^t\sum_{j=1}^N\Big[\nabla W(Y_s^{i,N} - Y_s^{j,N}) - \nabla W * u_s(\overline{X}_s^i)\Big]\,ds\\ &\quad -\frac{1}{N}\int_0^t\sum_{j=1}^N \nabla W * u_s(\overline{X}_s^j)\,ds.\end{aligned}$$

Using the Itô formula, one can get

$$\sum_{i=1}^N\Big|Y_t^{i,N} - \overline{Y}_t^{i,N}\Big|^2 = -2\sum_{1\leq i,j\leq N}\int_0^t\big[\rho_{ij}^{(1)}(s) + \rho_{ij}^{(2)}(s) + \rho_{ij}^{(3)}(s)\big]\,ds,$$

where

$$\begin{aligned}\rho_{ij}^{(1)}(s) &:= \Big[\nabla W(Y_s^{i,N} - Y_s^{j,N}) - \nabla W(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j)\Big]\cdot\Big[Y_s^{i,N} - \overline{Y}_s^{i,N}\Big]\\ &= \Big[\nabla W(Y_s^{i,N} - Y_s^{j,N}) - \nabla W(\overline{Y}_s^{i,N} - \overline{Y}_s^{j,N})\Big]\cdot\Big[Y_s^{i,N} - \overline{Y}_s^{i,N}\Big],\\ \rho_{ij}^{(2)}(s) &:= \Big[\nabla W(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j) - \nabla W * u_s(\overline{X}_s^i)\Big]\cdot\Big[Y_s^{i,N} - \overline{Y}_s^{i,N}\Big],\\ \rho_{ij}^{(3)}(s) &:= \Big[\nabla W * u_s(\overline{X}_s^i)\Big]\cdot\Big[Y_s^{i,N} - \overline{Y}_s^{i,N}\Big].\end{aligned}$$

We treat the three terms one by one. To deal with $\rho_{ij}^{(1)}(s)$ one has to gather the crossing terms:

$$\sum_{1\leq i,j\leq N}\rho_{ij}^{(1)}(s) = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq N}\big[\rho_{ij}^{(1)}(s) + \rho_{ji}^{(1)}(s)\big].$$

The sum $\rho_{ij}^{(1)}(s)+\rho_{ji}^{(1)}(s)$ is equal to

$$\Big[\nabla W(Y_s^{i,N}-Y_s^{j,N})-\nabla W(\overline{Y}_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{j,N})\Big]\cdot\Big[\Big(Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big)-\Big(Y_s^{j,N}-\overline{Y}_s^{j,N}\Big)\Big]$$

which is also equal to

$$\Big[\nabla W(Y_s^{i,N}-Y_s^{j,N})-\nabla W(\overline{Y}_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{j,N})\Big]\cdot\Big[(Y_s^{i,N}-Y_s^{j,N})-\Big(\overline{Y}_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{j,N}\Big)\Big].$$

Then, by the convexity assumption, $\rho_{ij}^{(1)}(s)+\rho_{ji}^{(1)}(s)$ is bounded below by the quantity:

$$\lambda\Big|(Y_s^{i,N}-Y_s^{j,N})-\Big(\overline{Y}_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{j,N}\Big)\Big|^2=\lambda\Big|\Big(Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big)-\Big(Y_s^{j,N}-\overline{Y}_s^{j,N}\Big)\Big|^2.$$

Since the vectors Y^N and $\overline{Y}^N$ are on $\mathcal{M}$, the sum of their coordinates is equal to 0 and then, we get by a straightforward computation:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le N}\rho_{ij}^{(1)}(s) &\ge \frac{\lambda}{2}\sum_{1\le i,j\le N}\Big|\Big(Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big)-\Big(Y_s^{j,N}-\overline{Y}_s^{j,N}\Big)\Big|^2\\
&= \lambda N\sum_{i=1}^N\Big|Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big|^2\\
&\quad -\lambda\sum_{1\le i,j\le N}\Big(Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big)\cdot\Big(Y_s^{j,N}-\overline{Y}_s^{j,N}\Big)\\
&= \lambda N\sum_{i=1}^N\Big|Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big|^2-\lambda\Big|\sum_{i=1}^N\Big(Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big)\Big|^2\\
&= \lambda N\sum_{i=1}^N\Big|Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big|^2.
\end{aligned}$$

Those lines contain the key point of the improvement of the result established in [BRTV98].

The second term of the right hand side of (C.6) is controlled by the Cauchy-Schwarz inequality:

$$-\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^N\rho_{ij}^{(2)}(s)\Big]\le\Big[\mathbb{E}\Big(\Big|Y_s^{i,N}-\overline{Y}_s^{i,N}\Big|^2\Big)\Big]^{1/2}\theta_i(s)^{1/2},$$

where

$$\theta_i(s)=\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{j=1}^N\Big(\nabla W(\overline{X}_s^i-XJ_s)-\nabla W*u_s(\overline{X}_s^i)\Big)\Big|^2\Big].$$

Using the independence of the copies of $\overline{X}_t$, the polynomial growth of ∇W and Lemma C.5.2, one can prove that there exists a constant c such that

$$\theta_i(s)\le cN.$$

The key is to notice that

$$\mathbb{E}\Big[\nabla W(\overline{X}_s^i-\overline{X}_s^j)-\nabla W*u_s(\overline{X}_s^i)\Big]=0.$$

The third term of the right hand side of (C.6) is controlled by the same way using Cauchy-Schwarz inequality and the fact that

$$\mathbb{E}\Big[\nabla W(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j)\Big] = 0.$$

