

## MÉMOIRE

Présenté pour obtenir

LE DIPLÔME D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Spécialité : Mathématiques

par

LAURENT MAZET

QUELQUES RÉSULTATS EN THÉORIE DES SURFACES À  
COURBURE MOYENNE CONSTANTE

Soutenu le 27 novembre 2012 devant le jury composé de :

GÉRARD BESSON

RAFE MAZZEO

FRANK PACARD

TRISTAN RIVIÈRE

STÉPHANE SABOURAU

Directeur de Recherches CNRS, Institut Fourier

Professeur, Stanford University

Professeur, Ecole Polytechnique

Professeur, ETH Zurich

Professeur, Université Paris-Est Créteil

suite aux rapports de

RAFE MAZZEO

WILLIAM MINICOZZI

TRISTAN RIVIÈRE

Professeur, Stanford University

Professeur, Johns Hopkins University

Professeur, ETH Zurich



# Remerciements

Ce mémoire est l'occasion pour moi de remercier un certain nombre de personnes qui ont accompagné mon travail ces dernières années.

Tout d'abord, je souhaite dire que je suis très honoré que Rafe Mazzeo, William Micozzi et Tristan Rivière aient accepté d'être rapporteur de mon mémoire d'habilitation et je tiens à les remercier pour le temps qu'ils y ont consacré. Je veux dire aussi merci à Gérard Besson, Frank Pacard et Stéphane Sabourau qui ont accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Parmi les personnes avec lesquelles j'ai travaillé, Pascal Collin est celui qui m'a initié au travail de recherche ainsi qu'aux objets qui sont le sujet d'étude de ce mémoire ; je souhaite lui dire ici toute ma reconnaissance. Je tiens aussi à remercier mes coauteurs Martin Traizet, Magdalena Rodríguez, Harold Rosenberg, Olivier Ley, Jérôme Bolte et Aris Daniilidis pour leur enthousiasme et tout ce qu'ils m'ont appris. Je tiens à remercier plus particulièrement Harold Rosenberg pour ses encouragements constants qu'il m'a adressés tout au long de ces années. Je souhaite aussi exprimer toute ma gratitude aux personnes avec lesquelles j'ai pu discuter surfaces minimales, tout particulièrement, Benoît Daniel, Laurent Hauswirth, Marc Soret, Rabah Souam et Eric Toubiana.

Je crois que notre travail dépend beaucoup de l'ambiance de notre laboratoire. Pour cette raison, je souhaite remercier chaleureusement les tourangeaux pour leur accueil pendant deux années au sein du LMPT. Je tiens aussi à remercier tous mes collègues du LAMA pour l'esprit à la fois très convivial et propice au travail qui règne au sein des couloirs cristoliens. De plus, je souhaite saluer leurs efforts pour me faire découvrir de nouveaux paysages mathématiques même si ils n'ont pas (encore) réussi à me faire basculer du côté obscur de l'analyse multifractale, des espaces de Besov ou de l'équation de Boltzman.

Enfin, je souhaite remercier mes amis pour tous les bons moments de détente qui m'ont ainsi permis de m'échapper des mathématiques lorsque cela était nécessaire. Je tiens aussi à exprimer toute mon affection à ma famille.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Surfaces minimales et à courbure moyenne constante</b>	<b>11</b>
1.1 Première et seconde variation de l'aire . . . . .	11
1.2 L'équation des surfaces à courbure moyenne constante . . . . .	12
1.3 Flux des surfaces à courbure moyenne constante . . . . .	14
1.4 L'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	14
<b>2 L'équation des surfaces à courbure moyenne constante sur les domaines non-bornés</b>	<b>17</b>
2.1 Convergence des suites de solutions . . . . .	17
2.2 Le théorème de type Jenkins Serrin dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	18
2.3 Unicité pour les domaines non-compactes . . . . .	20
2.3.1 Unicité pour les l'équations des surfaces à courbure moyenne constante sur une bande de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	21
2.3.2 Le cas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	22
2.3.3 L'équation des surfaces maximales . . . . .	22
<b>3 Surfaces à courbure moyenne constante dans les espaces quotients</b>	<b>25</b>
3.1 Technique de conjugaison . . . . .	26
3.2 Surfaces minimales dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ . . . . .	27
3.2.1 Surfaces minimales de genre 0 avec une infinité de bouts . . . . .	27
3.2.2 Surfaces minimales quasi-périodiques . . . . .	28
3.3 Surfaces périodiques dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	30
3.3.1 Le problème d'Alexandrov dans $M$ . . . . .	30
3.3.2 Surfaces minimales de $M$ . . . . .	31
3.3.3 Surfaces minimales invariantes par un groupe de pavage . . . . .	32
<b>4 Le problème du demi-espace</b>	<b>33</b>
4.1 Le problème du demi-espace . . . . .	33
4.2 Le théorème du demi-espace . . . . .	34
4.3 Quelques éléments de démonstration . . . . .	36

<b>5 Surfaces à courbure moyenne constante cylindriquement bornées dans</b>	
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	<b>39</b>
5.1 Surfaces cylindriquement bornées . . . . .	39
5.2 Quelques éléments de démonstration . . . . .	40
<b>Articles présentés</b>	<b>43</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

# Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter les résultats que nous avons obtenus concernant l'étude des surfaces minimales et à courbure moyenne constante<sup>1</sup> dans une variété riemannienne de dimension 3. A chaque fois, sans rentrer dans les détails techniques, nous tacherons d'expliquer les principales idées mises en œuvre pour démontrer ces résultats.

Les surfaces minimales et les surfaces à courbure moyenne constante apparaissent comme les solutions de deux grands problèmes classiques d'optimisation géométrique : le problème de Plateau et le problème isopérimétrique. Dans les deux cas, on souhaite déterminer des surfaces d'aire minimale pour certaines contraintes géométriques. Pour le problème de Plateau on fixe le bord de la surface ; quant au problème isopérimétrique, on fixe le volume enclos par la surface.

Dans les deux cas, le fait d'être critique pour l'aire se traduit sur la courbure moyenne  $H$  de la surface. Pour le problème de Plateau, on montre qu'une solution doit avoir une courbure moyenne nulle et par extension une surface de courbure moyenne nulle est dite minimale. Pour le problème isopérimétrique, la contrainte de volume implique que la courbure moyenne est constante.

Réiproquement, une surface minimale ou à courbure moyenne constante est localement un minimum de la fonctionnelle d'aire pour le problème de Plateau ou le problème isopérimétrique.

Le plan euclidien est évidemment une surface minimale de  $\mathbb{R}^3$ . Sinon, les premiers exemples non triviaux de surface minimales datent des dix-huitième et dix-neuvième siècles. Les caténoïdes qui sont les seules surfaces minimales de révolution sont construites par Euler. Meusnier découvre l'hélicoïde en cherchant des surfaces minimales réglées. Connaissant l'équation que doit satisfaire un graphe  $z = f(x, y)$  pour être minimal, Scherk construit une surface doublement périodique dont le domaine fondamental peut être décrit comme un graphe au dessus d'un domaine carré. Enfin, Weierstrass introduit une représentation des surfaces minimales en terme de fonctions holomorphes, ce qui permet de générer de nombreux exemples immersés. De plus, Riemann classe les surfaces minimales feuilletées par des cercles ou des droites et ajoute ainsi aux plans, caténoïdes et hélicoïdes une surface minimale plongée appelée « exemple de Riemann ».

Concernant les surfaces à courbure moyenne constante, Delaunay détermine les surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Hormis les sphères et les cylindres, il découvre une famille à un paramètre d'anneaux qui sont invariants par une translation

---

1. nous utiliserons parfois l'abréviation « cmc »

le long de l'axe de révolution.

Au début du vingtième siècle, la théorie se concentre sur la résolution du problème de Plateau. Les travaux de Douglas, Rado et Courant apporteront une réponse quant à l'existence d'une solution. Des travaux ultérieurs permettront de connaître la régularité de cette solution.

Plus récemment, les travaux vont se concentrer sur les problèmes de classification. Plus précisément, on souhaite savoir si il existe des surfaces minimales ou à courbure moyenne constante vérifiant certaines contraintes géométriques (comportement asymptotique, courbure totale finie,...) et topologiques (compacité, genre 0,...). Si oui, est-il possible de connaître l'ensemble des surfaces vérifiant ces contraintes ?

Le théorème de Bernstein qui affirme que les plans sont les seuls graphes minimaux entiers dans  $\mathbb{R}^3$  est l'un des premiers résultats de ce type de classification. Les résultats de Hopf et Alexandrov caractérisent les sphères parmi les surfaces compactes à courbure moyenne constante comme étant respectivement les seules surfaces cmc compactes immergées simplement connexes et les seules surfaces cmc compactes plongées.

Récemment les travaux de Collin, Meeks, Pérez, Ros et Rosenberg [16, 56, 52] en s'appuyant sur des travaux antérieurs [75, 45, 33, 55, 11, 12, 13, 14] ont permis d'obtenir des résultats de classification concernant les surfaces minimales proprement plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . Collin [16] montre qu'un anneau minimal proprement plongé est nécessairement un caténoïde, une autre preuve de ce résultat a été donnée plus récemment par Colding et Minicozzi [9]. Meeks et Rosenberg [56] prouvent que les plans et les hélicoïdes sont les seules surfaces minimales simplement connexes proprement plongées. Enfin Meeks, Pérez et Ros [52] caractérisent l'exemple de Riemann comme étant la seule surface minimale de genre 0 ayant une infinité de bouts. En combinant ces résultats, on obtient une classification des surfaces minimales proprement plongées de genre 0 dans  $\mathbb{R}^3$ .

Concernant les surfaces à courbure moyenne constante, les travaux conjugués de Meeks [51] et Korevaar, Kusner et Solomon [42] montrent que les surfaces de Delaunay sont les seuls anneaux cmc proprement plongés dans  $\mathbb{R}^3$ . Leurs travaux permettent aussi une étude de l'espace des modules des surfaces cmc proprement plongées de topologie finie par Kusner, Mazzeo et Pollack [43].

Lors de ces dix dernières années, la théorie des surfaces minimales et à courbure moyenne constante s'est fortement développée dans des espaces ambients différents de  $\mathbb{R}^3$ . Outre les espaces à courbure constante  $\mathbb{H}^3$  et  $\mathbb{S}^3$ , les travaux ont porté sur les espaces homogènes. Rappelons qu'une variété riemannienne est dite homogène si son groupe d'isométries agit transitivement sur la variété.

