



# Aspect variationnel des surfaces minimales et conjecture de Willmore

- L. HAUSWIRTH
- L. MAZET

En 1965, Thomas Willmore énonce une question portant sur la géométrie des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . Cette question a été la source de très nombreux travaux portant aussi bien sur des aspects théoriques qu'appliqués. Un travail récent de Fernando Codà Marques et André Neves apporte la réponse et confirme l'intuition de Willmore. Nous souhaitons ici présenter les idées mises en jeu dans leur preuve : elle repose sur la théorie des surfaces minimales de la sphère unité de dimension 3. La question qui va nous guider est de savoir comment on peut construire des objets géométriques qui sont des points critiques de certaines fonctionnelles avec pour idée de mettre en place une approche de type lemme du col, appelée aussi min-max. Nous allons tout d'abord fixer quelques terminologies de la théorie des sous-variétés et expliquer en quoi consiste cette approche dans un cadre simple. Nous verrons ensuite comment George Birkhoff a mis en place cette idée pour construire des géodésiques sur les surfaces et ainsi résoudre une question de Henri Poincaré. Dans un second temps, nous présenterons la théorie de Frederick Almgren et Jon Pitts qui permet de construire des surfaces minimales par cette approche de min-max. Enfin, nous en viendrons à la conjecture de Willmore et au travail de Marques et Neves où la théorie de Almgren et Pitts est un outil central.

## 1. Préliminaires

### 1.1 – Sous-variétés de $\mathbb{R}^k$

Commençons par fixer quelques notations et terminologies de la théorie des sous-variétés de  $\mathbb{R}^k$ .

1. Une fonction de Morse est une fonction  $C^2$  dont tous les points critiques sont non dégénérés : la Hessienne au point critique a un noyau nul.

Nous allons considérer des sous-variétés  $M$  compactes sans bord de dimension  $m$  dans un certain  $\mathbb{R}^k$ .

Dans le cas  $k = m + 1$ , fixons  $p$  un point de  $M$ . En choisissant un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^{m+1}$  d'origine  $p$  et dont le dernier vecteur de base est le vecteur unitaire normal à  $M$  en  $p$ , on peut décrire localement  $M$  comme le graphe d'une fonction  $u$  avec  $u(p) = 0$  et de gradient nul en  $p$ ,  $\nabla u(p) = 0$ . La différentielle seconde ou Hessienne de cette fonction  $u$  est alors appelée seconde forme fondamentale de  $M$  en  $p$  : cette Hessienne décrit où se situe  $M$  par rapport à son espace tangent en  $p$ . La trace de cette Hessienne est appelée courbure moyenne de  $M$  en  $p$  et est notée  $H(p)$ . Elle décrit donc en moyenne où se situe  $M$  par rapport à son plan tangent en  $p$ . Ces notions de seconde forme fondamentale et de courbure moyenne se définissent aussi pour une sous-variété  $M$  de dimension  $m$  contenue dans une sous-variété  $N$  de dimension  $m + 1$ .

Enfin si  $\Sigma$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$ , le déterminant de la seconde forme fondamentale est appelé courbure de Gauss de  $\Sigma$  au point  $p$  et est noté  $K(p)$ .

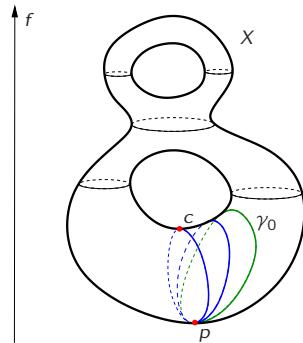
### 1.2 – L'approche de min-max

Pour expliquer l'approche de min-max ou lemme du col, nous allons nous placer dans un cas particulier. Considérons pour cela la surface  $X$  de la Figure 1 et  $f$  une fonction de Morse<sup>1</sup> définie sur  $X$ . Sur le dessin,  $f$  est représentée comme la coordonnée verticale. On suppose de plus que le minimum absolu de  $f$  sur  $X$  est 0 et est réalisé au point  $p$ .

Considérons alors  $\gamma_0$  le lacet vert qui est basé au point  $p$  (ses extrémités sont  $p$ ). Les lacets bleus

et  $\gamma_0$  ont la propriété que l'on peut déformer l'un en l'autre de façon continue (sans déplacer le point  $p$ ) mais que l'on ne peut pas les rétracter sur le point  $p$  (point que l'on paramètre par un lacet constant) : on dit que ces lacets sont homotopes<sup>2</sup> relativement à leurs extrémités mais non homotopiquement triviaux.

FIGURE 1 – Une fonction de Morse sur une surface.



On note  $[\gamma_0]$  l'ensemble des lacets homotopes à  $\gamma_0$  relativement aux extrémités (on dit aussi que  $[\gamma_0]$  est la classe d'homotopie de  $\gamma_0$ ) et on définit alors la quantité de min-max suivante

$$W = \inf_{\gamma \in [\gamma_0]} \sup_{t \in [0,1]} f(\gamma(t)).$$

On regarde donc la plus grande valeur de  $f$  le long d'un lacet homotope à  $\gamma_0$  et on minimise parmi ces lacets. Sur le dessin, les maxima le long des lacets bleus tendent à se rapprocher de cette valeur. On voit (et on peut démontrer) que  $W = f(c) > 0$  avec  $c$  un point critique de  $f$  (le point  $c$  est un col pour la fonction hauteur  $f$ ). Remarquons que si  $\gamma_0$  pouvait se rétracter sur  $p$ , la quantité  $W$  serait nulle.

On peut donc retenir que, si on a un lacet  $\gamma_0$  non homotopiquement trivial dans  $X$ , la quantité  $W$  est strictement positive et doit être une valeur critique non triviale (pas le minimum absolu) de  $f$ . On montre ainsi l'existence d'un point critique  $c$  non trivial de  $f$ .

Dans la suite, nous verrons des situations où cette idée peut être utilisée pour construire des objets géométriques.

2. Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  continues sont homotopes s'il existe  $g : [0,1] \times X \rightarrow Y$  continue avec  $f_i(\cdot) = g(i, \cdot)$  pour  $i = 0, 1$ . Si  $f_0$  et  $f_1$  coïncident sur une partie  $A$  de  $X$ , on peut demander que  $g(t, \cdot) = f_0(\cdot)$  sur  $A$ , on parle alors d'homotopie relative à  $A$ .

## 2. Géodésiques sur les surfaces

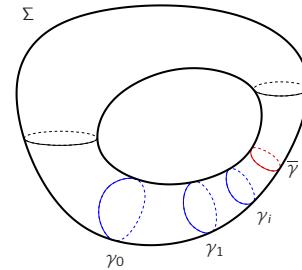
Si  $\gamma$  est une courbe sur une surface  $\Sigma$ , on note  $\ell(\gamma)$  sa longueur. La courbe  $\gamma$  est appelée géodésique si c'est un point critique de la fonctionnelle  $\ell$  ; autrement dit, si  $\{\gamma_t\}_{t \in [-\epsilon, \epsilon]}$  est une famille à un paramètre de courbes sur  $\Sigma$  ayant toutes les mêmes extrémités et avec  $\gamma = \gamma_0$ , on a

$$\frac{d}{dt} \ell(\gamma_t)|_{t=0} = 0.$$

Par ailleurs, une géodésique réalise localement le plus court chemin entre deux de ses points.