As a conclusion, we have proved that there exists a constant c such that

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\Big(\Big|Y_t^{i,N} - \overline{Y}_t^{i,N}\Big|^2\Big) \quad &\le \quad -2\lambda N \int_0^t \sum_{i=1}^N \Big|Y_s^{i,N} - \overline{Y}_s^{i,N}\Big|^2 ds \\ &\quad + c\sqrt{N}\int_0^t \Big[\mathbb{E}\Big(\Big|Y_s^{i,N} - \overline{Y}_s^{i,N}\Big|^2\Big)\Big]^{1/2} ds.\end{aligned}$$

If $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is defined by $\alpha(s) = \mathbb{E}\Big(\Big|Y_s^{i,N} - \overline{Y}_s^{i,N}\Big|^2\Big)$, then, we have established that

$$\alpha'(s) \le -2\lambda\alpha(s) + \frac{c}{\sqrt{N}}\sqrt{\alpha(s)}.$$

Gronwall lemma achieves the proof:

$$\sqrt{\alpha(t)} \le \frac{c}{\lambda\sqrt{N}}\big(1 - e^{-\lambda t}\big).$$

□

C.6. Convergence to equilibrium for the nonlinear process

In this section we investigate the long time behavior of u_t thanks to the uniform propagation of chaos and the convergence to equilibrium for the projected particle system. Instead of proving convergence for the functional η (see Equation (C.5)), we prove it in terms of Wasserstein distance.

Definition C.6.1. — *The Wasserstein metric between to probability measures μ and ν with finite second moments is defined by:*

$$W_2(\nu,\mu) := \sqrt{\inf \iint \frac{1}{2}|x-y|^2\, d\pi(x,y)},$$

where the infimum is running over all probability measures π on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ with respective marginals ν and μ.

Theorem C.6.2. — *There exists a constant K such that*

$$W_2(u_t, u_\infty) \le Ke^{-\lambda t}.$$

Proof. — By the triangular inequality, one has

$$\mathrm{W}_2(u_t,u_\infty) \le \mathrm{W}_2\big(u_t, u_t^{(1,N)}\big) + \mathrm{W}_2\big(u_t^{(1,N)}, u_\infty^{(1,N)}\big) + \mathrm{W}_2(u_\infty^{(1,N)}, u_\infty).$$

By the definition of $\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(\cdot,\cdot)$ and the uniform propagation of chaos established in Theorem C.5.1, one has:

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}\big(u_t, u_t^{(1,N)}\big) + \mathrm{W}_{\mathbf{2}}(u_\infty^{(1,N)}, u_\infty) \leq 2\sqrt{\sup_{t\geq 0}\ \mathbb{E}\left(\left|Y_t^{i,N} - \overline{X}_t^i\right|^2\right)} \leq \frac{2C}{\sqrt{N}}.$$

To deal with the quantity $\mathrm{W}_{\mathbf{2}}\big(u_t^{(1,N)}, u_\infty^{(1,N)}\big)$, we first make use of the following remark.

Lemma C.6.3. — *Let μ and ν be two probability measures on $\mathbb{R}^d$. Then, for every probability measures on $(\mathbb{R}^d)^{\times N}$, μ_N and ν_N with respective marginals $\mu,\ldots,\mu$ and $\nu,\ldots,\nu$,*

$$W_{\mathbf{2}}(\mu_N,\nu_N)^2 \geq N\, W_{\mathbf{2}}(\mu,\nu)^2.$$

Proof. — One has to use the definition of the Wasserstein metric for $\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(\mu_N,\nu_N)$ and choose the product measure $\mu\otimes\cdots\mu\otimes\nu\otimes\cdots\otimes\nu$. □

Then we get

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}\big(u_t^{(1,N)}, u_\infty^{(1,N)}\big) \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\mathrm{W}_{\mathbf{2}}\left(u_t^{(N)}, u_\infty^{(N)}\right).$$

At this point we make use of a result established by Otto and Villani in [OV00] and reformulated by Bobkov *et al* [BGL01].

***Theorem C.6.4* (Otto-Villani).** — *If μ is absolutely continuous and satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant C, then, for every probability measure ν absolutely continuous with respect to μ,*

$$W_{\mathbf{2}}(\mu,\nu)^2 \leq \frac{C}{2}\mathrm{Ent}(\nu\,|\,\mu).$$

Thus, we have

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}\big(u_t^{(1,N)}, u_\infty^{(1,N)}\big) \leq \sqrt{\frac{C}{2N}\mathrm{Ent}\left(u_t^{(N)}\,|\,u_\infty^{(N)}\right)},$$

and as a consequence of the exponential decay of the relative entropy for the particle system:

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}\big(u_t^{(1,N)}, u_\infty^{(1,N)}\big) \leq \sqrt{\frac{C}{2N}\mathrm{Ent}\left(u_0^{(N)}\,|\,u_\infty^{(N)}\right)}e^{-\lambda t}.$$

At last, $u_0^{(N)}$ is the projection of $u_0^{\otimes N}$ on $\mathcal{M}$ and then $\mathrm{Ent}\left(u_0^{(N)}\,|\,u_\infty^{(N)}\right)$ is of order N when u_0 is sufficently kind, for example if u_0 is absolutly continuous with a positive density.

As a conclusion, we have shown that for every N,

$$\mathrm{W}_{\mathbf{2}}(u_t, u_\infty) \leq \frac{K}{\sqrt{N}} + Ke^{-\lambda t},$$

which achieves the proof. □

C.7. Confidence intervals for the Euler scheme

To simulate the law of the solution of a stochastic differential equation:

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dB_t + b(X_t)\,dt,$$

the most efficient probabilistic way is to use the Euler scheme with discretisation step γ defined by:

$$X_{n+1}^{\gamma} = X_n^{\gamma} + \gamma b(X_n^{\gamma}) + \sigma(X_n^{\gamma})(B_{\gamma(n+1)} - B_{\gamma n}).$$

Unfortunately, this algorithm does not necessarily converge when the coefficients σ and b are no longer uniformly Lipschitz.