Les premiers travaux marquants sont dus à Meeks et Rosenberg [54] sur les surfaces minimales dans les espaces produits et à Abresch et Rosenberg [1, 2] qui obtiennent une classification des sphères à courbure moyenne constante dans les espaces  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  : ils montrent qu'une telle sphère est nécessairement une sphère de révolution. Les espaces  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  forment une classe d'espaces homogènes dont le groupe d'isométrie est de dimension au moins 4. Très récemment cette étude du problème de Hopf a été reprise par Daniel et Mira [23] dans l'espace homogène  $\text{Sol}_3$  pour obtenir une classification des sphères cmc immergées. Ils obtiennent en parallèle la solution du problème d'Alexandrov. Leur résultat a été complété par Meeks dans [50].

Suite aux résultats de Abresch et Rosenberg sur le problème de Hopf, de nombreux travaux ont été menés sur l'étude des surfaces minimales et cmc dans ces espaces (voir [3, 20, 19, 26, 30, 29, 47, 59, 61, 60, 62, 65, 67, 72, 68, 74, 77, 78, 7, 34, 83]). Parmi ces travaux, on peut par exemple noter l'étude du problème de Bernstein qui débouche sur les classifications des graphes entiers minimaux dans l'espace de Heisenberg par Fernandez et Mira [25] et les graphes entiers de courbure moyenne  $1/2$  dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  par Hauswirth, Rosenberg et Spruck [28]. Un autre travail marquant est la construction par Collin et Rosenberg [18] d'un graphe entier minimal dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  de type conforme parabolique ; la projection verticale du graphe sur  $\mathbb{H}^2$  produit alors un difféomorphisme harmonique de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{H}^2$ . L'existence d'un tel difféomorphisme contredit une conjecture de Schoen.

Dans ce mémoire nous présentons les résultats que nous avons obtenus dans la théorie des surfaces minimales et à courbure moyenne constante. La question de la construction de surfaces minimales ou à courbure moyenne constante est présente tout au long de notre travail : soit comme but en soi afin d'illustrer la théorie en exhibant des exemples particuliers soit comme outil afin de construire des surfaces de comparaison utiles à la compréhension de la géométrie des surfaces minimales ou cmc. Les idées utilisées pour ces constructions relèvent de la théorie des équations aux dérivées partielles au travers de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante, du calcul des variations et de techniques dite « de conjugaison ». Par ailleurs, plusieurs résultats que nous allons exposer concernent  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , cet espace peut être vu comme un modèle intermédiaire entre la théorie dans  $\mathbb{R}^3$  et dans les espaces homogènes les plus généraux. En effet contrairement à  $\mathbb{R}^3$ , on perd le caractère isotrope de l'espace, mais on conserve un groupe d'isométries relativement gros puisqu'il est de dimension 4.

Au Chapitre 1, nous rappelons un certain nombre de définitions concernant les surfaces minimales et les surfaces à courbure moyenne constante. Nous introduisons la notion de stabilité pour une surface à courbure moyenne constante. Nous écrivons aussi l'équation des surfaces à courbure moyenne constante et donnons quelques propriétés de celle-ci. Nous rappelons aussi la définition du flux d'une surface cmc à travers une courbe. Enfin nous donnons quelques éléments concernant la variété riemannienne  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  : nous rappelons entre autre la définition des surfaces de Delaunay dans cet espace.

Le Chapitre 2 est consacré à notre étude de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante sur les domaines non compacts dont les résultats sont publiés dans les articles [Ma1, Ma2, Ma3, Ma4, MRR1]. Un des principaux résultats que nous donnons est un théorème d'existence de solutions au problème de Dirichlet associé à l'équation des surfaces minimales avec des données au bord infinies sur  $\mathbb{H}^2$ . Il s'agit d'un résultat de type Jenkins-Serrin qui assure l'existence de solutions en fonction de certaine condition géométrique sur le domaine. Nous présentons aussi plusieurs résultats d'unicité des solutions pour cette équation sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{H}^2$ . Ces résultats et les idées de démonstration réapparaissent dans la suite du mémoire comme outils de preuve des théorèmes.

Dans le Chapitre 3, nous présentons des constructions de surfaces minimales dans des espaces quotients de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  ainsi qu'un théorème de classification de type Alexandrov dans un quotient de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Ces résultats sont publiés dans [MRT, MT, Ma5,

[Ma7, MRR2]. Plus précisément, nous présentons des résultats d’existence dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  de surfaces minimales à courbure totale infinie ainsi que des exemples quasipériodiques. Ces constructions illustrent les techniques de conjugaison introduites par Karcher. Dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , nous construisons des surfaces minimales périodiques similaires à la surface de Scherk et à la selle de Karcher de  $\mathbb{R}^3$ . Par ailleurs pour un certain quotient de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  nous classifions les surfaces compactes à courbure moyenne constante plongées.

Le Chapitre 4 est consacré au problème du demi-espace, c’est-à-dire savoir si dans un certain espace ambiant il est possible pour deux surfaces à courbure moyenne constante de ne pas se rencontrer. Nous présentons un résultat général qui permet de retrouver la plupart des résultats connus sur ce problème ainsi que d’étudier de nouveaux cas intéressants. Nous présentons aussi une estimé de longueur pour les surfaces à courbure moyenne constante stables qui permet de comprendre les conséquences de la stabilité pour le problème du demi-espace. Ces résultats sont publiés dans [Ma6, Ma8].

Le Chapitre 5 présente le résultat publié dans [Ma9] concernant la classification des surfaces à courbure moyenne constante cylindriquement bornées dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Nous montrons que les seules surfaces cmc cylindriquement bornées de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sont les surfaces de Delaunay. Ce résultat est similaire au théorème de Korevaar, Kusner et Solomon concernant les surfaces de Delaunay de  $\mathbb{R}^3$  que nous avons évoqué plus haut.

Par convention, toutes les variétés riemanniennes que nous allons considérés seront supposées complètes avec éventuellement un bord. De plus, sauf mention du contraire, toutes les surfaces à courbure moyenne constante  $H_0$  seront orientées de sorte que  $H_0 \geq 0$ .

Dans ce mémoire nous n’évoquerons pas les articles issus de notre thèse de doctorat. Par ailleurs, nous ne présentons pas les résultats obtenus dans l’article écrit en collaboration avec J. Bolte, A. Daniilidis et O. Ley [6] qui ne porte pas sur la théorie des surfaces minimales et à courbure moyenne constante. Dans cet article, nous nous intéressons à des caractérisations des inégalités de Lojasiewicz dans un cadre non lisse.

Par ailleurs, nous tenons à signaler que certaines des images illustrant le mémoire sont tirées du Virtual Math Museum <http://virtualmathmuseum.org>.

# Chapitre 1

## Surfaces minimales et à courbure moyenne constante

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions concernant la théorie des surfaces minimales et des surfaces à courbure moyenne constante. Nous considérons dans un premier temps le cadre général des hypersurfaces d'une variété riemannienne de dimension  $n + 1$ . Dans les chapitres suivants nous ne considérerons plus que le cas  $n = 2$  *i.e.* celui des surfaces dans une variétés de dimension 3.

### 1.1 Première et seconde variation de l'aire

Soit  $\Sigma$  une hypersurface immergée d'une variété riemannienne  $M$  de dimension  $n + 1$ . La seconde forme fondamentale sur  $\Sigma$  en  $p$  est une forme bilinéaire définie sur  $T_p\Sigma$  par

$$\Pi(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y, N)$$

où  $X, Y \in T_p\Sigma$ ,  $N$  est un choix de vecteur unitaire normal à  $T_p\Sigma$  et  $\bar{\nabla}$  est la connexion de Levi-Civita de  $M$ . La courbure moyenne de  $\Sigma$  en  $p$  par rapport  $N$  est alors

$$H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\Pi_p)$$

et  $H(p)N$  est le vecteur de courbure moyenne en  $p$ .

Dans l'introduction, nous avons dit que la courbure moyenne apparaît pour caractériser les points critiques de la fonctionnelle d'aire. Afin de le mettre en évidence, étudions maintenant l'évolution de l'aire d'une hypersurface au cours d'une déformation. Pour une fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\Sigma)$ , on définit  $f_t = \Sigma \rightarrow M, p \mapsto \exp_p(t\varphi(p)N)$ . Pour  $t$  proche de 0, les applications  $f_t$  forment une famille lisse d'immersions qui déforme l'immersion initiale  $f_0 = \operatorname{id}$  de  $\Sigma$ . Pour tout  $t$  proche de 0, on considère alors  $A(t)$  l'aire (volume dans le cas  $n \geq 3$ ) de la partie déformée de  $\Sigma$ . Cette fonction  $A$  est lisse et on a :

$$\frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = - \int_{\Sigma} n H \varphi. \tag{1.1}$$

Ainsi la surface  $\Sigma$  est un point critique de la fonctionnelle d'aire si et seulement si sa courbure moyenne est partout nulle, on dit alors que  $\Sigma$  est minimale.

Si la surface  $\Sigma$  est un point critique de la fonctionnelle d'aire pour les variations préservant le volume enclos par  $\Sigma$ . On a  $A'(0) = 0$  pour tout  $\varphi$  vérifiant  $\int_{\Sigma} \varphi = 0$ . L'hypersurface  $\Sigma$  est alors à courbure moyenne constante :  $H = H_0$ .

Si  $H_t(p)$  est la courbure moyenne de  $f_t(\Sigma)$  en  $f_t(p)$ , la dérivée de  $H_t$  par rapport à  $t$  va intervenir dans le calcul de la dérivée seconde de  $A(t)$ . En fait on a :

$$\frac{d}{dt} n H_{t|t=0} = \Delta \varphi + (\text{Ric}(N, N) + \|\text{II}\|^2) \varphi \quad (1.2)$$

où  $\Delta$  est le Laplacien sur  $\Sigma$ ,  $\text{Ric}(N, N)$  est le tenseur de Ricci de  $M$  calculé dans la direction  $N$  et  $\|\text{II}\|^2$  est le carré de la norme de la seconde forme fondamentale. L'opérateur  $L = \Delta + (\text{Ric}(N, N) + \|\text{II}\|^2)$  est appelé opérateur de Jacobi ou opérateur de stabilité de l'hypersurface  $\Sigma$ .