Dans un article de 1905, Poincaré [14] pose la question de l'existence d'une géodésique fermée (pouvant être paramétrée par le cercle) et simple (sans point double) sur toutes surfaces.

FIGURE 2 – Minimisation de la longueur d'un lacet.



Commençons par considérer le cas de la surface  $\Sigma$  de la Figure 2. Les lacets bleus sont homotopes mais non homotopiquement triviaux (on ne peut pas les déformer sur un lacet constant). Si  $\gamma_0$  est l'un de ces lacets, on peut alors considérer  $[\gamma_0]$ , l'ensemble des lacets de  $\Sigma$  qui lui sont homotopes. Comme aucun de ces lacets n'est homotope à un lacet constant, on a

$$\ell([\gamma_0]) := \inf_{\gamma \in [\gamma_0]} \ell(\gamma) > 0.$$

On peut alors considérer une suite  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dans  $[\gamma_0]$  telle que  $\ell(\gamma_i) \rightarrow \inf_{\gamma \in [\gamma_0]} \ell(\gamma)$  et en déduire un lacet  $\bar{\gamma} \in [\gamma_0]$  (en rouge) tel que  $\ell(\bar{\gamma}) = \inf_{\gamma \in [\gamma_0]} \ell(\gamma)$  : il s'agit nécessairement d'une géodésique fermée.

Cet argument utilise l'existence de lacets non homotopiquement triviaux. Ainsi si la surface  $\Sigma$  est homéomorphe à la sphère  $S^2$ , tout lacet  $\gamma_0$  se rétracte sur un point et  $\ell([\gamma_0]) = 0$  : l'argument précédent ne donne rien. Or c'est précisément le cas

que considère Poincaré puisqu'il s'intéresse aux surfaces à courbure de Gauss  $K$  positive qui sont nécessairement topologiquement des sphères. Poincaré propose alors la stratégie suivante. Une géodésique fermée simple (si elle existe) sépare la surface en deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  tels que

$$\int_{\Omega_i} K da = 2\pi \quad (1)$$

où  $da$  est la mesure d'aire sur la surface. Poincaré suggère donc de produire une géodésique fermée en minimisant la longueur  $\ell$  parmi les lacets  $\gamma$  séparant  $\Sigma$  en deux domaines  $\Omega_i$  vérifiant (1)<sup>3</sup>. Poincaré montre par des raisonnements de nature physique qu'une solution minimisante (si elle existe) sera une géodésique fermée simple. La justification complète de cette approche sera donnée par Melvyn S. Berger et Enrico Bombieri [2] puis Christopher B. Croke [4] au début des années 80 ; le point délicat est l'existence d'une minoration uniforme de la longueur des lacets considérés par Poincaré.

### L'approche de Birkhoff

En 1917, Birkhoff [3] propose une solution alternative pour la construction des géodésiques sur les surfaces  $\Sigma$  homéomorphes à  $\mathbb{S}^2$ , elle repose sur une approche de type min-max. Il introduit la notion de balayage de la surface  $\Sigma$ . Un balayage de  $\Sigma$  est une application continue

$$\varphi : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$$

avec  $\varphi(0, \cdot)$  et  $\varphi(1, \cdot)$  constants. Autrement dit un balayage est une famille continue de lacets partant d'un lacet constant et finissant en un lacet constant. Un exemple de balayage est donné dans la Figure 3.

Parmi les balayages de  $\mathbb{S}^2$ , on a le balayage standard défini par  $\bar{\varphi}(t, \theta) = (2\sqrt{t - t^2}(\cos \theta, \sin \theta), 2t - 1)$  et qui est donné par les parallèles de  $\mathbb{S}^2$ .

Pour comparer avec la partie 1.2,  $X$  serait ici l'espace des lacets sur la surface  $\Sigma$ , la fonction  $f$  serait  $\ell$  et un balayage correspond à un lacet dans  $X$ .

Comme  $\varphi(0, \cdot)$  et  $\varphi(1, \cdot)$  sont constants, on peut aussi voir un balayage  $\varphi$  comme une application continue  $\Phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$  et définir ainsi la classe d'homotopie  $[\Phi_0]$  d'un balayage  $\Phi_0$ .

3. Sur une surface homéomorphe à une sphère, on a toujours  $\int_{\Sigma} K da = 4\pi$ .

Birkhoff s'intéresse alors à la réalisation de la valeur de min-max suivante :

$$L([\Phi_0]) = \inf_{\varphi \in [\Phi_0]} \left( \sup_{t \in [0, 1]} \ell(\varphi(t, \cdot)) \right)$$

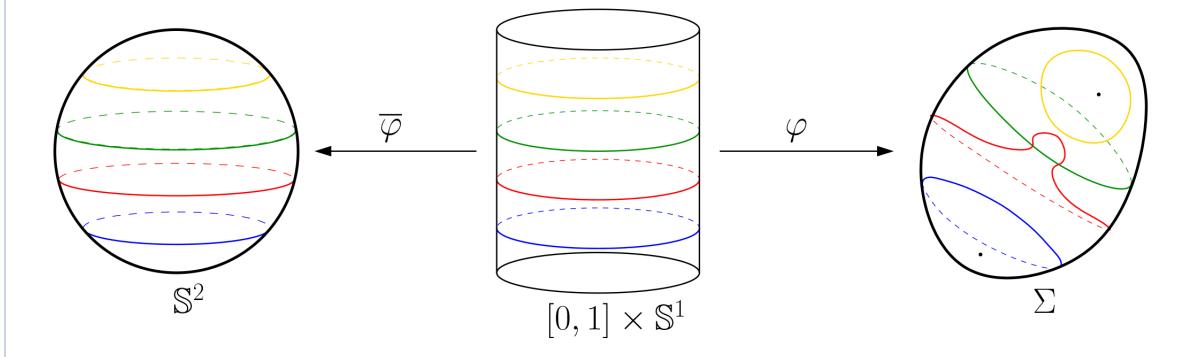
pour un certain balayage  $\varphi_0$ . Autrement dit, parmi tous les balayages que l'on peut déduire par déformations continues de  $\varphi_0$ , quel est celui qui possède le plus court lacet de longueur maximale ? Dans l'esprit de la partie 1.2, Birkhoff montre que, si  $L([\Phi_0]) > 0$ , il existe un lacet de longueur  $L([\Phi_0])$  qui est un point critique de la fonctionnelle  $\ell$  donc un lacet géodésique sur  $\Sigma$ .