An alternative way consists in using the implicit Euler scheme. Let us construct it in the case where one wants to simulate the law of the diffusion:

$$dX_t = \sqrt{2}\,dB_t - \nabla U(X_t)\,dt,$$

where U satisfies (A2). The implicit Euler scheme is defined by:

$$X_{n+1}^{\gamma} = X_n^{\gamma} - \gamma \nabla U(X_{n+1}^{\gamma}) + \sqrt{2}(B_{\gamma(n+1)} - B_{\gamma n}).$$

The price to pay to get a convergent scheme is to invert, at each discretisation step, the function

$$F(x) = x + \gamma \nabla U(x).$$

In our case this is not impossible: since

$$\text{Jac } F = \text{Id} + \gamma \text{Hess } U(x),$$

the classical gradient methods easily solve this problem even in large dimensions.

C.7.1. Logarithmic Sobolev inequalities for the Euler scheme. — We prove here that, when the discretisation step γ is smaller than $1/\lambda$, the iterated kernel K^n satisfies a logarithmic Sobolev inequality with an explicit constant depending on λ.

Theorem C.7.1. — *If the discretisation step γ is smaller that $1/\lambda$, then, for every $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ and (smooth) function f from $\mathbb{R}^d$ to $\mathbb{R}$, K^n satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant*

$$D_{\gamma,n} := \frac{4(1+\lambda\gamma)}{\lambda(2+\lambda\gamma)}\left(1 - \frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2n}}\right). \tag{C.7}$$

Proof of Theorem C.7.1. — If φ is the inverse function of F, let us denote by K the implicit Euler kernel defined by:

$$Kf(x) = \mathbb{E}\Big[(f \circ \varphi)\Big(x + \sqrt{2\gamma}Y\Big)\Big],$$

where the law of Y a Gaussian law $\mathcal{N}(0, \text{Id})$. One has to compute the entropy:

$$\text{Ent}_K\big(f^2\big) = \text{Ent}_{\mu_{x,\gamma}}\big((f \circ \varphi)^2\big)$$

where $\mu_{x,\gamma}$ is the Gaussian law $\mathcal{N}(x, 2\gamma\text{Id})$. In the sequel we omit the index of $\mu_{x,\gamma}$. The measure μ satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant 4γ (see [ABC+00]). Then,

$$\text{Ent}_K\big(f^2\big) \leq 4\gamma \int |\nabla(f \circ \varphi)(x)|^2\, d\mu(x).$$

Now, by the definition of φ, we get

$$\text{Jac } \varphi(x) = [\text{Id} + \gamma \text{Hess } U(x)]^{-1}.$$

Then, for every v in $\mathbb{R}^d$, one has

$$\langle \text{Jac } \varphi(x)v, v\rangle \leq (1+\gamma\lambda)^{-1}|v|^2.$$

As a consequence, the kernels $(K(\cdot)(x))_x$ satisfy a logarithmic Sobolev inequality with the common constant $4\gamma/(1+\lambda\gamma)$:

$$\text{Ent}_K\left(f^2\right) \leq \frac{4\gamma}{1+\lambda\gamma} K\left(|\nabla f|^2\right). \tag{C.8}$$

On the other hand,

$$\nabla K f(x) = \mathbb{E}[\text{Jac } \varphi(Z)\nabla f(\varphi(Z))].$$

Then K and ∇ satisfy the following commutation relation:

$$|\nabla K(f)(x)| \leq (1+\gamma\lambda)^{-1} K(|\nabla f|)(x). \tag{C.9}$$

To prove the logarithmic Sobolev inequality for K^n, we mimic the proof performed in [Bak97] for the diffusion processes:

$$\text{Ent}_K\left(f^2\right) = \sum_{i=1}^n K^{i-1} \text{Ent}_K\left(g_{n-i}^2\right),$$

where g_{n-i} stands for $\sqrt{K^{n-i}(f^2)}$. The logarithmic Sobolev inequality (C.8) provides

$$\text{Ent}_K\left(f^2\right) \leq \frac{4\gamma}{1+\lambda\gamma} \sum_{i=1}^n K^i\left(|\nabla g_{n-i}|^2\right).$$

Now, we make use of the commutation relation (C.9) to get, for $1 \leq i \leq n$,

$$|\nabla g_{n-i}|^2 = \frac{|\nabla K^{n-i}(f^2)|^2}{4K^{n-i}(f^2)} \leq \frac{1}{(1+\lambda\gamma)^2} \frac{[K|\nabla K^{n-i-1}(f^2)|]^2}{4KK^{n-i-1}(f^2)}.$$

Then, since, from Cauchy-Schwarz inequality,

$$\frac{(Kf)^2}{K(g)} \leq K\left(\frac{f^2}{g}\right),$$

one has

$$\frac{[K|\nabla K^{n-i-1}(f^2)|]^2}{4KK^{n-i-1}(f^2)} \leq K\left[\frac{|\nabla K^{n-i-1}(f^2)|^2}{4K^{n-i-1}(f^2)}\right] = K\left[|\nabla g_{n-i-1}|^2\right].$$

A straightforward induction shows that, for $1 \leq i \leq n$,

$$|\nabla g_{n-i}|^2 \leq \frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2(n-i)}} K^{n-i}\left[|\nabla f|^2\right].$$

Then it follows that

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_{K^n}\left(f^2\right) &\leq 4\gamma\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2i}}\right]K^n\left[|\nabla f|^2\right] \\
&= \frac{4\gamma}{1-\frac{1}{(1+\lambda\gamma)^2}}\left(1-\frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2n}}\right)K^n\left[|\nabla f|^2\right] \\
&= \frac{4(1+\lambda\gamma)}{\lambda(2+\lambda\gamma)}\left(1-\frac{1}{(1+\lambda\gamma)^{2n}}\right)K^n\left[|\nabla f|^2\right],
\end{aligned}$$

and the proof is completed. □

C.7.2. Concentration inequalities. — Logarithmic Sobolev inequalities provide Gaussian concentration properties *via* the Herbst's argument (see [Led99]). We will say that f is α-Lipschitz function if

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=\alpha,$$

where $|\cdot|$ stands for the Euclidean norm.

