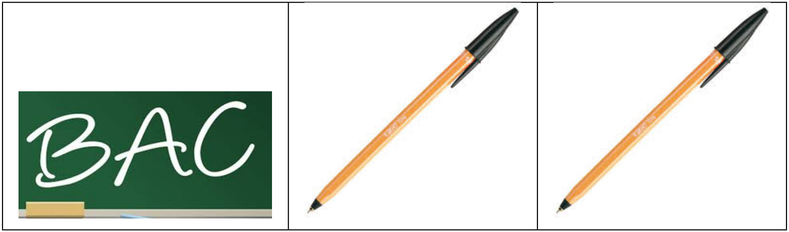
Probabilités, jeux et modélisation

Florent Malrieu

Université de Tours

B ?C ou le fameux problème de Monty Hall



B ?C ou le fameux problème de Monty Hall

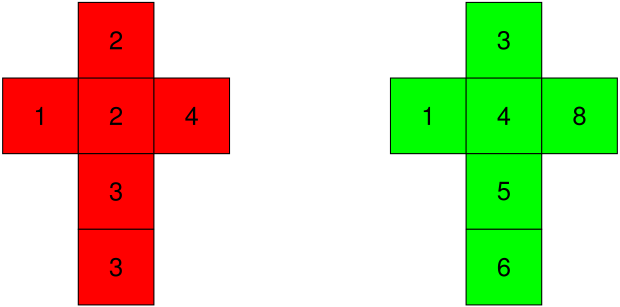
Vous êtes face à trois portes identiques...

Vous proposez la porte de gauche... Et le maître du jeu dévoile un bic...

B ?C ou le fameux problème de Monty Hall

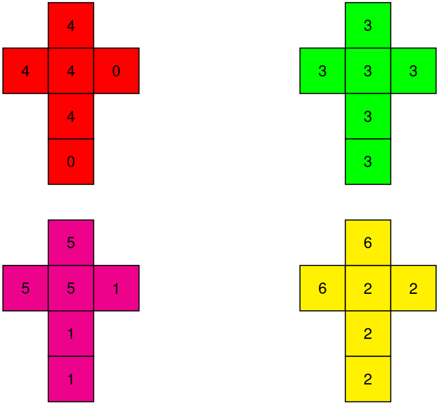
Question. Que faire ? Rester ? Changer ?

Dés de Sicherman



Jeu. Le joueur *A* lance les deux dés de Sicherman, le joueur *B* lance deux dés usuels et chacun retient la somme de ses deux résultats.
Question. Qui a l'avantage ?

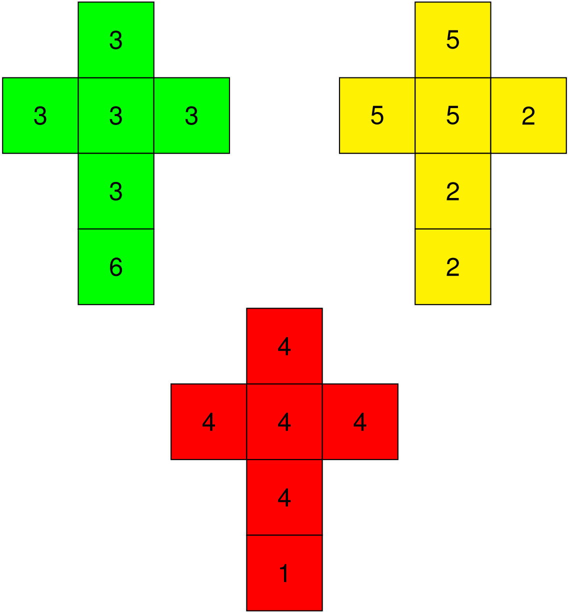
Les dés d’Efron



Jeu. Le premier joueur choisit un des quatre dés. Le second joueur choisit alors un autre dé. Chacun lance son dé et le gagnant est celui qui obtient le score le plus grand.

Question. Le jeu est-il équilibré entre les deux joueurs ?

Dés du diable



Temps de premier succès

On répète une même expérience aléatoire dont les seules issues sont un succès ou un échec :

- lancer d'une pièce pour faire "Face",

$$PPPPPPPPPPPPF$$

- lancer d'un dé à six faces pour obtenir 6,

$$352135233421115 46$$

- atteindre une cible au tir à l'arc...

de manière indépendante et l'on s'intéresse au temps de premier succès.

Modélisation du temps de premier succès

$(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p.$$

- La tentative i est un succès ssi $X_i = 1$
- Le réel p représente la probabilité de succès en une tentative.

Temps de premier succès T :

$$T = \inf\{n \geq 1 \ : \ X_n = 1\}.$$

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n) = p(1-p)^{n-1}$
et

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p}.$$

Première application : le dé à n faces

Peut-on fabriquer un nombre uniforme :

- sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec un dé à 6 faces ?
- sur $\{1, 2, ..., 30\}$ avec deux dés à 6 faces ?

Combien de lancers sont-ils nécessaires ?