Reste donc à savoir si on peut assurer  $L([\Phi_0]) > 0$ . Remarquons que si  $\varphi_0$  est un balayage constant, tous les lacets sont constants donc de longueur nulle ; ainsi  $0 = \sup_{t \in [0, 1]} \ell(\varphi_0(t, \cdot)) = L([\Phi_0])$  dans ce cas. On a vu que tout balayage  $\varphi$  a une application associée  $\Phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$ . À une telle application continue, on peut associer un nombre  $\deg(\Phi) \in \mathbb{Z}$  appelé degré qui compte le nombre d'antécédents d'un point générique  $p \in \Sigma$  par  $\Phi$  avec un signe dépendant de savoir si  $\Phi$  préserve ou renverse l'orientation au voisinage de chaque antécédent. Ce degré a la propriété importante d'être invariant par homotopie.

Maintenant, si  $\sup_{t \in [0, 1]} \ell(\varphi(t, \cdot))$  est très petit, chaque lacet  $\varphi(t, \cdot)$  reste dans un voisinage de  $\varphi(t, 0)$ , on peut alors déformer globalement  $\varphi$  vers le balayage  $\bar{\varphi}$  défini par  $\bar{\varphi}(t, \theta) = \varphi(t, 0)$  qui est lui-même homotope au balayage constant. Ainsi si  $\sup_{t \in [0, 1]} \ell(\varphi(t, \cdot))$  est très petit, le degré de l'application  $\Phi$  associée est nul. Ceci montre que si  $\deg(\Phi_0) \neq 0$ ,  $L([\Phi_0]) > 0$  et on a un lacet géodésique associé. Le balayage standard  $\bar{\varphi}$  est de degré 1 car tout point (hormis les deux pôles) sur  $\mathbb{S}^2$  possède exactement un antécédent. Donc si  $H : \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$  est un homéomorphisme,  $H \circ \bar{\varphi}$  est un balayage de  $\Sigma$  de degré 1 et  $L([H \circ \bar{\varphi}]) > 0$ . Birkhoff montre ainsi que toute surface homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$  possède un lacet géodésique.

## 3. Les surfaces minimales

Les surfaces minimales sont des généralisations des géodésiques en dimension supérieure. Nous

FIGURE 3 – Le balayage standard de  $\mathbb{S}^2$  et un balayage général de  $\Sigma$ .


présentons la théorie en dimension 3 tout en sachant qu'une grande partie de ce que nous allons décrire se généralise en dimension supérieure.

Fixons donc une sous-variété  $M$  de dimension 3 de  $\mathbb{R}^k$  et considérons  $\Sigma$  une surface contenue dans  $M$ . Nous pouvons calculer son aire  $\mathcal{A}(\Sigma)$ . Nous dirons que  $\Sigma$  est une surface minimale de  $M$  si  $\Sigma$  est un point critique de cette fonctionnelle d'aire. Décrivons un peu mieux ce que cela signifie. Considérons pour cela  $N(p)$  le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$  en  $p$  tangent à  $M$  et  $u$  une fonction définie sur  $\Sigma$ . On définit alors  $\Sigma_u$  la surface de  $M$  qui est construite en « poussant » la surface  $\Sigma$  dans la direction  $N(p)$  à distance  $u(p)$  pour chaque point  $p$  de  $\Sigma$  (si  $u(p) < 0$  on pousse dans la direction de  $-N(p)$ ). Si  $u$  est petit,  $\Sigma_u$  est une déformation de  $\Sigma$ . Dire que  $\Sigma$  est minimale revient donc à écrire

$$0 = \frac{d}{dt} \mathcal{A}(\Sigma_{tu})|_{t=0}$$

pour toute fonction  $u$ . Or un calcul donne

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(\Sigma_{tu})|_{t=0} = - \int_{\Sigma} H u \, da \quad (2)$$

où  $H$  est la courbure moyenne de  $\Sigma$  dans  $M$ . Ainsi une surface minimale est précisément une surface dont la courbure moyenne est nulle en tout point.

Comme pour les géodésiques, on peut alors poser la question de l'existence d'une surface minimale dans  $M$ . À nouveau, on peut chercher à la construire par un procédé de minimisation direct mais comme pour les géodésiques cela ne répond pas au problème pour toutes les sous-variétés  $M$  :

par exemple, si  $M$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^3$ . Almgren et Pitts vont résoudre cette difficulté en construisant une théorie de min-max pour les surfaces minimales.

### 3.1 – Les surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$

Avant de présenter la théorie de Almgren et Pitts, nous allons d'abord exposer certains aspects de la théorie des surfaces minimales dans  $\mathbb{S}^3 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ .

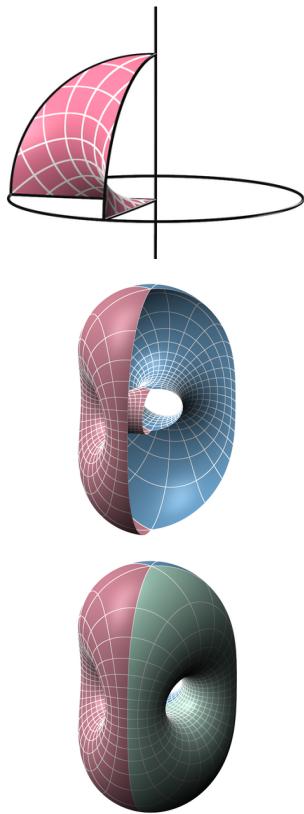
Tout d'abord, on connaît des exemples explicites de surfaces minimales. Les équateurs, par exemple  $\{x_4 = 0\}$ , sont des sphères minimales d'aire  $4\pi$ . On peut montrer que ce sont les seules surfaces minimales de  $\mathbb{S}^3$  à être topologiquement des sphères et que toute autre surface minimale a une aire strictement supérieure à  $4\pi$ . Le tore de Clifford

$$\mathbb{T} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1/2\}$$

est aussi minimal, de genre<sup>4</sup> 1 et d'aire  $2\pi^2$ . H. Blaine Lawson [10] a construit de nombreux autres exemples de surfaces minimales de genre supérieur dans  $\mathbb{S}^3$ . Pour cela, il considère un contour fait de segments géodésiques dans  $\mathbb{S}^3$  et construit, par minimisation de l'aire, un disque minimal bordé par ce contour (voir Figure 4). On dit qu'il résout un problème de Plateau. En complétant par réflexions autour des arcs géodésiques du contour, il obtient des exemples sans bord qui possèdent des symétries.

4. Le genre d'une surface compte le nombre de « trous » d'une surface : une sphère est de genre 0, un tore de genre 1 et la surface de la Figure 1 de genre 2.

FIGURE 4 – Problème de Plateau et surface de Lawson de genre 2 d'après Lynn Heller, Sebastian Heller et Nick Schmitt [8].