Si  $\Sigma$  est minimale, la dérivée seconde de  $A(t)$  peut alors être calculée et on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2} A(t)|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \varphi L \varphi = \int_{\Sigma} \|\nabla \varphi\|^2 - ((\text{Ric}(N, N) + \|\text{II}\|^2) \varphi^2) \quad (1.3)$$

où  $\nabla \varphi$  est le gradient de  $\varphi$  sur  $\Sigma$ .  $\Sigma$  apparaît donc comme un minimum de la fonctionnelle d'aire à l'ordre deux si l'intégrale ci-dessus est positive pour tout  $\varphi$ , autrement dit si l'opérateur  $-L$  est positif pour les fonctions à support compact. On dira donc qu'une hypersurface minimale est stable si

$$\int_{\Sigma} \|\nabla \varphi\|^2 - ((\text{Ric}(N, N) + \|\text{II}\|^2) \varphi^2) \geq 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^{\infty}(\Sigma). \quad (1.4)$$

De même, une hypersurface à courbure moyenne constante est dite stable si (1.4) est vraie ; elle sera dite faiblement stable si (1.4) n'est vraie que pour les fonctions  $\varphi \in C_c^{\infty}(\Sigma)$  vérifiant  $\int_{\Sigma} \varphi = 0$ .

## 1.2 L'équation des surfaces à courbure moyenne constante

Les hypersurfaces à courbure moyenne constante peuvent localement être décrites comme des graphes de fonctions. Dans ce cas, la fonction doit satisfaire une équation aux dérivées partielles. Dans certains espaces, cette description peut être utilisée de façon globale.

Considérons  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$  et  $f$  une fonction  $C^{\infty}$  sur  $M$  strictement positive. On définit alors la variété riemannienne  $M \times_f \mathbb{R}$  comme étant la variété  $\{(p, t) \in M \times \mathbb{R}\}$  munie de la métrique riemannienne  $g + f^2(p)dt^2$ . On constate que le champ de vecteurs  $\partial_t$  est alors un champ de Killing de  $M \times_f \mathbb{R}$ .

Si  $u$  est une fonction définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $M$ , on lui associe son graphe  $G_u = \{(p, u(p)), p \in \Omega\}$  dans  $M \times_f \mathbb{R}$ . C'est une hypersurface de  $M \times_f \mathbb{R}$ . Un vecteur unitaire normal à  $G_u$  est alors

$$N = \frac{-\partial_t + f^2 \nabla u}{f \sqrt{1 + f^2 \|\nabla u\|^2}}$$

où  $\nabla u$  est le gradient de  $u$  sur  $(M, g)$ . La courbure moyenne  $H$  de  $G_u$  par rapport à ce vecteur unitaire normal est alors donnée par :

$$-\frac{1}{nf} \operatorname{div} \left( \frac{f^2 \nabla u}{\sqrt{1 + f^2 \|\nabla u\|^2}} \right) = H$$

où  $\operatorname{div}$  est l'opérateur divergence sur  $(M, g)$ . Ainsi, trouver une fonction  $u$  dont le graphe est à courbure moyenne constante  $H_0$  revient à résoudre sur  $M$  l'équation aux dérivées partielles

$$\operatorname{div} \left( \frac{f^2 \nabla u}{\sqrt{1 + f^2 \|\nabla u\|^2}} \right) = -nH_0 f \quad (1.5)$$

Lorsque  $f \equiv 1$ , l'espace  $M \times_f \mathbb{R}$  est un simple produit riemannien. On obtient alors les versions classiques de l'équation des surfaces minimales :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0 \quad (1.6)$$

et de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = -nH_0 \quad (1.7)$$

Ces équations sont quasilinéaires, elliptiques et du second ordre ce qui nous donne tout un ensemble de résultats portant sur la régularité de leurs solutions. Le problème de Dirichlet associé à ce type d'équation (résoudre (1.5) sur un domaine de  $M$  en imposant la valeur sur le bord du domaine) a été étudié par J. Serrin [76]. On note tout d'abord que l'on a unicité des solutions sur des domaines compacts car l'équation satisfait à un principe de maximum. Pour l'existence, J. Serrin montre que l'équation (1.5) admet des solutions pour toute donnée continue sur le bord dès que le bord du domaine est suffisamment courbé. Par exemple, dans le cas  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $f = 1$  c'est-à-dire  $M \times_f \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ , le problème de Dirichlet pour (1.7) peut être résolu dès que le bord a une courbure supérieure à  $2H_0$ . Pour  $H_0 = 0$ , il suffit que le domaine soit convexe.

Parmi les propriétés importantes de cette équation, on dispose d'une estimé  $L^\infty$  du gradient d'une solution en terme de la norme  $L^\infty$  de la solution. Ce résultat a été démontré par J. Spruck [80] dans le cas où  $f \equiv 1$ . Il dit que si  $u$  est une solution positive de (1.5) sur un disque géodésique centré en  $p \in M$  et de rayon  $R$ , alors  $\|\nabla u\|(p)$  est majoré par une fonction de  $u(p)/R$ . Ce résultat permet entre autre d'assurer la convergence des suites  $L^\infty$  bornée de solutions. Par ailleurs, ce contrôle des dérivées des solutions permet dans certain cas d'assurer l'uniforme ellipticité de l'équation (1.5). Cette information peut être intéressante pour étudier la régularité d'une solution au bord de son domaine de définition.

### 1.3 Flux des surfaces à courbure moyenne constante

Dans cette section nous rappelons la définition du flux pour les surfaces à courbure moyenne constante. Cette notion interviendra à plusieurs reprises dans ce mémoire. De plus, à partir de maintenant nous allons nous intéresser au cas des surfaces dans une variété de dimension 3.

Considérons  $\Sigma$  une surface à courbure moyenne constante  $H_0$  dans une variété riemannienne  $M$  de dimension 3. On considère alors  $c$  un lacet dans  $\Sigma$  et  $Q$  une surface compacte de  $M$  dont le bord est  $c$ . Soit  $Y$  un champ de Killing de la variété  $M$ . On définit alors le flux de  $\Sigma$  au travers de  $c$  dans la direction  $Y$  par la formule :

$$F_c(Y) = \int_c Y \cdot \vec{\nu} - 2H_0 \int_Q Y \cdot \vec{n}_Q$$

où  $\vec{\nu}$  est la conormale à  $c$  tangente à  $\Sigma$  et  $\vec{n}_Q$  est le vecteur unitaire normal à  $Q$  (voir Figure 1.1).

La surface  $\Sigma$  étant à courbure moyenne constante  $H_0$ , la quantité  $F_c(Y)$  ne dépend pas alors du choix de la surface  $Q$  et ne dépend que de la classe d'homologie de  $c$  dans  $\Sigma$ .

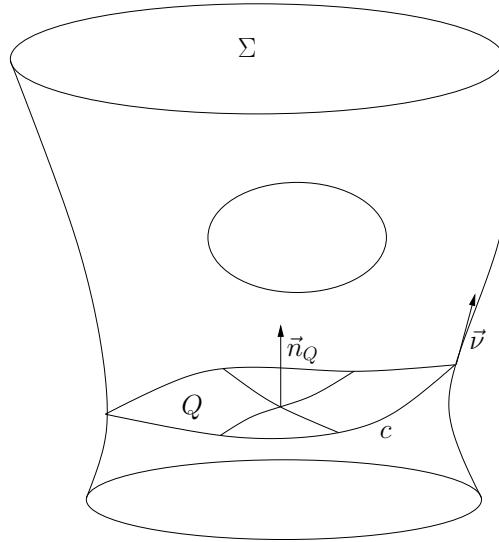


FIGURE 1.1 – La définition du flux

### 1.4 L'espace $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Parmi les variétés homogènes simplement connexes de dimension 3, une classe intéressante est celle des espaces  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Cette classe regroupe tous les espaces homogènes de dimension 3 ayant un groupe d'isométries de dimension 4 ou 6 hormis  $\mathbb{H}^3$ . Chaque espace

$\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  a pour particularité de posséder une fibration riemannienne au dessus de  $M^2(\kappa)$  la surface simplement connexe de courbure  $\kappa$ . Lorsque  $\tau = 0$ ,  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  est l'espace produit  $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  et, par exemple, si  $\kappa > 0$  et  $\tau \neq 0$  on trouve des descriptions des sphères de Berger : la fibration correspond alors à la fibration de Hopf. Pour une description plus complète dans le contexte de l'étude des surfaces cmc, nous renvoyons à [19].

Dans la suite de ce mémoire, nous allons souvent étudier un cas particulier de ces espaces :  $\mathbb{E}(-1, 0) = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Dans cette section nous regroupons quelques définitions et certains faits concernant les surfaces à courbure moyenne constante dans cet espace. Dans la suite nous utiliserons  $z$  pour désigner la coordonnée réelle de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

Lorsque l'on construit les premiers exemples de surfaces à courbure moyenne constante, on s'intéresse souvent à des exemples invariants par des sous-groupes d'isométries de dimension 1. Ceci permet en général de construire des exemples explicites qui peuvent servir de modèles ou de barrières dans l'étude générale des surfaces cmc de l'espace. Dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , on peut entre autre chercher les surfaces cmc invariantes par rotation autour d'une géodésique verticale  $\{p\} \times \mathbb{R}$  [35]. Si on s'intéresse à des exemples plongés, pour tout  $H_0 \geq 0$ , on montre qu'il existe une famille à un paramètre de surfaces plongées à courbure moyenne constante  $H_0$  qui sont invariantes par rotation autour d'une géodésique verticale.

Suivant la valeur de  $H_0$ , on a deux comportements possibles pour cette famille. Si  $H_0 > 1/2$ , la famille possède une surface compacte qui est topologiquement une sphère et une famille d'anneaux non compacts qui sont invariants par une translation verticale. Dans cette famille, on trouve entre autre les cylindres  $C \times \mathbb{R}$  où  $C$  est un cercle géodésique de  $\mathbb{H}^2$  de centre  $p$ . Au vue de ces caractéristiques, ces surfaces sont semblables aux surfaces de Delaunay de  $\mathbb{R}^3$  et par extension on dit que ces surfaces sont les surfaces de Delaunay de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et les anneaux sont appelés onduloïdes.

Si  $H_0 \leq 1/2$ , la famille de surfaces de rotation contient une surface qui est un graphe entier au dessus de  $\mathbb{H}^2$  et un famille à un paramètre d'anneaux non compacts qui eux ne sont pas invariants par une translation verticale. Dans les deux cas, la famille est paramétrée par le flux du champ de Killing  $\partial_z$  à travers le lacet qui engendre l'homologie de l'anneau.