Absence de mémoire

On dit que T v.a. sur $\mathbb{N}^*$ est sans mémoire si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T > n + m | T > m) = \mathbb{P}(T > n).$$

Théorème

*Une v.a. T sur $\mathbb{N}^*$ est sans mémoire **ssi** elle suit une loi géométrique.*

Collectionneur de vignettes

Le modèle bien connu...

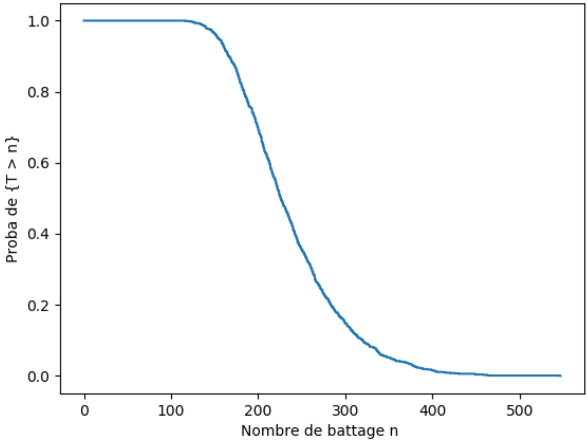
- Une collection de N images à terminer. . .
- Toutes les images ont la même probabilité d'apparition.

Combien doit-on acheter d'images pour finir la collection ?

Autre formulation : combien de fois faut-il lancer un dé pour voir toutes ses faces ?

Un peu de simulation avec 52 images

Temps moyen : 235.9782854362673



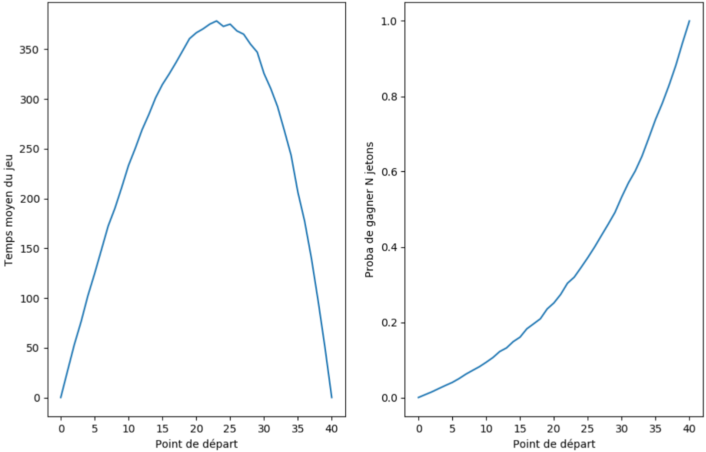
Ruine du joueur

Vous arrivez au casino avec x jetons pour jouer à la roulette au "pair" ou "impair" jusqu'à la ruine ou un gain de N jetons.
Probabilité de gagner à une partie : $p = \frac{18}{37} \sim 0.486$.

Questions. Quelle est la probabilité de sortir avec N jetons ?
Au bout de combien de temps ?

Ruine du joueur : un peu de simulation...

On arrive avec x jetons et on repart avec 0 ou 40.



Battage de cartes

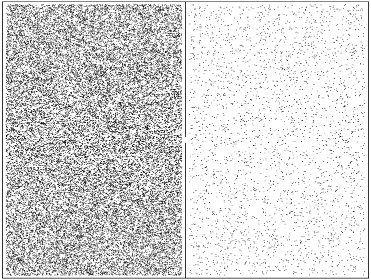
Question. Combien de fois doit-on battre un jeu de cartes pour qu'il soit mélangé ?

Un modèle de battage très simple : battage par insertion
La carte du dessus est disposée aléatoirement dans une des N positions.

La question vient de Persi Diaconis. Voir
`https://www.youtube.com/watch?v=AxJubaijQbI`

Urnes et particules

N paticules de gaz dans deux chambres reliées par un petit trou



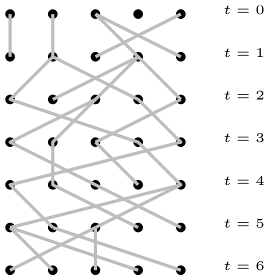
À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, une particule est choisie au hasard et changée d'urne.

Question. Que se passe-t-il en temps long ?

Modèle de Wright-Fisher

On modélise la transmission d'un allèle dans une population idéale :

- chaque individu a un unique exemplaire du gène ;
- la population est finie de taille constante égale à N ;
- le gène est présent sous la forme de deux allèles A et B ;
- chaque enfant choisi son parent uniformément parmi les individus de la génération précédente indépendamment des autres enfants ;
- il n'y a ni mutation, ni sélection.



À vous de jouer

Récapitulatif des thèmes

- jeu des trois portes
- jeux de dés non transitifs
- loi géométrique, dé à 5 faces
- collectionneur de vignettes
- ruine du joueur
- battage de cartes
- urne d'Ehrenfest
- modèle de Wright-Fisher

Pour chaque groupe, petit programme de travail !

- expliciter le modèle
- réfléchir aux maths en jeu
- écrire des algorithmes associés
- les écrire en Python ou Scratch