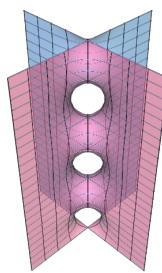
© L. Heller, S. Heller et N. Schmitt

Une autre approche pour construire des surfaces minimales dans  $\mathbb{S}^3$  est la technique dite de désingularisation. Si on regarde deux équateurs  $\{x_3 = 0\}$  et  $\{x_4 = 0\}$ , leur union peut être comprise comme une surface minimale qui serait singulière le long du cercle d'intersection de ces deux sphères. La désingularisation consiste à montrer qu'il existe une surface minimale proche de l'union de ces deux sphères mais sans lieu singulier. L'outil fondamental d'une telle construction est la surface minimale de Scherk (voir Figure 5) qui désingularise dans  $\mathbb{R}^3$  l'union de deux plans orthogonaux.

Nikolaos Kapouleas [9] a décrit quand et comment une telle désingularisation pouvait être réalisée (Figure 6).

Les surfaces minimales sont des points critiques de la fonctionnelle  $\mathcal{A}$ , ce sont donc des points où la différentielle de  $\mathcal{A}$  s'annule.

FIGURE 5 – La surface de Scherk.



© Matthias Webber

En un tel point, on peut s'intéresser à la différentielle seconde de  $\mathcal{A}$ . En reprenant, les notations introduites plus haut, si  $\Sigma$  est minimale dans  $\mathbb{S}^3$ , on montre :

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}(\Sigma_{tu})|_{t=0} = \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 - (2 + \|A\|^2) u^2 da =: Q(u)$$

où  $\nabla u$  est le gradient de  $u$  le long de  $\Sigma$  et  $\|A\|$  désigne la norme de la seconde forme fondamentale de  $\Sigma$ .  $Q$  est une forme quadratique en  $u$  d'indice fini. Cet indice qui est la dimension de l'espace des directions négatives de  $Q$  compte donc le nombre de déformations indépendantes de  $\Sigma$  qui font décroître l'aire de  $\Sigma$  (au moins à l'ordre deux). L'équateur a pour indice 1 et le tore de Clifford a pour indice 5. Francisco Urbano [17] a montré que ce sont les seules surfaces minimales de  $\mathbb{S}^3$  d'indice au plus 5. Nous y reviendrons dans la suite.

FIGURE 6 – Désingularisation d'un caténoïde et d'un plan.



© Matthias Webber

On pourra consulter le site de Nick Schmitt [16] pour une documentation en image sur les surfaces minimales de  $\mathbb{S}^3$ .

### 3.2 – La théorie de Almgren et Pitts

Nous allons maintenant décrire la théorie de Almgren et Pitts pour une sous-variété  $M$  de dimension 3. Celle-ci s'appuie sur la théorie de la mesure géométrique et nous allons en simplifier certains aspects afin d'en faciliter l'accès.

Tout d'abord, nous introduisons  $\mathcal{Z}_2(M)$  l'espace des « surfaces » de  $M$  (l'indice 2 fait référence à la dimension 2 des surfaces). Cet espace est muni d'une topologie que nous décrirons en disant juste que deux surfaces sont proches si la partie de  $M$  contenue entre ces deux surfaces a un petit volume. Par exemple, dans  $\mathbb{S}^3$ , le parallèle  $\{x_4 = t\}$  converge vers l'équateur  $\{x_4 = 0\}$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Mais que dire de la limite de l'union  $\{x_4 = t\} \cup \{x_4 = -t\}$ ? La topologie nous dit qu'elle converge vers  $\{x_4 = 0\}$  compté deux fois. En fait, un élément  $T$  de  $\mathcal{Z}_2(M)$  peut être décrit comme une somme formelle  $T = \sum_{i=1}^k n_i S_i$  où  $n_i \in \mathbb{Z}$  et  $S_i$  est une surface de  $M$  dont la régularité est *a priori* seulement Lipschitz. Les nombres  $n_i$  sont des multiplicités que l'on affecte à chacune des surfaces  $S_i$ . Ainsi on peut écrire

$$\{x_4 = t\} + \{x_4 = -t\} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 2\{x_4 = 0\}.$$

On peut alors étendre la définition de l'aire par  $\mathcal{A}(T) = \sum_{i=1}^k |n_i| \mathcal{A}(S_i)$ . Notons aussi que  $\mathcal{Z}_2(M)$  contient un élément nul ( $n_i = 0$  pour tout  $i$ ) dont l'aire est 0.

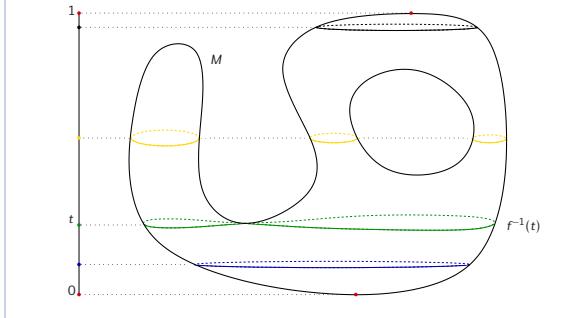
Comme à la Partie 1.2, on souhaite développer une approche de min-max avec  $X = \mathcal{Z}_2(M)$  et  $f = \mathcal{A}$ . Dans un premier temps, Almgren [1] étudie la topologie de  $\mathcal{Z}_2(M)$  et montre qu'il existe des lacets basés en 0 qui ne sont pas homotopiquement triviaux<sup>5</sup>. Voici comment décrire un tel lacet non homotopiquement trivial. Soit  $f : M \rightarrow [0, 1]$  une fonction de Morse (il en existe toujours), on pose alors  $\gamma_0(t) = f^{-1}(t) \in \mathcal{Z}_2(M)$  (Figure 7). Notons que  $\gamma_0(0)$  et  $\gamma_0(1)$  sont chacun un point ce qui correspond à l'élément 0 de  $\mathcal{Z}_2(M)$ :  $\gamma_0$  est bien un lacet. De plus,  $\text{Vol}(f^{-1}([t, s]))$  tend vers 0 lorsque  $s \rightarrow t$ :  $\gamma_0$  est bien continu.

5. En fait, Almgren montre, entre autre, que le premier groupe d'homotopie de  $\mathcal{Z}_2(M)$  est isomorphe au groupe d'homologie  $H_3(M)$ .

6. On utilise ici le mot largeur pour traduire le terme width utilisé par Almgren et Pitts même s'il ne rend pas bien compte de sa nature géométrique.

7. Ce théorème est valable en toute dimension, toutefois, dans  $M^{m+1}$  avec  $m \geq 7$ , les hypersurfaces  $\Sigma_i$  peuvent présenter un lieu singulier de codimension 7.

FIGURE 7 – Le balayage standard de  $M$ .