De l'existence de ces surfaces, on déduit que des surfaces compactes à courbure moyenne constante ne peuvent exister que pour  $H_0 > 1/2$ . Hsiang et Hsiang [35] montrent en fait que les sphères de révolution sont les seules surfaces compactes plongées à courbure moyenne constante, il s'agit d'un résultat de type Alexandrov dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . On a aussi une caractérisation de ce type des surfaces de Delaunay comme on le verra au Chapitre 5.

La valeur  $H_0 = 1/2$  est une valeur critique dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . En effet, le comportement que l'on peut attendre d'une surface à courbure moyenne constante dans cet espace dépend fortement de savoir si  $H_0 < 1/2$ ,  $H_0 = 1/2$  ou  $H_0 > 1/2$ . Dans les chapitres suivants, ces différents comportements vont être abordés. Aux Chapitres 2 et 3, nous allons regarder les surfaces minimales ( $H_0 = 0$ ) dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Le problème du demi-espace dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  se pose pour  $H_0 \geq 1/2$ , le résultat que nous énonçons au Chapitre 4 permet entre autre de retrouver un résultat concernant les surfaces cmc  $H_0 = 1/2$  dû à Hauswirth, Rosenberg et Spruck [28]. Le Chapitre 5 est lui consacré à des surfaces à

courbure moyenne constante  $H_0 > 1/2$ .

## Chapitre 2

# L'équation des surfaces à courbure moyenne constante sur les domaines non-bornés

Dans la section 1.2, nous avons donné certains éléments de l'étude de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante (1.5) pour les domaines bornés. Dans le cas des domaines non compacts, l'étude de l'existence et de l'unicité pose plus de problèmes. Dans ce chapitre, nous présentons des résultats concernant cette problématique qui sont publiés dans [Ma1, Ma2, Ma3, Ma4, MRR1].

Nous rappelons que nous ne considérons que le cas des surfaces ( $n = 2$ ). Par ailleurs nous allons surtout regarder le cas de deux espaces ambients particuliers  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

### 2.1 Convergence des suites de solutions

Une approche naturelle pour résoudre le problème de Dirichlet associé à (1.5) sur un domaine non-borné  $\Omega$  est la suivante. On considère  $\Omega_n$  une exhaustion de  $\Omega$  par des domaines compacts. On résout un problème de Dirichlet sur  $\Omega_n$  qui est proche de celui que l'on veut résoudre sur  $\Omega$ ; on définit ainsi  $u_n$  une suite de solutions de (1.5) dont on souhaite montrer qu'elle converge vers une solution  $u$  du problème de Dirichlet sur  $\Omega$ .

Cette approche nécessite d'étudier les suites de solutions de l'équation (1.5). Les résultats ci-dessous concerne le cas d'espaces produits :  $M \times_f \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$  et  $H_0 > 0$  [Ma2] et  $M \times_f \mathbb{R} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $H_0 = 0$  [MRR1].

Considérons  $(u_n)$  une suite de solutions de (1.7) sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ . On définit le domaine de convergence :

$$\mathcal{B}(u_n) = \{p \in \Omega \mid (\|\nabla u_n\|(p))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

On montre alors que  $\mathcal{B}(u_n)$  est un ouvert et que, si  $p \in \mathcal{B}(u_n)$ , il existe une sous-suite de  $(u_n - u_n(p))$  qui converge vers une solution de (1.7) sur la composante connexe de  $\mathcal{B}(u_n)$  contenant  $p$ . Autrement dit, sur chaque composante connexe de  $\mathcal{B}(u_n)$ , on peut

faire converger une sous-suite de  $(u_n)$  vers une solution de (1.7) à translation verticale près.

Maintenant si on considère un point dans le complémentaire de  $\mathcal{B}(u_n)$ , quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que  $\|\nabla u_n\|(p) \rightarrow +\infty$  et même

$$\frac{\nabla u_n(p)}{\|\nabla u_n\|(p)} \rightarrow \vec{\nu} \quad (2.1)$$

où  $\vec{\nu}$  est un vecteur unitaire tangent à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ . Le vecteur normal  $N_n(p)$  à  $G_{u_n}$  tend alors lui aussi vers  $\vec{\nu}$ . La suite de graphes devient donc verticale au dessus du point  $p$ . En fait ce comportement va se propager le long d'une courbe du domaine de  $\Omega$ .

**Théorème 1** ([Ma2, MRR1]). *Soit  $(u_n)$  une suite de solutions de (1.7) sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  ( $H_0 > 0$ ) ou  $\mathbb{H}^2$  ( $H_0 = 0$ ). Soit  $p \in \Omega$  tel que (2.1) soit vraie. Soit  $\gamma$  la courbe dans  $\Omega$  de courbure constante  $2H_0$  passant par  $p$  et de vecteur de courbure  $2H_0\vec{\nu}$  en  $p$ . Alors, pour tout  $q \in \gamma$ ,  $N_n(q) \rightarrow \vec{\nu}(q)$  où  $\vec{\nu}(q)$  est le vecteur normal à  $\gamma$  en  $q$  tel que  $\vec{\nu} = \vec{\nu}(p)$ .*

Ainsi, au dessus de cette courbe  $\gamma$  la suite de graphes devient aussi verticale. Ces courbes  $\gamma$  sont appelées lignes de divergence de la suite  $(u_n)$ . On voit donc que le complémentaire du domaine de convergence est constitué d'un ensemble de courbes à courbure constante.

Par ailleurs, les lignes de divergence étant complètes, elle se prolongent jusqu'au bord du domaine de  $\Omega$ . Comme on s'intéresse au problème de Dirichlet, la suite  $(u_n)$  satisfait certaines hypothèses le long du bord. Ces hypothèses permettent alors d'interdire aux lignes de divergence d'avoir pour extrémité certains points du bord. On montre donc en général que les possibilités pour les lignes de divergence sont relativement restreintes et que le domaine de convergence  $\mathcal{B}(u_n)$  est donc grand voir même l'intégralité du domaine  $\Omega$  ce qui permet alors d'assurer la convergence de la suite de solutions.

## 2.2 Le théorème de type Jenkins Serrin dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Dans [36], Jenkins et Serrin étudient le problème de Dirichlet associé à l'équation des surfaces minimales (1.6) sur des domaines convexes de  $\mathbb{R}^2$ , ils souhaitent pouvoir autoriser les données  $\pm\infty$  sur le bord en suivant l'exemple de la surface de Scherk. Rappelons que la surface de Scherk est le graphe de la fonction  $\ln \cos x - \ln \cos y$  qui est une solution de (1.6) sur le carré  $]-\pi/2, \pi/2[^2$ . Cette fonction prend donc les valeurs  $\pm\infty$  sur le bord du carré. Jenkins et Serrin montrent alors que le problème peut être résolu si le domaine et les données au bord satisfont une certaine condition géométrique.

Ce résultat a été généralisé au cas de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante (1.7) ( $H_0 > 0$ ) sur  $\mathbb{R}^2$  par Spruck [79] puis à l'équation des surfaces minimales et des surfaces à courbure moyenne constante sur  $\mathbb{H}^2$  et  $\mathbb{S}^2$  par Hauswirth, Nelli, Rosenberg et Spruck [29, 59] et enfin à l'équation des surfaces minimales sur une surface riemannienne  $M$  quelconque par Pinheiro [65] et dans un travail que nous avons mené en commun avec M. M. Rodríguez et H. Rosenberg [MRR1].

Si on s'intéresse à des domaines non bornés, le problème peut être difficilement posé dans  $\mathbb{R}^2$ ; par contre dans  $\mathbb{H}^2$ , on peut écrire un théorème de type Jenkins-Serrin pour les domaines non bornés. Une première version de ce théorème a été écrite par Collin et Rosenberg [18], ceci leur a permis de construire un graphe minimal entier dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  dont le type conforme est celui de  $\mathbb{R}^2$ . De cette construction, il découle l'existence d'un difféomorphisme harmonique de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{H}^2$  contredisant ainsi une conjecture de Schoen. Dans un travail en commun avec M. M. Rodriguez et H. Rosenberg nous avons donné une version générale d'un résultat de type Jenkins-Serrin dans ce cadre.

Commençons par fixer des notations. On note  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$  le bord à l'infini de  $\mathbb{H}^2$ . Considérons alors  $\Omega$  un domaine non compact de  $\mathbb{H}^2$ . Dans le compactifié de  $\mathbb{H}^2$ , le bord de  $\Omega$  se décompose en deux parties : le bord  $\partial\Omega$  dans  $\mathbb{H}^2$  et  $\partial_\infty\Omega$  la partie incluse dans  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ . On dira alors qu'un domaine  $\Omega$  dans  $\mathbb{H}^2$  est admissible si son bord  $\partial\Omega \cup \partial_\infty\Omega$  se décompose en une union finie d'arcs  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  dans  $\mathbb{H}^2$  et d'arcs  $D_i$  dans  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$  telle que les arcs  $A_i$  et  $B_i$  sont géodésiques et les arcs  $C_i$  sont convexes. Les extrémités des arcs  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$  sont appelés les sommets de  $\Omega$ .

On s'intéresse alors au problème de Dirichlet ci-dessous.

Problème  $\mathcal{D}$  : Soit  $f_i$  et  $g_i$  des fonctions continues respectivement définies sur les arcs  $C_i$  et les arcs  $D_i$ . Existe-t'il alors une solution  $u$  de (1.6) sur  $\Omega$  qui s'étende à  $\partial\Omega \cup \partial_\infty\Omega$  privé des sommets avec les valeurs  $+\infty$  sur les arcs  $A_i$ ,  $-\infty$  sur les  $B_i$ ,  $f_i$  sur les  $C_i$  et  $g_i$  sur les  $D_i$  ?

Le résultat que nous avons obtenu dit que le problème  $\mathcal{D}$  admet une solution si  $\Omega$  vérifie une condition géométrique similaire à celle de Jenkins et Serrin qui s'exprime en termes de domaines polygonaux. Un domaine polygonal est un domaine admissible dont le bord n'est composé que d'arcs géodésiques. Enfin un domaine polygonal  $\mathcal{P}$  est inscrit dans un domaine admissible  $\Omega$  si  $\mathcal{P} \subset \Omega$  et les sommets de  $\mathcal{P}$  font partie des sommets de  $\Omega$ .