Theorem C.7.2. — *If a measure μ on $\mathbb{R}^d$ satisfies a logarithmic Sobolev inequality with constant C then for every α-Lipschitz (for the Euclidean norm) function g,*

$$\mathbb{P}(|g(X)-\mathbb{E}g(X)|\geq r)\leq 2e^{-r^2/C\alpha^2}.$$

A straightforward application of this result is obtained choosing

$$g(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)$$

where f is an 1-Lipschitz function on $\mathbb{R}^d$. The function g is $1/\sqrt{N}$-Lipschitz and we get:

Proposition C.7.3. — *If $(Z_n^{\gamma,N})_{n\in\mathbb{N}}$ is the implicit Euler scheme associated the projected particle system, then, for every 1-Lipschitz function f on $\mathbb{R}^d$ and every $r\geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(Z_t^{\gamma,i,N})-\mathbb{E}f(Z_t^{\gamma,i,N})\right|\leq r\right)\leq 2e^{-N\lambda r^2/2}.$$

C.7.3. Weak convergence of the Euler scheme. — The previous result ensures that the empirical measure of the Euler scheme is concentrated around its mean as a Gaussian law with variance $1/\lambda$. To achieve the program, we need to establish the following result

Proposition C.7.4. — *There exists a constant c such that, for every $t\geq 0$, $N\in\mathbb{N}^*$ and every 1-Lipschitz function f,*

$$\left|\mathbb{E}f(Z_t^{\gamma,i,N})-\mathbb{E}f(Y_t^{i,N})\right|\leq c\sqrt{\gamma}.$$

This result is a consequence of the following one which is established in [Tal99].

***Proposition C.7.5* (Talay).** — *Suppose that the process* $(X_t)_{t\geq 0}$ *is the solution of:*

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla\Phi(X_t)\,dt$$

where Φ *satisfies* (A2) *and* (A3). *Let us denote by* $(X_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ *is the associated implicit Euler scheme. Then, there exists a constant c such that,*

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\big(|X_{n\gamma} - X_n^\gamma|^2\big) \leq c\sqrt{\gamma}.$$

Remark C.7.6. — *One can also hope to get similar results to the ones presented in* [TT90]*: they obtain a expansion of the error for the weak convergence of the Euler scheme of any order.*

Bibliography

[ABC+00] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto & G. Scheffer – *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[Bak97] D. Bakry – "On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups", *New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994)* (River Edge, NJ), Taniguchi symposium, World Sci. Publishing, 1997, p. 43–75.

[BCP97] D. Benedetto, E. Caglioti & M. Pulvirenti – "A kinetic equation for granular media", *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **31** (1997), no. 5, p. 615–641.

[BGL01] S. Bobkov, I. Gentil & M. Ledoux – "Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations", To appear in Jour. Math. Pu. Appli., 2001.

[BRTV98] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay & P. Vallois – "Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos", *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 173–201.

[BRV98] S. Benachour, B. Roynette & P. Vallois – "Nonlinear self-stabilizing processes. II. Convergence to invariant probability", *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 203–224.

[CMV01] J. Carrillo, R. McCann & C. Villani – "Kinetic equilibration rates for granular media", Work in progress, 2001.

[Led99] M. Ledoux – "Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities", Séminaire de Probabilités XXXIII. Lectures Notes in Math., vol 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 120–216.

[OV00] F. Otto & C. Villani – "Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality", *J. Funct. Anal.* **173** (2000), no. 2, p. 361–400.

[Tal99] D. Talay – "Approximation of invariant measures of nonlinear hamiltonian and dissipative stochastic differential equations", Progress in Stochastic Structural Dynamics, vol. 152, L.M.A.-C.N.R.S., 1999, p. 139–169.

[TT90] D. Talay & L. Tubaro – "Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations", *Stochastic Anal. Appl.* **8** (1990), no. 4, p. 483–509 (1991).

CHAPTER D

INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES POUR DEUX EDP NON LINÉAIRES

Florent Malrieu
Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse (France).
email: malrieu@cict.fr.

Résumé. Nous montrons que les lois en un temps t de deux systèmes de particules en champ moyen (étudiés dans [Szn91] et [BCCP98]) vérifient de manière générique une inégalité de Sobolev logarithmique. Nous en déduisons que la mesure empirique se concentre autour de la solution de l'EDP non linéaire associée comme une gaussienne de variance $1/N$. De plus, nous établissons l'ergodicité du processus non linéaire à partir de celle du système de particules.

Logarithmic Sobolev inequalities for two nonlinear PDE's

Abstract. *We show that two particle systems in mean field interaction (studied in* [Szn91] *and* [BCCP98]*) satisfy a logarithmic Sobolev inequality. Then we deduce the gaussian concentration of the empirical measure around the solution of the associated nonlinear PDE. Besides we derive ergodicity of the nonlinear process from the one of the particle system.*

D.1. Notations et résultats

Intéressons nous dans un premier temps l'exemple du système de particules de Mac Kean (repris par Sznitman dans [Szn91]). Soit b une fonction de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ à dérivées bornées et (B^i) des mouvements browniens sur $\mathbb{R}^d$ indépendants. On definit le système de particules (Y^N) comme la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dY_t^{i,N} = dB_t^i + \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^N b\big(Y_t^{i,N}, Y_t^{j,N}\big)\, dt \quad \text{pour } i = 1, ..., N \\ \mathcal{L}((Y_0^{1,N}, ..., Y_0^{N,N})) = \mathcal{L}(Y_0)^{\otimes N}. \end{cases}$$

Sznitman [Szn91] montre que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\leq T}\Big|Y_t^{i,N} - \overline{Y}_t^i\Big|\Big] \leq \frac{K_T}{\sqrt{N}},$$

où $\overline{Y}^i$ est solution de l'équation non linéaire :

$$\begin{cases} d\overline{Y}^i_t = dB^i_t + \int b(\overline{Y}^i_t, y) u_t(dy)\, dt \\ \mathcal{L}(\overline{Y}^i_t) = u_t(dy) \\ \overline{Y}^i_0 = Y_0. \end{cases}$$

Ceci implique de manière classique un résultat de propagation du chaos.