On pourrait alors directement construire une approche de min-max à partir de  $\gamma_0$ . La théorie est un peu plus générale et nous en aurons besoin dans la suite. On introduit la notion de balayage à  $k$  paramètres : ce sont les applications continues

$$\varphi : I^k \longrightarrow \mathcal{Z}_2(M)$$

où  $I = [0, 1]$ . Tout d'abord, le lacet  $\gamma_0$  que nous avons défini au paragraphe précédent est un balayage à un paramètre. Dans la partie précédente, les balayages que Birkhoff considérait étaient des familles à un paramètre de lacets paramétrés, ici on ne tient plus compte d'une éventuelle paramétrisation des surfaces.

On définit la largeur<sup>6</sup> d'un balayage par  $L(\varphi) := \sup\{\mathcal{A}(\varphi(x)) ; x \in I^k\}$ . Si  $\varphi_0$  est un balayage, on note  $[\varphi_0]$  l'ensemble des balayages  $\varphi$  homotopes à  $\varphi_0$  relativement à  $\partial I^k$  (on ne déforme pas  $\varphi_0$  le long du bord de l'hypercube  $I^k$ ). On définit enfin une valeur de min-max appelée largeur de  $[\varphi_0]$  par

$$L([\varphi_0]) = \inf\{L(\varphi) ; \varphi \in [\varphi_0]\}.$$

Pitts [13], un étudiant d'Almgren, montre alors :

**Théorème du min-max.** Si  $L([\varphi_0]) > \sup\{\mathcal{A}(\varphi_0(x)) ; x \in \partial I^k\}$ , il existe des surfaces minimales  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$  dans  $M$  disjointes telles que

$$L([\varphi_0]) = \sum_{i=1}^p n_i \mathcal{A}(\Sigma_i), \quad n_i \in \mathbb{N}.$$

Ainsi ce théorème affirme que la valeur de min-max  $L([\varphi_0])$  est l'aire d'un certain point critique de  $\mathcal{A}$ . La condition  $L([\varphi_0]) > \sup\{\mathcal{A}(\varphi_0(x)) ; x \in \partial I^k\}$

affirme essentiellement que l'information topologique contenue dans  $\varphi_0$  ne se lit pas sur  $\partial I^k$ . Par ailleurs, ce résultat ne donne pas d'informations sur les  $\Sigma_i$  : quelle est leur topologie par exemple ?

Si on considère le lacet  $\gamma_0$  construit par Almgren, on a  $\sup\{\mathcal{A}(\gamma_0(x)), x \in \partial I\} = 0$  puisque  $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = 0$ . Le lacet  $\gamma_0$  étant non homotopiquement trivial, Almgren montre que  $L([\gamma_0]) > 0$ . Le théorème de min-max affirme alors qu'il existe une surface minimale dans  $M$ , ce qui était la question initialement posée.

Que dit cette approche pour  $\mathbb{S}^3$ ? La fonction coordonnée  $x_4$  est une fonction de Morse sur  $\mathbb{S}^3$ , on a donc un balayage standard  $\bar{\gamma} : t \mapsto x_4^{-1}(2t - 1)$  donné par les parallèles de  $\mathbb{S}^3$ . On a  $L(\bar{\gamma}) = 4\pi$ , en fait on peut montrer que  $\bar{\gamma}$  est optimal pour le problème de min-max,  $L([\bar{\gamma}]) = 4\pi$  et que les équateurs sont précisément les surfaces minimales produites par cette approche. De plus, ceci nous dit que, si  $\gamma$  est un balayage homotope à  $\bar{\gamma}$  et  $L(\gamma) = 4\pi$ , il existe  $t \in I$  tel que  $\gamma(t)$  est un équateur de  $\mathbb{S}^3$ . Cependant, cette approche ne nous dit pas comment construire d'autres surfaces minimales de  $\mathbb{S}^3$ .

## 4. La conjecture de Willmore

Dans un article de 1965, Willmore [18] s'intéresse à la fonctionnelle qui est définie sur les surfaces  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 da$$

où  $H$  est la courbure moyenne de  $\Sigma$ . Cette quantité est maintenant appelée énergie de Willmore.

Willmore montre que pour toute surface  $\mathcal{V}(\Sigma) \geq 4\pi$  avec égalité uniquement pour les sphères euclidiennes. Willmore s'intéresse au lien entre la topologie de  $\Sigma$  et cette énergie. Il constate que, pour une certaine classe de tores  $T$ ,  $\mathcal{V}(T) \geq 2\pi^2$  avec égalité pour des tores particuliers appelés cyclides de Dupin. Il formule alors la conjecture.

**Conjecture de Willmore.** Pour toute surface  $\Sigma$  de genre 1 (un tore), on a  $\mathcal{V}(\Sigma) \geq 2\pi^2$  avec égalité uniquement pour les cyclides de Dupin.

Une propriété importante de l'énergie de Willmore est son invariance conforme : ceci signifie que si  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est conforme<sup>8</sup>, alors  $\mathcal{V}(F(\Sigma)) = \mathcal{V}(\Sigma)$ . Cette propriété est à l'origine de l'intérêt qui a été porté à l'énergie de Willmore et à la conjecture.

8.  $F$  est conforme si sa différentielle  $dF_p$  est une similitude pour tout  $p$ .

Cette propriété permet aussi de reformuler la conjecture sous la forme qui sera étudiée par Marques et Neves. Une projection stéréographique  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une application conforme. Ainsi si  $\Sigma$  est une surface de  $\mathbb{S}^3$  on peut définir son énergie de Willmore par  $\mathcal{W}(\Sigma) = \mathcal{V}(\pi(\Sigma))$ . Un calcul montre que

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left(1 + \frac{\bar{H}^2}{4}\right) da = \mathcal{A}(\Sigma) + \frac{1}{4} \int_{\Sigma} \bar{H}^2 da$$

où  $\bar{H}$  est la courbure moyenne de  $\Sigma$  calculée dans  $\mathbb{S}^3$ . Notons que  $\mathcal{W}$  est aussi invariante conforme. Sur l'écriture ci-dessus, on voit que, pour les surfaces minimales de  $\mathbb{S}^3$ , l'énergie de Willmore se résume à leur aire et qu'elles sont donc nécessairement des points critiques de  $\mathcal{W}$ . De plus, pour  $\mathbb{T}$ , le tore de Clifford, on a  $\mathcal{W}(\mathbb{T}) = 2\pi^2$  et les cyclides de Dupin sont précisément les surfaces de la forme  $\pi(\mathbb{T})$ .