Soit  $\Omega$  un domaine admissible et  $\mathcal{P}$  un domaine polygonal, on note  $p_k$  les sommets idéaux de  $\mathcal{P}$  (c'est-à-dire ceux appartenant à  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ ). Parmi les arcs  $A_i$  de  $\partial\Omega$  certains font partie du bord de  $\mathcal{P}$ ; on note  $I_{\mathcal{P}}$  l'ensemble des indices de tels  $A_i$ . De même pour les arcs  $B_j$ , on définit l'ensemble d'indices  $J_{\mathcal{P}}$ . Pour chaque  $k$ , on considère alors  $H_k$  un horodisque de  $\mathbb{H}^2$  centré en  $p_k$ . Quitte à réduire la taille des horodisques choisis, on peut supposer qu'ils ne se rencontrent pas et qu'ils ne contiennent aucun des autres sommets de  $\mathcal{P}$ . On note alors

$$\tilde{A}_i = A_i \setminus \cup_k H_k, \quad \tilde{B}_j = B_j \setminus \cup_k H_k \quad \text{et} \quad \tilde{\partial\mathcal{P}} = \partial\mathcal{P} \setminus \cup_k H_k$$

Pour  $i \in I_{\mathcal{P}}$  et  $j \in J_{\mathcal{P}}$ , les arcs  $\tilde{A}_i$  et  $\tilde{B}_j$  qui appartiennent au bord de  $\Omega$  sont de longueur finie et on définit

$$\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{i \in I_{\mathcal{P}}} \ell(\tilde{A}_i), \quad \beta(\mathcal{P}) = \sum_{j \in J_{\mathcal{P}}} \ell(\tilde{B}_j) \quad \text{et} \quad \gamma(\mathcal{P}) = \ell(\tilde{\partial\mathcal{P}})$$

Ces notations semblent impropre car ces nombres dépendent du choix des horodisques mais on remarque que les quantités  $\gamma(\mathcal{P}) - 2\alpha(\mathcal{P})$ ,  $\gamma(\mathcal{P}) - 2\beta(\mathcal{P})$ ,  $\alpha(\mathcal{P}) - \beta(\mathcal{P})$  ont un

signe qui ne dépend pas du choix de ces horodisques pour de petits horodisques. Avec ces notations on a alors le résultat suivant.

**Théorème 2** ([MRR1]). *Soit  $\Omega$  un domaine admissible de  $\mathbb{H}^2$ . Si il existe au moins un arc  $C_i$  ou  $D_i$  alors une solution au problème  $\mathcal{D}$  existe sur  $\Omega$  si et seulement si*

$$\gamma(\mathcal{P}) - 2\alpha(\mathcal{P}) > 0 \quad \text{et} \quad \gamma(\mathcal{P}) - 2\alpha(\mathcal{P}) > 0$$

*pour tout domaine polygonal  $\mathcal{P}$  inscrit dans  $\Omega$ .*

*Si il n'y a aucun arc  $C_i$  ou  $D_i$ , il existe alors une solution au problème  $\mathcal{D}$  sur  $\Omega$  si et seulement si  $\alpha(\Omega) - \beta(\Omega) = 0$  et*

$$\gamma(\mathcal{P}) - 2\alpha(\mathcal{P}) > 0 \quad \text{et} \quad \gamma(\mathcal{P}) - 2\alpha(\mathcal{P}) > 0$$

*pour tout domaine polygonal  $\mathcal{P}$  inscrit dans  $\Omega$  différent de  $\Omega$ . De plus cette solution est unique à l'ajout d'une constante près.*

La construction des solutions suit les idées de la section précédente : on commence par résoudre des problèmes de Dirichlet sur des domaines compacts et on étudie ensuite la limite de ces solutions, les conditions géométriques sur les domaines polygonaux inscrits permettent d'empêcher l'apparition de lignes de divergence pour cette suite. En fait on peut interpréter ces conditions comme des conditions de flux sur le graphe de la solution. On remarque que dans le premier cas, l'unicité de la solution n'est pas assurée. En fait on peut construire un contre exemple à l'unicité.

**Proposition 3** ([MRR1]). *Il existe une fonction continue sur  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$  privé de deux points admettant plusieurs extensions à  $\mathbb{H}^2$  qui sont solutions de l'équation des surfaces minimales (1.6).*

### 2.3 Unicité pour les domaines non-compactes

Dans l'optique des constructions que nous allons présenter dans les chapitres suivants, la question de l'unicité pour les problèmes de Dirichlet est importante. Elle permet entre autre d'assurer que la solution dépend continûment des données du problème ou qu'elle possède les mêmes symétries que les données.

La Proposition 3 montre que l'on a pas toujours unicité pour le problème de Dirichlet sur les domaines non compacts. Dans le cas des domaines compacts, l'étude de l'unicité utilise principalement le principe du maximum satisfait par l'équation (1.5).

Considérons un domaine  $\Omega$  non borné dans une surface riemannienne  $M$  et  $u$  et  $v$  deux solutions différentes du même problème de Dirichlet pour (1.7) sur  $\Omega$ . Supposons pour simplifier que ces solutions sont régulières jusqu'au bord et  $u \leq v$  sur  $\Omega$ . On note  $\Omega_r$  l'intersection de  $\Omega$  avec un disque géodésique de rayon  $r$ . D'après (1.7), on a

$$\int_{\partial\Omega_r} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} - \frac{\nabla v}{\sqrt{1 + \|\nabla v\|^2}} \right) \cdot \vec{\nu} = 0 \quad (2.2)$$

où  $\vec{\nu}$  est la normale sortante de  $\Omega_r$ . Or d'après le principe du maximum sur le bord, le long de  $\partial\Omega$  l'intégrande est strictement positif. Donc pour que l'intégrale totale soit nulle il faut que l'intégrale le long de  $\partial\Omega_r \cap \Omega$  compense cette positivité.

Maintenant si on arrive à contrôler le comportement asymptotique des solutions  $u$  et  $v$ , on peut déterminer la limite de l'intégrale sur  $\partial\Omega_r \cap \Omega$  et éventuellement aboutir à une contradiction. L'équation (2.2) peut être interprétée comme une égalité des flux dans la direction  $\partial_t$  pour les graphes associés à  $u$  et  $v$ .

Un autre fait important concernant l'unicité est un résultat de Collin et Krust [17] qui affirme que  $\sup_{\Omega_r} |u - v|$  croît au moins logarithmiquement en  $r$  si la croissance de l'aire du domaine est essentiellement au plus quadratique (ce résultat a été démontré par Collin et Krust pour les domaines de  $\mathbb{R}^2$  mais peut être généralisé dans d'autre cas). Ce résultat a pour conséquence que, si  $|u - v|$  est uniformément borné sur  $\Omega$ , on a  $u = v$ . En s'appuyant sur ces idées nous avons pu étudier des questions d'unicité dans plusieurs cas.

### 2.3.1 Unicité pour les l'équations des surfaces à courbure moyenne constante sur une bande de $\mathbb{R}^2$

On connaît peu de réponses à la question de l'existence de solutions de (1.7) sur des domaines non bornés de  $\mathbb{R}^2$ . Les deux principaux résultats concernent le problème de Dirichlet sur la bande et sont dus à Collin [15] et López [46]. Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , ils cherchent à résoudre le problème de Dirichlet sur  $\mathbb{R} \times ]0, a[$  pour (1.7) avec pour donnée sur le bord  $g(x, 0) = f(x)$  et  $g(x, a) = f(x)$ . Collin montre que, pour la largeur critique  $a = 1/H_0$ , le problème peut être résolu si  $f$  est concave. Pour  $a < 1/H_0$ , López montre que le problème admet une solution si  $f$  vérifie une condition dépendant de  $a$  qui généralise la concavité.

Pour étudier l'unicité de ces solutions on peut dans un premier temps utiliser le résultat de Collin et Krust. Pour cela on essaye d'obtenir des estimés sur l'écart entre deux solutions du problème de Dirichlet sur la bande. Cette approche permet d'obtenir un premier résultat.

**Théorème 4** ([Ma1]). *Soit  $u$  et  $v$  deux solutions de (1.7) sur  $\mathbb{R} \times ]0, a[$  s'étendant continûment au bord en une même fonction  $g$ . Si la fonction  $g$  est Lipschitz alors  $u = v$ .*

L'hypothèse Lipschitz permet d'obtenir un contrôle uniforme de l'oscillation de  $g$  sur des intervalles de longueur  $4/H_0$  ce qui permet d'avoir une estimé uniforme de l'écart entre les deux solutions  $u - v$  et permet donc de conclure par le résultat de Collin et Krust.

Si la donnée au bord n'est pas Lipschitz comme cela peut être le cas pour les solutions construites par Collin et López, on cherche à contrôler le comportement asymptotique de la solution. Si  $u$  est une solution du problème de Dirichlet considéré par Collin ou López, on étudie le comportement de la suite  $v_n(x, y) = u(x + n, y)$ . En fait, la valeur au bord n'étant pas Lipschitz, sa dérivée prend des valeurs proche de  $\infty$ . Cela implique l'existence de lignes de divergence particulières pour la suite  $v_n$  et permet de déterminer la limite de  $\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$  à l'infini. Ainsi en suivant l'approche des flux expliquée dans la

section précédente, on obtient un résultat d'unicité pour les solutions construites par Collin et López.

**Proposition 5** ([Ma3]). *Soit  $u$  et  $v$  deux solutions du problème de Dirichlet considéré par Collin ou López ayant même valeur sur le bord de la bande, alors  $u = v$ .*

### 2.3.2 Le cas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

La fonction  $f$  continue sur  $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \setminus \{p, q\}$  qui sert de contre-exemple à l'unicité dans la Proposition 3 a pour particularité d'avoir de très grandes oscillations au voisinage de  $p$  et  $q$ . Ce sont ces oscillations qui permettent de construire plusieurs extensions minimales à  $f$ . En fait, si on interdit ces oscillations on obtient l'unicité des solutions du problème de Dirichlet dans le Théorème 2.

**Théorème 6** ([MRR1]). *Soit  $\Omega$  un domaine admissible de  $\mathbb{H}^2$  dont le bord contient au moins un arc  $C_i$  ou  $D_i$ . Soit  $f_i$  et  $g_i$  des fonctions continues définies sur les arcs  $C_i$  et  $D_i$ . Si les fonctions  $f_i$  et  $g_i$  admettent des limites finies aux extrémités des arcs  $C_i$  et  $D_i$ , alors on a unicité d'une éventuelle solution au problème  $\mathcal{D}$ .*

Nous citons ici une version simplifiée du résultat démontré dans [MRR1]. En fait on peut largement relaxer plusieurs hypothèses dans ce résultat : par exemple, on n'est pas obligé de supposer la convexité des arcs  $C_i$  pour obtenir l'unicité ; on demande alors juste d'avoir un peu de contrôle sur la géométrie du domaine au voisinage de l'extrémité de l'arc  $C_i$ .