On peut toutefois être plus précis pour l'étude de la convergence au niveau des marginales : les queues de la mesure empirique à l'instant t sont comparables à celles d'une variable aléatoire gaussienne de variance $1/N$.

Théorème D.1.1 **(Concentration)**. — *Pour tous t positif, N entier et f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ de norme de Lipschitz inférieure à 1, on a pour tout $r \geq 0$*

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(Y^{i,N}_t) - \int f(y) u(t,y)\, dy \right| \geq r + \frac{K_T}{\sqrt{N}} \right) \leq 2 \exp\left(-\frac{Nr^2}{C_t} \right),$$

où u est la solution de l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2} \Delta u(t,x) - \operatorname{div}\left(\int b(x,y) u(t,y)\, dy\, u(t,x) \right). \tag{D.1}$$

Bien entendu, ces résultats ne donnent en général pas d'information quand t tend vers l'infini. Voici pourtant un modèle où l'on peut parfaitement décrire le comportement en temps long du processus non linéaire. Considérons l'équation de transport homogène étudiée par Benedetto *et al* dans [BCCP98] :

$$\begin{cases} \partial_t u = \sigma \partial^2_x u + \partial_x [(\beta x + \lambda(\Phi * u)) u] \\ u(0,x) = f_0(x) \end{cases} \tag{D.2}$$

où σ, λ et β sont des constantes positives et Φ est la fonction $x|x|$. On peut montrer qu'il existe une solution régulière f_t à cette équation qui s'interprète comme la densité de la loi à l'instant t du processus non linéaire solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} d\overline{X}^1_t = \sqrt{2\sigma}\, dB^1_t - \left[\beta \overline{X}^1_t + \lambda(\Phi * f)(t, \overline{X}^1_t) \right] dt \\ \mathcal{L}(\overline{X}^1_t) = f(t,x)\, dx \\ \mathcal{L}(\overline{X}^1_0) = f_0(x) dx. \end{cases} \tag{D.3}$$

On lui associe de manière naturelle le système de particules :

$$\begin{cases} dX^{i,N}_t = \sqrt{2\sigma} dB^i_t - \beta X^{i,N}_t\, dt - \dfrac{\lambda}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \Phi\left(X^{i,N}_t - X^{j,N}_t \right) dt \\ \mathcal{L}(X^N_0) = f_0^{\otimes N} dx \text{ pour } i = 1,..,N \end{cases} \tag{D.4}$$

Il est tout d'abord possible d'améliorer la dépendance en temps des résultats de propagation du chaos.

Théorème D.1.2. — *Si $\int x^4 f_0(x)\,dx$ est finie, alors il existe un réel positif K tel que pour tout $N \geq 1$,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(\left|X_t^{1,N} - \overline{X}_t^1\right|^2\right) \leq \frac{K}{N} \tag{D.5}$$

et

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{1,N} - \overline{X}_t^1\right|^2\right) \leq K\frac{T}{N}.$$

Benedetto *et al* [BCCP98] ont établi l'existence d'une mesure stationnaire de densité $\overline{u}$ pour le processus (D.3). La méthode présentée ici permet de donner une estimation de la vitesse de convergence vers l'équilibre. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des densités de probabilités (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) de moyenne nulle telles que

$$\int f(x)\log f(x)\,dx \text{ et } \int |x|^4 f(x)\,dx$$

soient finis.

Théorème D.1.3. — *Si f_0 appartient à $\mathcal{P}$, alors il existe une constante K telle que pour tout t positif,*

$$\|f_t - \overline{u}\|_1 \leq K\,e^{-\beta t/2}.$$

D.2. Quelques éléments de preuve

La clef de la preuve est le critère de courbure de Bakry et Emery (voir [Bak94]). Dans le cas particulier où l'opérateur L est de la forme

$$Lf(x) = \Delta f(x) - X(x).\nabla(x),$$

il est dit *à courbure minorée par ρ* dès que les valeurs propres de la matrice jacobienne de X sont supérieures à ρ (en tout point x). Le générateur infinitésimal associé à (Y^N) s'écrit, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_N)$:

$$L^N f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \quad \text{où} \quad b_i(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b(x_i, x_j).$$

Un simple calcul montre que L^N est de courbure minorée par

$$\rho = -\|\partial_1 b\|_\infty - \|\partial_2 b\|_\infty.$$

Pour le système (D.4) la courbure est minorée par $\beta > 0$. Dans les deux cas les bornes inférieures de la courbure des opérateurs L^N sont indépendantes de N.

Remarque D.2.1. — *Le même résultat peut être obtenu pour le modèle général de Mac Kean (c'est-à-dire avec des interactions dans le coefficient de diffusion). Les calculs sont toutefois plus ardus pour établir le critère de Bakry-Emery puisqu'il faut tenir compte de la métrique riemannienne induite par L^N sur $\mathbb{R}^{dN}$ et non de sa métrique euclidienne.*

D'après [Bak97], le semi-groupe (P_t) associé à L vérifie alors une inégalité de Sobolev logarithmique de constante

$$C_t = \frac{2}{\rho}[1 - \exp(-2\rho t)].$$

Proposition D.2.2. — *Pour tout réel t positif et toute fonction f suffisamment régulière,*

$$P_t(f^2 \log f^2) - P_t(f^2) \log P_t(f^2) \leq C_t P_t\big(|\nabla f|^2\big).$$

L'argument de Herbst (voir [Led99]) permet d'obtenir la propriété de concentration.