Ainsi la question initiale de Willmore de comprendre le lien entre topologie des surfaces et  $\mathcal{V}$ , est liée à la compréhension du lien entre la topologie d'une surface minimale de  $\mathbb{S}^3$  et son aire. Par exemple les surfaces minimales construites par Lawson ont leur aire comprise entre  $4\pi$  et  $8\pi$  et réalisent toutes les topologies possibles ; lorsque le genre tend vers l'infini, l'aire tend  $8\pi$ . Lawson a-t-il construit toutes les surfaces minimales de  $\mathbb{S}^3$  d'aire inférieure à  $8\pi$ ? Existe-t-il une surface minimale d'aire exactement  $8\pi$ ? Voici des questions naturelles et toujours ouvertes en lien avec le problème initial de Willmore.

Dans leur article [12], Marques et Neves montrent

**Théorème A.** Soit  $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$  une surface minimale de genre  $g \geq 1$ . Alors

$$\mathcal{A}(\Sigma) \geq 2\pi^2$$

et il y a égalité si et seulement si  $\Sigma$  est isométrique dans  $\mathbb{S}^3$  au tore de Clifford  $\mathbb{T}$ .

Ce théorème répond alors positivement à la conjecture de Willmore :

**Théorème B.** Soit  $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$  une surface de genre  $g \geq 1$ . Alors

$$\mathcal{W}(\Sigma) \geq 2\pi^2$$

et il y a égalité si et seulement si  $\Sigma$  est l'image conforme du tore de Clifford  $\mathbb{T}$ .

## Applications des surfaces de Willmore

L'énergie étudiée par Willmore apparaît en fait dans des travaux antérieurs et dans d'autres contextes. Elle apparaît par exemple comme énergie de flexion dans l'étude des plaques minces menée par Sophie Germain. Il s'agit aussi du terme principal de l'énergie de Helfrich associée à l'élasticité des membranes cellulaires. C'est aussi un des termes de la masse de Hawking d'une surface en relativité générale.

Ainsi les surfaces de Willmore qui sont les points critiques de cette énergie sont des objets qui apparaissent naturellement dans certains problèmes physiques ou biologiques. En architecture, on peut aussi citer l'apparition de  $\mathcal{V}$  dans l'énergie de flexion lors de la mise sous tension de réseaux de Chebycheff appelés « Gridshell » (voir Figure 8).

**FIGURE 8 – Cathédrale éphémère à Créteil en Gridshell (réalisation : T/E/S/S Atelier d'ingénierie et Laboratoire Navier).**



## 5. La preuve de Marques et Neves

Nous allons maintenant présenter la preuve des théorèmes A et B par Marques et Neves. La question qui les guide est de savoir s'il est possible de construire le tore de Clifford comme solution d'un

certain problème de min-max avec la théorie de Almgren et Pitts. Le tore de Clifford est d'indice 5, ceci suggère qu'il faut considérer des balayages à cinq paramètres.

### La famille canonique

La première partie du travail consiste à associer un balayage à cinq paramètres à toute surface  $\Sigma$  de  $\mathbb{S}^3$ .

Une surface  $\Sigma$  sépare  $\mathbb{S}^3$  en deux domaines  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$ . Si  $t \in [-\pi, \pi]$  on peut considérer l'ensemble des points de  $\mathbb{S}^3$  à distance  $|t|$  de  $\Sigma$ . Plus précisément, on définit

$$\Sigma_t = \begin{cases} \Sigma & \text{si } t = 0 \\ \{x \in \mathbb{S}^3 \mid d_{\mathbb{S}^3}(x, \Sigma) = -t\} \cap \Omega_- & \text{si } t < 0 \\ \{x \in \mathbb{S}^3 \mid d_{\mathbb{S}^3}(x, \Sigma) = t\} \cap \Omega_+ & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

En tant qu'élément de  $\mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^3)$ ,  $\Sigma_t$  dépend continûment de  $t$ . De plus, comme le diamètre de  $\mathbb{S}^3$  est  $\pi$ , on a  $\Sigma_{\pm\pi} = \emptyset$ . Le réel  $t$  sera un paramètre de notre balayage. Par ailleurs, un résultat dû à Antonio Ros [15] affirme que

$$\mathcal{A}(\Sigma_t) \leq \mathcal{W}(\Sigma), \quad (3)$$

faisant ainsi un lien entre aire et énergie de Willmore. De plus, si  $\Sigma$  n'est pas une sphère, on a égalité dans (3) uniquement si  $t = 0$  et  $\Sigma$  est minimale.

Les autres paramètres du balayage vont exploiter l'invariance conforme de  $\mathcal{W}$ . Si  $p$  est dans la boule unité ouverte  $B$  de  $\mathbb{R}^4$ , on définit la transformation  $F_p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  par

$$F_p(x) = \frac{(1 - |p|^2)}{|x - p|^2} (x - p) - p.$$

La transformation  $F_p$  est conforme et, modulo les isométries,  $\{F_p\}_{p \in B}$  décrit toutes les transformations conformes de  $\mathbb{S}^3$ . On peut alors définir pour  $(p, t) \in B \times [-\pi, \pi]$ ,  $\Sigma_{p,t} = (F_p(\Sigma))_t \in \mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^3)$ . L'application  $(p, t) \mapsto \Sigma_{p,t}$  est continue et

$$\mathcal{A}(\Sigma_{p,t}) \leq \mathcal{W}(F_p(\Sigma)) = \mathcal{W}(\Sigma).$$

Lorsque  $(p, t)$  tend vers un point de  $\partial B \times [-\pi, \pi]$ , Marques et Neves montrent que  $\Sigma_{p,t}$  tend nécessairement vers un parallèle de  $\mathbb{S}^3$ . Ainsi, après un repartage de la famille près du bord de  $B \times [-\pi, \pi]$ , ils arrivent à étendre la famille à  $\overline{B} \times [-\pi, \pi]$  et définissent deux applications continues

$$\varphi_0 : \overline{B} \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^3)$$

et  $Q : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  qui satisfont aux propriétés suivantes :

1.  $\varphi_0(p, -\pi)$  et  $\varphi_0(p, \pi)$  sont l'élément 0 de  $\mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^3)$  pour  $p \in \overline{B}$ ;
2. si  $p \in \mathbb{S}^3 = \partial \overline{B}$ , alors  $\varphi_0(p, \cdot)$  est un balayage standard de  $\mathbb{S}^3$  par des parallèles de  $\mathbb{S}^3$  centrés en  $Q(p)$ ; plus précisément  $\varphi_0(p, t) = \{x \in \mathbb{S}^3 \mid \langle x, Q(p) \rangle = \sin(t/2)\}$ ;
3.  $\mathcal{A}(\varphi(p, t)) \leq W(\Sigma)$ .

Notons que  $\overline{B} \times [-\pi, \pi]$  est homéomorphe à  $I^5$ ,  $\varphi_0$  est donc un balayage à cinq paramètres au sens de Almgren et Pitts. Ce balayage est appelé famille canonique associée à  $\Sigma$ .