La démonstration de ce résultat repose sur une combinaison de l'approche de Collin-Krust et de celle utilisant les flux. L'absence d'oscillations aux extrémités des arcs  $C_i$  et  $D_i$  permet de contrôler d'éventuelles solutions du problème de Dirichlet en utilisant des fonctions barrières adéquates.

### 2.3.3 L'équation des surfaces maximales

Dans  $\mathbb{R}^2$ , l'équation des surfaces minimales (1.6) dit que le champ de vecteur  $\frac{J(\nabla u)}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$  est localement le gradient d'une fonction  $v$  ( $J$  désigne ici la rotation d'angle  $\pi/2$  de  $\mathbb{R}^2$ ). Cette fonction  $v$  vérifie aussi une équation au dérivée partielle, appelée équation des surfaces maximales :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla v}{\sqrt{1 - \|\nabla v\|^2}} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Le graphe de  $v$  est une surface dans  $\mathbb{R}^3$  qui a aussi courbure moyenne nulle si on munit  $\mathbb{R}^3$  de la métrique lorentzienne  $dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$ . Dans cet espace de Lorentz  $\mathbb{L}^3$ , les surfaces de type espace ayant courbure moyenne nulle sont appelées surfaces maximales car elle maximise localement l'aire. On vient donc de décrire une correspondance locale entre les surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$  transverses à  $\partial_{x_3}$  et les surfaces maximales de  $\mathbb{L}^3$ . Cette correspondance est intéressante car il est parfois plus simple de formuler et de résoudre le problème de Dirichlet associé à (2.3) que celui associé à (1.6).

Notons que les solutions de (2.3) étant lipschitziennes, elles s'étendent continûment au bord d'un domaine régulier. Le problème de Dirichlet associé à (2.3) a été étudié par Bartnick et Simon [5] et Klyachin et Miklyukov [40]. On peut remarquer que les conditions de type Dirichlet pour l'équation des surfaces maximales correspondent à des données de type Neumann pour l'équation des surfaces minimales. Dans le cas des domaines compacts, on dispose de conditions nécessaires et suffisantes similaires à celles de Jenkins et Serrin permettant d'assurer l'existence de solutions. L'unicité découle alors du principe du maximum satisfait par l'équation (2.3).

Dans le cas des domaines non compacts, l'existence peut être étudiée par des suites de solutions de (2.3) définies sur des domaines de plus en plus grands. Pour l'unicité, nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 7** ([Ma4]). *Soit  $\Omega$  un domaine non-borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  une fonction continue bornée définie le long du bord de  $\Omega$ . Soit  $v$  et  $v'$  deux solutions bornées de (2.3) sur  $\Omega$  telles que  $v|_{\partial\Omega} = f = v'|_{\partial\Omega}$ . Alors  $v = v'$ .*

La démonstration de ce résultat suit l'approche de Collin et Krust mais elle nécessite de connaître une borne *a priori* sur la norme du gradient d'une solution du problème de Dirichlet : c'est-à-dire savoir que  $\|\nabla v\| \leq 1 - \varepsilon$ . Cette estimé est obtenue en étudiant un équivalent des lignes de divergence dans ce contexte.



## Chapitre 3

# Surfaces à courbure moyenne constante dans les espaces quotients

La théorie des surfaces à courbure moyenne constante se développe actuellement dans des espaces ambients  $M$  homogènes. Dans un premier temps l'intérêt se porte principalement sur le cas où l'espace  $M$  est simplement connexe. Parmi les surfaces qui existent dans ces espaces, certaines sont invariantes par un sous-groupe discret d'isométries. Ces surfaces peuvent donc être vues comme des surfaces à courbure moyenne constante vivant dans le quotient de  $M$  par un sous-groupe d'isométries.

Prenons le cas d'un réseau de  $\mathbb{R}^2$ , le quotient de  $\mathbb{R}^3$  par ce réseau donne comme espace ambiant  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  où  $\mathbb{T}^2$  est un tore plat. Dans [54], Meeks et Rosenberg ont étudié les surfaces minimales plongées dans  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ . Un exemple basique de telle surface est donnée par la surface de Scherk doublement périodique (voir Figure 3.1), son quotient par son groupe d'invariance donne une surface dans  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  qui est topologiquement une sphère privée de quatre points. Un autre exemple est la « selle de Karcher » dont le quotient dans  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  est un tore privé de quatre points (voir Figure 3.1). Cette surface a été introduite par Karcher dans [38] sous le nom de « toroidal halfplane layer ». L'étude de Meeks et Rosenberg porte sur une classification des surfaces minimales plongées de topologie finie dans  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  et sur la construction de nouveaux exemples illustrant leurs résultats.

Dans l'espace quotient  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ , on peut citer le résultat de Pérez et Traizet [64] qui donne une classification des surfaces minimales plongées dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  de genre 0 et ayant un nombre fini de bout de type Scherk.

Dans ce chapitre nous présentons plusieurs résultats portant sur la construction d'exemples de surfaces minimales plongées dans des quotients de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Nous donnons aussi un résultat de type Alexandrov dans un quotient de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Ces constructions utilisent les résultats d'existence et d'unicité présentés dans le chapitre précédent. Elles utilisent aussi les techniques dites de « conjugaison » introduites par Karcher.

Les résultats présentés sont publiés dans les articles [MRT, MT, Ma5, Ma7, MRR2].

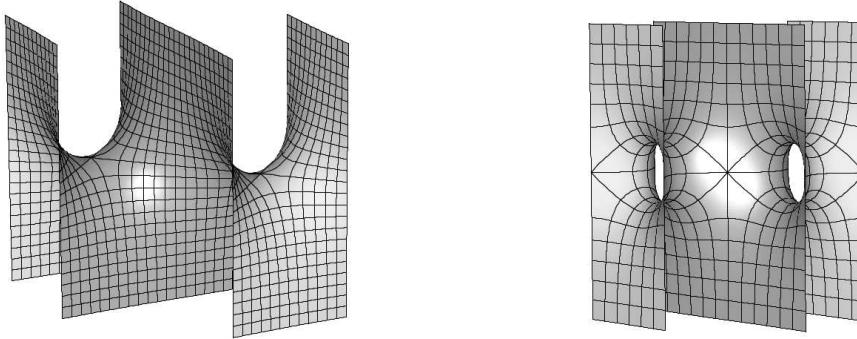


FIGURE 3.1 – la surface de Scherk et la selle de Karcher (images tirées du virtual math museum)

### 3.1 Technique de conjugaison

Une surface minimale de  $\mathbb{R}^3$  peut être vue comme une immersion conforme harmonique  $X = (x_1, x_2, x_3) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'une surface de Riemann dans  $\mathbb{R}^3$ . Les fonctions coordonnées  $x_i$  sont harmoniques, on peut donc leur associer leurs fonctions harmoniques conjuguées  $x_i^*$ . On définit ainsi une nouvelle application  $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sur le revêtement universel de  $\Sigma$ .  $X^*(\tilde{\Sigma})$  est alors une surface minimale de  $\mathbb{R}^3$  qui est localement isométrique à la surface  $X(\Sigma)$  mais qui n'est pas en général congruante à celle-ci. A titre d'exemple, la surface conjuguée du caténoïde est l'hélicoïde.

Ainsi le problème de construction d'une surface minimale peut se ramener à la construction de sa surface minimale conjuguée. Cette approche a été développée par Karcher dans [38].

Cette technique pose toutefois deux problèmes. Le premier est que l'on souhaite construire des surfaces plongées. Or la conjuguée d'une surface plongée n'est pas nécessairement plongée. Pour résoudre cette difficulté, on utilise le plus souvent le résultat de Krust qui affirme que si  $X(\Sigma)$  est un graphe au dessus d'un domaine convexe alors  $X^*(\Sigma)$  est aussi un graphe donc plongée (voir [24]).

La deuxième difficulté tient au fait que *a priori*  $X^*$  est définie sur le revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  et non  $\Sigma$ . Le groupe fondamental de  $\Sigma$  agit alors sur  $X^*(\tilde{\Sigma})$  par des translations de  $\mathbb{R}^3$  appelées périodes. Pour montrer que  $X^*$  est définie sur  $\Sigma$ , il faut pouvoir annuler ces périodes. L'idée est donc de faire une construction dépendant de certains paramètres que l'on ajuste *a posteriori* afin d'assurer l'annulation de certaines périodes.

La correspondance isométrique  $X(\Sigma) \leftrightarrow X^*(\tilde{\Sigma})$  a été étendue aux surfaces minimales de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  par Hauswirth, Sa Earp et Toubiana [30] qui démontrent un équivalent du théorème de Krust dans ce cadre puis aux surfaces à courbure moyenne constante dans les espaces homogènes  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  par Daniel [19] généralisant ainsi les travaux de

Lawson [44].

### 3.2 Surfaces minimales dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

Parmi les surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$ , les surfaces minimales à courbure totale finie sont très bien comprises. De plus on ne connaît que très peu d'exemples de courbure totale infinie. Plus précisément, si on considère l'hélicoïde, c'est une surface à courbure totale infinie sauf que cette surface admet des quotients qui sont eux de courbure totale finie.

L'hélicoïde de genre 1 construit par Hoffman, Karcher et Wei [39] and Hoffman, Weber et Wolf [81] est un exemple de surface minimale de courbure totale infinie qui ne possède aucun quotient de courbure totale finie et c'est le premier exemple d'une telle surface. Au moment où les résultats des sections suivantes sont parus, il s'agissait du seul exemple connu. Depuis d'autres exemples ont été construits sur le modèle de l'exemple de Riemann par Hauswirth et Pacard [27] et Morabito et Traizet [58].

Dans les deux sections qui suivent, nous présentons deux résultats d'existence de surface minimales proprement plongées dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  qui ont courbure totale infinie et n'ont aucun quotient de courbure totale finie.

#### 3.2.1 Surfaces minimales de genre 0 avec une infinité de bouts

Dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ , le résultat de Pérez et Traizet [64] dit que toute surface minimale plongée de genre 0 et ayant un nombre fini de bouts de type Scherk est une « saddle tower » de Karcher [38] (voir Figure 3.2).