Pour les systèmes de particules (D.4), la mesure invariante μ_N (que l'on connaît explicitement) vérifie alors elle aussi une inégalité de Sobolev logarithmique. Ceci entraîne l'ergodicité du semi-groupe associé que l'on peut de plus quantifier. Définissons l'entropie relative :

$$\mathrm{Ent}(\nu \,|\, \mu) = \begin{cases} \displaystyle\int \log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\nu = \int \log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu & \text{si } \nu \ll \mu \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En dérivant (par rapport au temps) la fonction $\mathrm{Ent}\big(u_t^{(N)} \,|\, \mu_N\big)$ (où $u_t^{(N)}$ est la densité de la loi à l'instant t de (D.4)), on montre avec le lemme de Gronwall que

$$\mathrm{Ent}\big(u_t^{(N)} \,|\, \mu_N\big) \leq \mathrm{Ent}(f_0^N \,|\, \mu_N) e^{-2\beta t}.$$

On peut ainsi établir que si $u_t^{(1,N)}$ est la densité de la loi à l'instant t d'une particule du système (D.4) et que f_0 appartient à $\mathcal{P}$,

$$\big\| u_t^{(1,N)} - \mu_{1,N} \big\|_1 \leq K\sqrt{N} e^{-\beta t}.$$

Pour démontrer le théorème D.1.3, il ne reste plus qu'à écrire

$$\begin{aligned} \|f_t - \overline{u}\|_1 &\leq \big\|f_t - u_t^{(1,N)}\big\|_1 + \big\|u_t^{(1,N)} - \mu_{1,N}\big\|_1 + \|\mu_{1,N} - \overline{u}\|_1 \\ &\leq \frac{K}{\sqrt{N}} + K\sqrt{N} e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

et à choisir N de l'ordre de $e^{\beta t/2}$.

Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans dans les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue.

Bibliographie

[Bak94] D. Bakry – "L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes", École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXII—1992. Lectures Notes in Math., vol 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.

[Bak97] ______, "On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups", *New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994)* (River Edge, NJ), Taniguchi symposium, World Sci. Publishing, 1997, p. 43–75.

[BCCP98] D. Benedetto, E. Caglioti, J. A. Carrillo & M. Pulvirenti – "A non-Maxwellian steady distribution for one-dimensional granular media", *J. Statist. Phys.* **91** (1998), no. 5-6, p. 979–990.

[Led99] M. Ledoux – "Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities", Séminaire de Probabilités XXXIII. Lectures Notes in Math., vol 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 120–216.

[Szn91] A.-S. Sznitman – "Topics in propagation of chaos", École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989. Lectures Notes in Math., vol 1464, Springer, Berlin, 1991, p. 165–251.

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

[ABC+00] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto & G. Scheffer – *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[ABdMBG87] W. Amrein, A. Boutet de Monvel-Berthier & V. Georgescu – « Hardy type inequalities for abstract differential operators », *Mem. Amer. Math. Soc.* **70** (1987), no. 375, p. iv+119.

[Bak85] D. Bakry – « Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques. II. Étude sous la condition $\Gamma_2 \geq 0$ », Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, p. 145–174.

[Bak87] ———, « Étude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée », Séminaire de Probabilités, XXI, Lecture Notes in Math., vol. 1247, Springer, Berlin, 1987, p. 137–172.

[Bak88] ———, « La propriété de sous-harmonicité des diffusions dans les variétés », Séminaire de Probabilités, XXII, Lecture Notes in Math., vol. 1321, Springer, Berlin, 1988, p. 1–50.

[Bak94] ———, « L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes », École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXII—1992. Lectures Notes in Math., vol 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.

[Bak97] ———, « On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups », *New trends in stochastic analysis (Charingworth, 1994)* (River Edge, NJ), Taniguchi symposium, World Sci. Publishing, 1997, p. 43–75.

[BAZ99] G. Ben Arous & O. Zeitouni – « Increasing propagation of chaos for mean fields models », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **35** (1999), no. 1, p. 85–102.

[BCCP98] D. Benedetto, E. Caglioti, J. A. Carrillo & M. Pulvirenti – « A non-Maxwellian steady distribution for one-dimensional granular media », *J. Statist. Phys.* **91** (1998), no. 5-6, p. 979–990.

[BCP97] D. Benedetto, E. Caglioti & M. Pulvirenti – « A kinetic equation for granular media », *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **31** (1997), no. 5, p. 615–641.

[BE85a] D. Bakry & M. Emery – « Diffusions hypercontractives », Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Springer, Berlin, 1985, p. 177–206.

[BE85b] D. Bakry & M. Emery – « Diffusions hypercontractives », Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Lectures Notes in Math., vol 1123, Springer, Berlin, 1985, p. 177–206.

[Ber77] M. Berger – *Géométrie. Vol. 5*, CEDIC, Paris, 1977, La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères.

[BG99] S. G. Bobkov & F. Götze – « Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities », *J. Funct. Anal.* **163** (1999), no. 1, p. 1–28.

[BGL01] S. Bobkov, I. Gentil & M. Ledoux – « Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations », To appear in Jour. Math. Pu. Appli., 2001.

[BL96] D. Bakry & M. Ledoux – « Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator », *Invent. Math.* **123** (1996), no. 2, p. 259–281.

[Bre91] Y. Brenier – « Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions », *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), no. 4, p. 375–417.

[BRTV98] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay & P. Vallois – « Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos », *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 173–201.