Marques et Neves montrent de plus une propriété remarquable de l'application  $Q$ . Son degré est relié à la topologie de  $\Sigma$  :

$$\deg(Q) = \text{genre}(\Sigma). \quad (4)$$

### Une estimée de la largeur

Pour appliquer le théorème de min-max de Pitts au balayage  $\varphi_0$ , on souhaite vérifier l'hypothèse du théorème

$$L([\varphi_0]) > \sup\{\mathcal{A}(\varphi_0(p, t)); (p, t) \in \partial(\overline{B} \times [-\pi, \pi])\} = 4\pi.$$

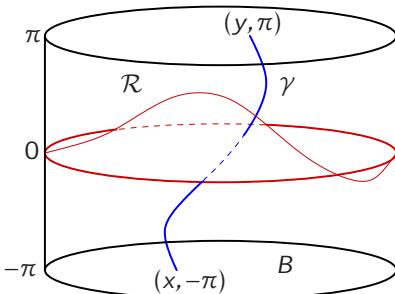
La valeur  $4\pi$  vient des propriétés 1. et 2. ci-dessus. On va expliquer pourquoi  $\text{genre}(\Sigma) \geq 1$  implique  $L([\varphi_0]) > 4\pi$ .

La démonstration est par contradiction. On considère un balayage  $\varphi \in [\varphi_0]$  tel que  $L(\varphi) = 4\pi$ . On choisit  $\gamma$  un chemin dans  $\overline{B} \times [-\pi, \pi]$  allant de  $(x, -\pi)$  à  $(y, \pi)$  ( $x, y \in \overline{B}$ ) (Figure 9). Alors  $\varphi \circ \gamma$  est un balayage de  $\mathbb{S}^3$  à un paramètre avec  $L(\varphi \circ \gamma) \leq 4\pi$ . D'après les propriétés 1. et 2.,  $\varphi \circ \gamma$  est homotope à un balayage standard de  $\mathbb{S}^3$ . Ainsi d'après la discussion de la fin de la Partie 3.2,  $L(\varphi \circ \gamma) \geq 4\pi$ ; donc  $L(\varphi \circ \gamma) = 4\pi$  et il existe  $t$  tel que  $\varphi \circ \gamma(t)$  est un équateur de  $\mathbb{S}^3$ . Autrement dit, on ne peut pas aller de la face du bas de  $\overline{B} \times [-\pi, \pi]$  à la face du haut sans passer par un point  $(p, t)$  où  $\varphi(p, t)$  est un équateur.

Ceci dit qu'il existe une sous-variété  $\mathcal{R}$  de dimension 4 qui sépare ces deux faces avec

1.  $\varphi(p, t)$  est un équateur pour  $(p, t) \in \mathcal{R}$ ,
2.  $\partial \mathcal{R} = \partial B \times \{0\}$ .

FIGURE 9 – L'hypersurface  $\mathcal{R}$ .



En fait, on peut même définir  $\tilde{Q} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$  de sorte que  $\varphi((p, t)) = \{x \in \mathbb{S}^3 \mid \langle x, \tilde{Q}((p, t)) \rangle = 0\}$  et  $\tilde{Q}((p, 0)) = Q(p)$ . Autrement dit, on a réussi à étendre  $Q$  à une sous-variété bordée par  $\mathbb{S}^3$ . Ceci est impossible si  $\deg(Q) \neq 0$ ; or, d'après (4),  $\deg(Q) = \text{genre}(\Sigma) \geq 1$ . On a donc l'estimée recherchée sur la largeur  $L([\varphi_0])$ .

### La preuve du Théorème A

On considère une surface minimale de  $\mathbb{S}^3$  dont l'aire est la plus petite parmi toutes les surfaces minimales de genre supérieure à 1 (une telle surface minimale existe), nous allons voir que cette surface a un indice inférieur à 5. Son aire est nécessairement inférieure à  $2\pi^2$ , l'aire du tore de Clifford. On considère  $\varphi_0$  la famille canonique associée à  $\Sigma$ .

D'après la partie précédente,  $L([\varphi_0]) > 4\pi$  et le théorème de min-max s'applique. On a donc des surfaces minimales  $\Sigma_i$  et des multiplicités  $n_i$  telles que

$$\sum_{i=1}^p n_i \mathcal{A}(\Sigma_i) = L([\varphi_0]) \leq L(\varphi_0) \leq W(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma) \leq 2\pi^2. \quad (5)$$

Toute surface minimale de  $\mathbb{S}^3$  a une aire supérieure à  $4\pi$ , ceci implique que  $p = 1$  et  $n_1 = 1$  (en effet,  $2\pi^2 < 2 \times 4\pi$ ). De plus  $\Sigma_1$  ne peut pas être un équateur sinon  $L([\varphi_0]) = 4\pi$ . Ainsi  $\Sigma_1$  est de genre non nul et  $\mathcal{A}(\Sigma_1) \geq \mathcal{A}(\Sigma)$  par définition de  $\Sigma$ . Ainsi on a des égalités dans la chaîne d'inégalités (5). Ceci nous dit que  $\varphi_0$  est optimale pour le problème de min-max et  $\mathcal{A}(\Sigma_1) = \mathcal{A}(\Sigma)$ .

Les cinq paramètres de  $\varphi_0$  donnent cinq déformations qui réduisent l'aire de  $\Sigma$ . Si l'indice de  $\Sigma$  était au moins 6, on pourrait alors utiliser cette sixième direction pour déformer  $\varphi_0$  en un balayage  $\varphi$  tel que  $L(\varphi) < \mathcal{A}(\Sigma)$ . Ceci est impossible car  $L([\varphi_0]) = \mathcal{A}(\Sigma)$ .

L'indice de  $\Sigma$  est donc au plus 5 et  $\Sigma$  est le tore de Clifford grâce au théorème de Urbano (voir Partie 3.1). Ceci finit la preuve du théorème A.

### La conjecture de Willmore

Démontrons maintenant le Théorème B. On considère  $\Sigma$  une surface de  $S^3$  de genre non nul avec  $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$  (sinon il n'y a rien à montrer). On lui associe sa famille canonique  $\varphi_0$  et on applique le théorème de min-max comme précédemment. On obtient aussi une chaîne d'inégalité du type (5) avec  $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$  à la place des deux derniers termes. On conclut aussi que  $L([\varphi_0]) = \mathcal{A}(\Sigma_1)$  avec  $\Sigma_1$  minimale de genre non nul. Donc, d'après le Théorème A,  $\mathcal{W}(\Sigma) \geq \mathcal{A}(\Sigma_1) \geq 2\pi^2$ .

En cas d'égalité,  $\varphi_0$  est optimal pour le problème de min-max donc  $\mathcal{W}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma_{p,t}) = 2\pi^2$ . Ceci implique que  $t = 0$  et  $\Sigma_p$  est un tore de Clifford :  $\Sigma$  est l'image conforme d'un tore de Clifford.