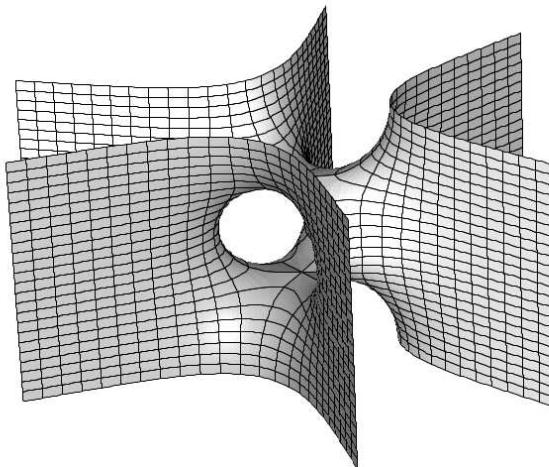


FIGURE 3.2 – Un domaine fondamental d'une saddle tower ayant 6 bouts de type Scherk, les bords de la surface sont identifiés par une translation verticale (image tirée du virtual math museum)

Ces saddle towers sont toutes construites de la façon suivante. On considère un domaine convexe polygonal de  $\mathbb{R}^2$  dont le bord est constitué de  $2n$  arêtes de longueur 1. On peut alors résoudre un problème de Dirichlet de type Jenkins-Serrin où l'on assigne sur le bord les valeurs  $+\infty$  et  $-\infty$  alternativement sur chaque arête. Le graphe minimal ainsi construit a pour surface minimale conjuguée un domaine fondamental de la saddle tower ; plus précisément la moitié d'un domaine fondamental. Alors par des symétries successives le long du bord de la surface conjuguée, on obtient une surface simplement périodique de  $\mathbb{R}^3$  qui est plongée dans le quotient  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ , a  $n$  bouts de type Scherk et est de genre 0.

Avec Rodríguez et Traizet, nous avons repris cette construction afin de construire une surface minimale plongée dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  ayant une infinité de bouts et qui est ainsi de courbure totale infinie.

**Théorème 8.** *[MRT] Il existe une surface minimale proprement plongée dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  de genre 0, ayant une infinité de bouts de type Scherk et un bout limite.*

En fait, la construction donne toute une famille de telles surfaces qui est indexée par un ensemble de domaines convexes de  $\mathbb{R}^2$ .

Plus précisément, considérons un domaine convexe non compact de  $\mathbb{R}^2$  dont le bord polygonal a une seule composante connexe et est composé d'une infinité d'arêtes de longueur 1. On montre alors que l'on peut aussi résoudre le problème de Dirichlet alternant les valeurs  $+\infty$  et  $-\infty$  sur le bord. La surface minimale conjuguée du graphe ainsi obtenu est alors la moitié du domaine fondamental de la surface annoncée dans le Théorème 8, la surface est alors complétée par symétries le long du bord.

### 3.2.2 Surfaces minimales quasi-périodiques

Les surfaces construites à la section précédente peuvent être comprises comme des saddle towers de Karcher auxquelles on aurait ajouté une infinité de bouts. Une autre approche pour construire de nouvelles surfaces minimales est de rajouter des anses à des surfaces déjà existantes.

Si on considère la selle de Karcher (voir Figure 3.3) qui est une surface doublement périodique. Il existe plusieurs façons de lui rajouter des anses. Par exemple, Wei [82] a construit une surface minimale en ajoutant une anse à chaque domaine fondamental de la surface (voir Figure 3.3). La surface ainsi obtenue reste doublement périodique, elle possède donc toujours des quotients qui sont de courbure totale finie. On souhaite donc briser cette double périodicité, il faut pour cela pouvoir ajouter ces anses de façon apériodique.

Outre le fait de construire un exemple de courbure totale infinie de genre quelconque, même infini, les surfaces que nous allons décrire donnent le premier exemple de surfaces minimales quasipériodiques qui ne soit pas périodique.

Lors de l'étude du comportement asymptotique d'une surface minimale  $\Sigma$ , on considère souvent une suite de translations  $(t_n)$  et on s'intéresse à l'éventuelle limite de la suite de surfaces  $t_n(\Sigma)$ . Parmi les comportements possibles, Meeks, Pérez et Ros [53] introduisent la notion de quasipériodicité pour une surface minimale : une surface minimale  $\Sigma$  est dite

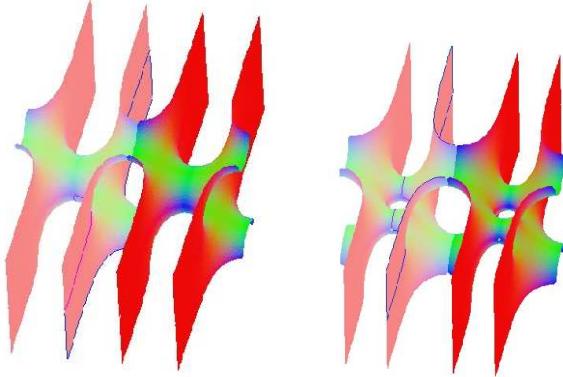


FIGURE 3.3 – La selle de Karcher et la surface de Wei, les bords de chaque surface sont identifiés par une translation verticale

quasipériodique si il existe une suite de translations  $(t_n)$  divergente telle que  $t_n(\Sigma) \rightarrow \Sigma$ . Toutefois Meeks, Pérez et Ros ne connaissent aucun exemple de telles surfaces hormis les surfaces minimales périodiques.

Avec M. Traizet, nous avons pu construire en ajoutant des anses à la selle de Karcher une surface minimale de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  quasipériodique qui n'est pas périodique. Dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ , la selle de Karcher comme la surface de Wei peuvent être vues comme une succession de domaines fondamentaux (voir Figure 3.3). L'idée a été de « remplacer », dans cette succession, des domaines fondamentaux de la surface de Karcher par des domaines fondamentaux de la surface de Wei. Plus précisément, si on indexe les domaines fondamentaux de la surface de Karcher par  $\mathbb{Z}$  et que l'on se donne une partie  $P$  de  $\mathbb{Z}$  finie ou infinie, on peut alors construire une surface minimale qui peut être comprise comme étant la surface de Karcher à laquelle on remplace chaque domaine fondamental indexé par  $P$  par un domaine fondamental de la surface de Wei. On construit ainsi une surface dont le genre est le cardinal de  $P$  et si  $P$  est quasipériodique la surface minimale ainsi obtenue est quasipériodique. Une partie  $P$  de  $\mathbb{Z}$  est dite quasipériodique si une sous-suite de  $T^n(P)$  converge vers  $P$  au sens de la convergence sur tous compacts où  $T : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n - 1$ .

**Théorème 9** ([MT, Ma5, Ma7]). *Pour tout  $g \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  il existe une surface minimale proprement plongée dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  de genre  $g$ , ayant une infinité de bouts de type Scherk et deux bouts limites.*

*De plus en genre infini, il existe une telle surface minimale qui soit quasipériodique et non périodique.*

La construction de ces surfaces utilise la technique de conjugaison. En fait la surface de Karcher comme la surface de Wei peuvent être construites comme des surfaces minimales conjuguées à des graphes de type Jenkins-Serrin. Du coup les échanges de domaines fondamentaux peuvent être fait au niveau de ces graphes de Jenkins-Serrin.

Pour construire cette surface, on résout donc un problème de type Jenkins-Serrin sur une bande privée d'un certain nombre de points. Ces solutions de (1.6) sont en fait construites en résolvant le problème dual pour l'équation des surfaces maximales (2.3).

L'emplacement des points que l'on retire de la bande est prescrit avec une certaine latitude par l'ensemble  $P$ . La surface annoncée par le théorème est alors construite comme conjugée du graphe minimal de Jenkins-Serrin. La difficulté est que lors de l'opération de conjugaison il apparaît des problèmes de périodes liés au genre de la surface. En fait en utilisant le Théorème d'unicité 7, on montre que les périodes dépendent continûment de la position des singularités. Ainsi en utilisant un argument de type Brouwer, on peut fixer la position des singularités du domaine afin d'annuler les périodes. Il est à noter que l'on ne contrôle pas l'unicité de ce choix, donc, pour une partie  $P$  donnée, on peut *a priori* construire plusieurs surfaces minimales.

Lorsque  $P$  est quasipériodique, on ne peut pas directement affirmer que la surface que l'on a construite est quasipériodique car on n'a pas unicité de la surface associée à  $P$ . Toutefois on peut sélectionner parmi toutes ces surfaces minimales associées à  $P$  une surface qui est quasipériodique. Ce choix est assuré par un argument utilisant le lemme de Zorn.

### 3.3 Surfaces périodiques dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Pour l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on a essentiellement trois quotients possibles :  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{T}^3$ . Pour  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , on a une plus grande diversité de quotients.

Dans la suite on va s'intéresser particulièrement à un quotient de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui est difféomorphe à  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  et dans la dernière partie on s'intéressera à un exemple de surface minimale invariante par un groupe de pavage de  $\mathbb{H}^2$ . Il s'agit d'un travail en commun avec M. M. Rodríguez et H. Rosenberg [MRR2].

Fixons  $\gamma_0$  une géodésique de  $\mathbb{H}^2$  et notons  $T_1$  une translation le long de cette géodésique. On note  $T_2$  une translation verticale dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $G$  le sous-groupe d'isométries de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  engendré par  $T_1$  et  $T_2$ . La variété  $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}/G$  est alors difféomorphe mais non isométrique à  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ .  $M$  est feuilleté par des tores plats  $T(s)$  où  $T(0) = \gamma_0 \times \mathbb{R}/G$  et  $T(s) \cup T(-s)$  est la surface équidistante à  $T(0)$  à distance  $|s|$ .  $T(0)$  est totalement géodésique et les tores  $T(s)$  ont courbure moyenne constante.

De plus, on note  $Z$  le champ de vecteur unitaire normal à ce feuilletage.

#### 3.3.1 Le problème d'Alexandrov dans $M$

Le problème d'Alexandrov consiste à déterminer les surfaces compactes à courbure moyenne constante qui sont plongées dans un espace ambient donné. Dans  $M$ , les tores  $T(s)$  sont de telles surfaces cmc compactes plongées.