[BRV98] S. Benachour, B. Roynette & P. Vallois – « Nonlinear self-stabilizing processes. II. Convergence to invariant probability », *Stochastic Process. Appl.* **75** (1998), no. 2, p. 203–224.

[BT96] M. Bossy & D. Talay – « Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles: application to the Burgers equation », *Ann. Appl. Probab.* **6** (1996), no. 3, p. 818–861.

[BT97] ———, « A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation », *Math. Comp.* **66** (1997), no. 217, p. 157–192.

[Cha93] I. Chavel – *Riemannian geometry, a modern introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[CHK82] H. M. Chung, R. A. Hunt & D. S. Kurtz – « The Hardy Littlewood maximal function on $L(p, q)$ spaces with weights », *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982), no. 1, p. 109–120.

[CM00] N. Cancrini & F. Martinelli – « On the spectral gap of Kawasaki dynamics under a mixing condition revisited », *J. Math. Phys.* **41** (2000), no. 3, p. 1391–1423, Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.

[CMR00] N. Cancrini, F. Martinelli & C. Roberto – « On the logarithmic Sobolev inequality for Kawasaki dynamics under a mixing condition revisited », prépublication, 2000.

[CMV01] J. Carrillo, R. McCann & C. Villani – « Kinetic equilibration rates for granular media », Work in progress, 2001.

[Csi84] I. Csiszár – « Sanov property, generalized I-projection and a conditional limit theorem », *Ann. Probab.* **12** (1984), no. 3, p. 768–793.

[Dav90] E. B. Davies – *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Dav98] E. Davies – « A review of Hardy inequalities », prépublication, 1998.

[EHP95] W. D. Evans, D. J. Harris & L. Pick – « Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees », *J. London Math. Soc. (2)* **52** (1995), no. 1, p. 121–136.

[GHL90] S. Gallot, D. Hulin & J. Lafontaine – *Riemannian geometry*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[GR00] I. Gentil & C. Roberto – « Spectral gaps for spin systems: some non-convex phase examples », à paraître in Jour. Func. Anal., 2000.

[Gri90] J. Grifone – *Algèbre linéaire*, Cepadues Éditions, Toulouse, 1990.

[Gro75] L. Gross – « Logarithmic Sobolev inequalities », *Amer. J. Math.* **97** (1975), no. 4, p. 1061–1083.

[Hel98] B. Helffer – « Analyse semi-classique et mécanique statistique », Cours Post-DEA, Université Paul SAbatier de Toulouse, 1998.

[HL48] G. H. Hardy & J. E. Littlewood – *Inequalities*, Gosudarstv. Izdat. Inostr. Lit., Moscow, 1948.

[KA82] L. V. Kantorovich & G. P. Akilov – *Functional analysis*, 2ème ed., Pergamon Press, Oxford, 1982, Translated from the Russian by Howard L. Silcock.

[KKR93] O. Kavian, G. Kerkyacharian & B. Roynette – « Quelques remarques sur l'ultracontractivité », *J. Funct. Anal.* **111** (1993), no. 1, p. 155–196.

[Led99] M. Ledoux – « Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities », Séminaire de Probabilités XXXIII. Lectures Notes in Math., vol 1709, Springer, Berlin, 1999, p. 120–216.

[Mal00] F. Malrieu – « Inégalités de Sobolev logarithmiques pour deux EDP non linéaires », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 10, p. 819–822.

[Mal01a] ———, « Convergence to equilibrium for a granular media equation and their euler scheme », Prépublication, 2001.

[Mal01b] ———, « Logarithmic Sobolev inequalities for nonlinear PDE's », *Stochastic Process. Appl.* **95** (2001), no. 1, p. 109–132.

[Maz85] V. G. Maz'ja – *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Translated from the Russian by T. O. Shaposhnikova.

[McC95] R. J. McCann – « Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps », *Duke Math. J.* **80** (1995), no. 2, p. 309–323.

[McK67] H. P. McKean, Jr. – « Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. », Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967), Air Force Office Sci. Res., Arlington, Va., 1967, p. 41–57.

[Mél96] S. Méléard – « Asymptotic behaviour of some interacting particle systems; McKean-Vlasov and Boltzmann models », Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995), Springer, Berlin, 1996, p. 42–95.

[Mél00] ———, « A trajectorial proof for the vortex method for the two-dimensional Navier-Stokes equation », *Ann. Appl. Probab.* **10** (2000), no. 4, p. 1197–1211.

[Mic99a] L. Miclo – « An example of application of discrete Hardy's inequalities », *Markov Process. Related Fields* **5** (1999), p. 319–330.

[Mic99b] ———, « Relations entre isopérimetrie et trou spectral pour les chaînes de Markov finies », *Probability Theory and Related Fields* **114** (1999), p. 431–485.

[MP82] C. Marchioro & M. Pulvirenti – « Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory », *Comm. Math. Phys.* **84** (1982), no. 4, p. 483–503.

[MT01] F. Malrieu & D. Talay – « Concentration inequalities for Euler schemes », Prépublication, 2001.

[Muc72] B. Muckenhoupt – « Hardy's inequality with weights », *Studia Math.* **44** (1972), p. 31–38, collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, **I**.

[MY93] S. McNamara & W. R. Young – « Kinetics of a one-dimensional granular medium in the quasielastic limit », *Phys. Fluids A* **5** (1993), no. 1, p. 34–45.

[Nev76] J. Neveu – « Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien », *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)* **12** (1976), no. 2, p. 105–109.

[Ott01] F. Otto – « The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation », *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), no. 1-2, p. 101–174.

[OV00] F. Otto & C. Villani – « Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality », *J. Funct. Anal.* **173** (2000), no. 2, p. 361–400.

[Pin64] M. S. Pinsker – *Information and information stability of random variables and processes*, Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1964, Translated and edited by Amiel Feinstein.

[Rac91] S. T. Rachev – *Probability metrics and the stability of stochastic models*, Wiley, New York, 1991.