## 6. Autour du théorème de min-max

Pour ceux dont la curiosité ne serait pas comblée, disons quelques mots de travaux plus récents. On a vu que, dans  $S^3$ , il existe une infinité de surfaces minimales différentes. Une conjecture de Shing-Tung Yau de 1982 prédit l'existence d'une infinité de surfaces minimales dans toutes les variétés compactes de dimension 3. Dans une récente prépublication [11] Marques et Neves démontrent le résultat suivant.

**Théorème.** *Une variété riemannienne  $(M,g)$  compacte sans bord de dimension  $n+1$  ( $2 \leq n \leq 6$ ) contient au moins  $n+1$  hypersurfaces minimales distinctes. De plus, si deux hypersurfaces minimales de  $M$  ne peuvent être disjointes,  $M$  contient une infinité d'hypersurfaces minimales.*

En particulier si la courbure de Ricci de  $M$  est strictement positive, un théorème de Theodore Frankel [5] affirme que deux hypersurfaces minimales de  $M$  doivent obligatoirement s'intersecter. Le théorème répond donc positivement à la conjecture de Yau dans le cas de la courbure de Ricci strictement positive.

Disons quelques mots de la preuve du résultat ci-dessus. On considère la notion de  $p$ -balayages. Ce

sont les applications continues  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M)$  où  $X$  est un complexe simplicial de dimension  $p$  qui remplace  $I^k$  et  $\mathcal{Z}_n(M)$  est l'espace des hypersurfaces de  $M$ . On demande de plus que  $\varphi$  satisfasse à une propriété topologique que l'on va caractériser par la propriété de type degré suivante :

*Pour tout ensemble de points  $\{x_1, \dots, x_p\}$  de  $M$ , il existe  $q \in X$  tel que  $\varphi(q)$  contienne exactement cette collection de points.*

On note  $P_p$  l'ensemble des  $p$ -balayages  $M$  et on peut définir la  $p$ -largeur de  $M$  comme étant la valeur de min-max :

$$\omega_p(M) = \inf_{\varphi \in P_p} \sup \{\varphi(q), q \in X\}.$$

Ces quantités apparaissent dans des travaux de Mikhael Gromov [6] et Larry Guth [7], où ils caractérisent leur comportement asymptotique.

**Théorème.** *Il existe une constante  $C = C(M, g)$  telle que pour  $p \in \mathbb{N}^*$*

$$\frac{1}{C} p^{\frac{1}{n+1}} \leq \omega_p(M) \leq C p^{\frac{1}{n+1}}.$$

L'idée est maintenant d'appliquer le théorème de min-max pour écrire les  $p$ -largeurs en termes d'aires d'hypersurfaces minimales. Dans un premier temps, Marques et Neves montrent que si  $M$  ne contient qu'un nombre fini d'hypersurfaces minimales, la suite  $(\omega_p(M))_{p \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

Appliquons donc maintenant le théorème de min-max aux  $p$ -largeurs, on a donc des hypersurfaces minimales disjointes et des multiplicités telles que

$$\omega_p(M) = n_{p,1} \mathcal{A}(\Sigma_{p,1}) + \dots + n_{p,\ell} \mathcal{A}(\Sigma_{p,\ell}).$$

Si deux hypersurfaces minimales de  $M$  ne peuvent pas être disjointes, l'écriture ci-dessus se résume donc à  $\omega_p(M) = n_p \mathcal{A}(\Sigma_p)$ . Ainsi si  $M$  ne contient qu'un nombre fini d'hypersurfaces minimales  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_\ell$ , la suite  $(\omega_p(M))_{p \in \mathbb{N}}$  est contenue dans l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^\ell \mathcal{A}(\Sigma_i) \mathbb{N}^*$ . Or cet ensemble ne peut contenir une suite strictement croissante vérifiant le comportement asymptotique donné par Gromov et Guth.

## Références

- [1] F. J. ALMGREN Jr. « The homotopy groups of the integral cycle groups ». *Topology* **1** (1962), p. 257–299.
- [2] M. S. BERGER et E. BOMBIERI. « On Poincaré's isoperimetric problem for simple closed geodesics ». *J. Funct. Anal.* **42** (1981), p. 274–298.
- [3] G. D. BIRKHOFF. « Dynamical systems with two degrees of freedom ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **18** (1917), p. 199–300.
- [4] C. B. CROKE. « Poincaré's problem and the length of the shortest closed geodesic on a convex hypersurface ». *J. Differential Geom.* **17** (1982), 595–634 (1983).
- [5] T. FRANKEL. « On the fundamental group of a compact minimal submanifold ». *Ann. of Math.* (2) **83** (1966), p. 68–73.
- [6] M. GROMOV. « Dimension, nonlinear spectra and width ». In : *Geometric aspects of functional analysis* (1986/87). Vol. 1317. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1988, p. 132–184.
- [7] L. GUTH. « Minimax problems related to cup powers and Steenrod squares ». *Geom. Funct. Anal.* **18** (2009), p. 1917–1987.
- [8] L. HELLER, S. HELLER et N. SCHMITT. « Navigating the space of symmetric CMC surfaces ». preprint, arXiv:1501.01929.
- [9] N. KAPOULEAS. « On desingularizing the intersections of minimal surfaces ». In : *Proceedings of the 4th International Congress of Geometry (Thessaloniki, 1996)*. Giachoudis-Giopoulos, Thessaloniki, 1997, p. 34–41.
- [10] H. B. LAWSON Jr. « Complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  ». *Ann. of Math.* (2) **92** (1970), p. 335–374.
- [11] F. C. MARQUES et A. NEVES. « Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature ». preprint, arXiv:1311.6501.
- [12] F. C. MARQUES et A. NEVES. « Min-Max theory and the Willmore conjecture ». *Ann. of Math.* (2) **179** (2014), p. 683–782.
- [13] J. T. PITTS. *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*. 27. Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981, p. iv+330.
- [14] H. POINCARÉ. « Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905), p. 237–274.
- [15] A. Ros. « The Willmore conjecture in the real projective space ». *Math. Res. Lett.* **6** (1999), p. 487–493.
- [16] N. SCHMITT. *Surface Gallery*. <http://www.math.uni-tuebingen.de/user/nick/>.
- [17] F. URBANO. « Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), p. 989–992.
- [18] T. J. WILLMORE. « Note on embedded surfaces ». *An. Ști. Univ. "Al. I. Cuza" Iași Sect. I a Mat. (N.S.)* **11B** (1965), p. 493–496.



**Laurent HAUSWIRTH**

Université de Marne la Vallée

Laurent Hauswirth est Maître de conférences. Son travail de recherche porte sur la géométrie des surfaces minimales et leur lien avec les systèmes intégrables.



**Laurent MAZET**

Université Paris-Est Créteil

Laurent Mazet est chargé de recherche. Son travail de recherche porte sur la géométrie des surfaces minimales et à courbure moyenne constante et leur lien avec certains problèmes d'analyse géométrique.