[Rot86] O. S. Rothaus – « Hypercontractivity and the Bakry-Emery criterion for compact Lie groups », *J. Funct. Anal.* **65** (1986), no. 3, p. 358–367.

[RR91] M. M. Rao & Z. D. Ren – *Theory of Orlicz spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[Saw84] E. Sawyer – « Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator », *Trans. Amer. Math. Soc.* **281** (1984), no. 1, p. 329–337.

[SZ92] D. W. Stroock & B. Zegarliński – « The logarithmic Sobolev inequality for discrete spin systems on a lattice », *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), no. 1, p. 175–193.

[Szn91] A.-S. Sznitman – « Topics in propagation of chaos », École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989. Lectures Notes in Math., vol 1464, Springer, Berlin, 1991, p. 165–251.

[Tal69] G. Talenti – « Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze », *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **39** (1969), p. 171–185.

[Tal96] D. Talay – « Probabilistic numerical methods for partial differential equations: elements of analysis », Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995), Springer, Berlin, 1996, p. 148–196.

[Tal99] ———, « Approximation of invariant measures of nonlinear hamiltonian and dissipative stochastic differential equations », Progress in Stochastic Structural Dynamics, vol. 152, L.M.A.-C.N.R.S., 1999, p. 139–169.

[Tom69] G. Tomaselli – « A class of inequalities », *Boll. Un. Mat. Ital.* **21** (1969), p. 622–631.

[TT90] D. Talay & L. Tubaro – « Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations », *Stochastic Anal. Appl.* **8** (1990), no. 4, p. 483–509 (1991).

[VP94] J. Vauthier & J.-J. Prat – *Cours d'analyse mathématique de l'agrégation*, 2ème ed., Masson, Paris, 1994.

[Zhe95] W. A. Zheng – « Conditional propagation of chaos and a class of quasilinear PDE's », *Ann. Probab.* **23** (1995), no. 3, p. 1389–1413.

[Zyg59] A. Zygmund – *Trigonometric series*, 2ème ed., vol. I & II, Cambridge University Press, New York, 1959.

Logarithmic SOBOLEV inequalities for some nonlinear evolution problems

Abstract

One of the most useful applications of the Markov processes theory is the probabilistic interpretation of the solution of partial differential equations. It provides an intuitive interpretation of the dynamic and a way to solve numerically the problem when the deterministic methods failed. In this work, we try to develop these two points for a class of partial differential equations of McKean-Vlasov type.

We deal with both the propagation of chaos theory initiated by Kac and McKean and the study of Markov processes *via* Poincaré or logarithmic Sobolev inequalities. The propagation of chaos provides a way to approximate the solution of some nonlinear PDEs by the empirical measure of an interacting particle system. Moreover, the logarithmic Sobolev inequalities imply explicit convergence to equilibrium as time grows and concentration properties for Markov semigroups.

The particle systems we associate to McKean-Vlasov type equations satisfy logarithmic Sobolev inequalities. Thanks to an additional result of propagation of chaos, we deduce the long time behavior of the nonlinear PDE from the one of the particle system. At last, we establish exact and Gaussian confidence intervals for the convergence of the Monte-Carlo method for the explicit and implicit Euler schemes associated to a diffusion process. These results provide an efficient way to control the error of the numerical simulation.

Keywords : Logarithmic Sobolev inequality - Particle system in mean field interaction - Propagation of chaos - Partial differential equations - Convergence to equilibrium - Euler scheme.

Auteur : Florent Malrieu
Titre : Inégalités de SOBOLEV logarithmiques pour des problèmes d'évolution non linéaires
Date et lieu de soutenance : Le 11 décembre 2001 à l'université Paul Sabatier (Toulouse III).

Résumé

L'interprétation de la solution d'équations aux dérivées partielles compte parmi les champs d'application les plus motivants de la théorie des probabilités. Elle apporte parfois une meilleure compréhension de la dynamique du système étudié et une façon très intuitive de résoudre numériquement des problèmes où les méthodes déterministes ne peuvent plus s'appliquer – principalement en grandes dimensions. Dans ce travail, nous avons développé ces deux aspects pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires qui s'apparentent aux équations de MCKEAN-VLASOV.

Il s'est avéré intéressant de mettre en relation d'une part les travaux initiés par MCKEAN sur la propagation du chaos et d'autre part l'étude fine des processus de MARKOV *via* des inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmiques. La propagation du chaos permet d'approcher la solution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires par la mesure empirique d'un processus de MARKOV en grande dimension. Les inégalités de POINCARÉ ou de SOBOLEV logarithmiques fournissent quant à elles des descriptions en temps long et des propriétés de concentration de la mesure pour des semi-groupes de MARKOV.

Nous étudions des équations aux dérivées partielles non linéaires du type MCKEAN-VLASOV. Nous leur associons des systèmes de particules en interaction de type champ moyen pour lesquels nous établissons des inégalités de Sobolev logarithmiques à temps fini. Grâce à un résultat supplémentaire de propagation du chaos, nous déduisons, dans certains cas, le comportement en temps long de l'équation non linéaire en fonction de celui du système de particules. Enfin, nous établissons des intervalles de confiance exacts pour la convergence de méthodes de MONTE-CARLO pour les schémas d'EULER explicites et implicites associés à des processus de diffusion. Ces résultats s'appliquent notamment pour les systèmes de particules cités plus haut.

Mots clés : Inégalité de SOBOLEV logarithmique - Inégalité de POINCARÉ - Systèmes de particules en interaction - Propagation du chaos - Équations aux dérivées partielles - Convergence à l'équilibre - Schémas d'EULER.
Discipline : Mathématiques, Probabilités.

Laboratoire de Statistique et Probabilités
UFR MIG - UMR CNRS 5883
Université Paul SABATIER, Toulouse III