Par ailleurs, pour des courbures moyennes grandes, les sphères cmc de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  peuvent vivre dans  $M$ . En outre, les surfaces de Delaunay de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  étant verticalement périodiques, elles peuvent donner des surfaces cmc compactes plongées dans  $M$  lorsque la période verticale correspond à  $T_2$ . En fait, on a la classification suivante des surfaces cmc compactes plongées dans  $M$ .

**Théorème 10** ([MRR2]). *Soit  $\Sigma \subset M$  une surface compacte plongée dans  $M$  à courbure moyenne constante.  $\Sigma$  est alors :*

- soit un tore  $T(s)$ ,
- soit une sphère de rotation,
- soit le quotient d'une surface de Delaunay,
- soit un  $Z$  bigraphe par rapport à  $T(0)$ .

*Si  $\Sigma$  est minimal,  $\Sigma = T(0)$ .*

Un  $Z$  bigraphe est une surface qui est symétrique par rapport à  $T(0)$  et telle que chaque moitié est un  $Z$  graphe, c'est-à-dire une surface qui rencontre chaque courbe intégrale du champ de vecteur  $Z$  en au plus un point.

De tels  $Z$  bigraphes existent, par exemple si on considère une géodésique fermée  $\gamma$  de  $T(0)$  qui n'est pas verticale un résultat de Mazzeo et Pacard [49] permet de feuilleter partiellement le voisinage tubulaire de  $\gamma$  par des tubes à courbure moyenne constante. La géodésique  $\gamma$  n'étant pas verticale ces tubes appartiennent nécessairement à la quatrième catégorie. Ceci donne des exemples pour des courbures moyenne grande.

Pour des courbure moyenne proche de 0, on peut aussi construire des exemples de la quatrième catégorie : l'idée est de recoller  $T(s)$  avec  $T(-s)$  par l'intermédiaire de petits coussins caténoïdaux (voir le travail de Pacard et Sun [63]).

On peut remarquer que l'on ne connaît pas d'exemple de surface compacte plongée dans  $M$  à courbure moyenne constante 1/2.

### 3.3.2 Surfaces minimales de $M$

D'après le Théorème 10, l'étude des surfaces minimales plongées de  $M$  doit s'intéresser aux cas des surfaces non compactes.

On a deux exemples basiques : le quotients de  $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$  qui donne un cylindre horizontal et le quotient de  $\gamma \times \mathbb{R}$  où  $\gamma$  est une géodésique de  $\mathbb{H}^2$  orthogonale à la géodésique de référence  $\gamma_0$  qui donne un cylindre verticale.

Dans notre travail en commun avec M. M. Rodríguez et H. Rosenberg, nous avons construit plusieurs exemples de surfaces minimales plongées dans  $M$  de topologie finie et dont les bouts sont asymptotes aux deux exemples ci-dessus.

Sans rentrer dans le détail, nous avons construit des exemples qui sont similaires à certaines surfaces doublement périodiques de  $\mathbb{R}^3$ . Nous avons ainsi construit un équivalent de la surface de Scherk c'est-à-dire une surface doublement périodique dont le quotient est topologiquement une sphère privée de 4 points et dont deux bouts sont asymptotes à des anneaux verticaux et deux le sont à des anneaux horizontaux. De plus, la moitié du domaine fondamental est un  $Z$  graphe au dessus d'un rectangle de  $T(0)$ .

Nous avons aussi obtenu un équivalent de la selle de Karcher : une surface doublement périodique dont le quotient est un tore privé de 4 points dont les bouts sont asymptotes à des anneaux verticaux.

Pour construire ces surfaces, nous avons principalement résolu des problèmes de Plateau associés à des contours polygonaux et utilisé la conjugaison des surfaces minimales définie par Hauswirth, Sa Earp et Toubiana [30]. On obtient ainsi des surfaces minimales

qui peuvent être étendues par symétrie le long de leurs bords en des surfaces minimales invariantes par  $G$ .

### 3.3.3 Surfaces minimales invariantes par un groupe de pavage

Dans cette section nous présentons des constructions de surfaces minimales de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui sont invariantes par un groupe de pavage de  $\mathbb{H}^2$ . A nouveau nous nous inspirons de la surface de Scherk et de la selle de Karcher. Les détails de ces constructions sont donnés dans [MRR2].

Soit  $P$  un polygone régulier de  $\mathbb{H}^2$  à  $2n$  côtés ( $n \geq 3$ ) tel que l'angle au sommet est  $\pi/2$ . Sur ce polygone  $P$  on peut résoudre l'équation des surfaces minimales (1.6) avec pour données au bord  $+\infty$  et  $-\infty$  de façon alternée sur chaque arête. Le graphe de cette solution est alors une surface minimale de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui est bordée par  $2n$  géodésiques verticales au dessus des sommets de  $P$ . En étendant cette surface par symétrie le long de son bord, on obtient une surface minimale de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui est invariante par un groupe de pavage de  $\mathbb{H}^2$ . Cette surface est l'équivalent de la surface doublement périodique de Scherk.

Pour présenter la construction d'un équivalent de la selle de Karcher dans ce contexte, nous devons préciser quelques définitions. On dira qu'un polygone  $P$  de  $\mathbb{H}^2$  à  $2n$  côtés est semi-régulier si la longueur de ses arêtes est alternativement  $l_1$  et  $l_2$  et les angles aux sommets sont tous les mêmes. Soit  $P$  est un polygone semi-régulier à  $2n$  côtés dont l'angle aux sommets est  $\pi/2$ . On remarque qu'un tel polygone est le pavé fondamental d'un pavage de  $\mathbb{H}^2$ . Notons  $a_k$  les arêtes de  $P$ . Les surfaces  $a_{2p} \times \mathbb{R}$  sont alors  $n$  bandes minimales verticales. On montre alors que l'on peut construire une surface qui se comprend comme un recollement de ces  $n$  bandes verticales en une surfaces minimales qui est topologiquement un sphère privée de  $n$  points et dont le bord est constitué des  $2n$  géodésiques verticales passant par les sommets de  $P$ . En prolongeant cette surface par symétrie le long de son bord on obtient une surface invariante par un groupe de pavage de  $\mathbb{H}^2$  qui est l'équivalent de la selle de Karcher de  $\mathbb{R}^3$ .

Cette construction utilise à nouveau la résolution d'un problème de Plateau et le passage à la surface conjuguée. La différence vient du fait que l'on a un problème de période à contrôler : l'angle aux sommets de  $P$ . C'est un argument de continuité en fonction des paramètres qui permet de résoudre le problème. De plus, le caractère plongé de cette surface ne peut pas être obtenu directement en utilisant un résultat de type Krust ; on utilise donc une description plus précise de la surface pour vérifier cette propriété.

## Chapitre 4

# Le problème du demi-espace

Dans ce chapitre, nous présentons un résultat de demi-espace pour les surfaces à courbure moyenne constante. Nous donnons aussi une estimé de longueur pour les surfaces à courbure moyenne constante stables.

Ces résultats sont publiés dans [Ma6, Ma8].

### 4.1 Le problème du demi-espace

Dans [31], Hoffman et Meeks montrent qu'une surface minimale  $\Sigma$  proprement immergée dans  $\mathbb{R}^3$  qui n'intersecte pas un plan  $P$  est nécessairement un plan parallèle à  $P$ . Autrement dit une telle surface  $\Sigma$  ne peut pas rester dans un demi-espace délimité par un plan. Notons ici que l'hypothèse « proprement immergée dans  $\mathbb{R}^3$  » est fondamentale comme le montre les exemples construits par Jorge et Xavier [37] et Rosenberg et Toubiana [73]. Par ailleurs, ce résultat est spécifique aux surfaces : dans  $\mathbb{R}^4$ , les caténoïdes sont compris entre deux hyperplans.

Hoffman et Meeks obtiennent même un résultat plus général : si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux surfaces minimales proprement immergées dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  alors  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux plans parallèles.

L'idée de la preuve du premier résultat est d'étudier la fonction distance d'un point de  $\Sigma$  au plan  $P$ . Si cette fonction admet un minimum en un point de  $\Sigma$ , le principe du maximum pour les surfaces minimales implique que  $\Sigma$  est un plan parallèle à  $P$ . Maintenant en utilisant les caténoïdes comme barrière, Hoffman et Meeks montrent que l'infimum de la fonction distance ne peut pas être atteint à l'infini de la surface  $\Sigma$ . On peut donc interpréter ce résultat comme un principe de maximum à l'infini pour les surfaces minimales.

D'une manière générale, si  $M$  est une variété riemannienne de dimension 3 et  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux surfaces proprement immergées dans  $M$  avec la même courbure moyenne constante, on peut se demander si le fait que  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  implique des contraintes sur  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

En fait, le résultat de Hoffman et Meeks a été généralisé par plusieurs auteurs dans différents espaces. A titre d'exemple, Rodriguez et Rosenberg [69] ont montré qu'une

surface à courbure moyenne constante 1 proprement immergée dans  $\mathbb{H}^3$  qui est incluse dans une horoboule est une horosphère. Autrement dit, une surface cmc 1 du côté « mean convex » d'une horosphère est une horosphère équidistante.

Dans la plupart de ces généralisations, on montre que si  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  alors  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont équidistantes. Les démonstrations utilisent en général l'approche de Hoffman et Meeks en remplaçant les caténoïdes par une famille de surfaces adéquates afin de contrôler le comportement asymptotique des surfaces.

Le résultat que nous présentons dans ce chapitre donne un contexte général où un théorème de type demi-espace est vrai. Ce résultat englobe la quasi totalité des résultats connus actuellement et permet l'étude de nouveaux cas.

## 4.2 Le théorème du demi-espace

Considérons une variété riemannienne  $M$  de dimension 3 et  $\Sigma_0$  une surface proprement plongée dans  $M$  de courbure moyenne constante  $H_0$ . On se demande si on a un résultat de demi-espace par rapport à cette surface  $\Sigma_0$  : a-t-on des contraintes sur l'existence d'une surface  $\Sigma$  proprement immergée dans  $M$  de courbure moyenne constante  $H_0$  qui ne rencontre pas  $\Sigma_0$  ?

Dans un cas très général, on ne peut rien dire. En effet, si  $M$  n'est pas homogène, la géométrie des surfaces cmc de  $M$  peut être très différentes suivants la partie de  $M$  où l'on se trouve. Pour cette raison, on va se restreindre à l'étude de l'existence d'une telle surface  $\Sigma$  dans un voisinage tubulaire de  $\Sigma_0$ . Plus précisément, on dira que  $\Sigma_0$  admet un voisinage tubulaire régulier si il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $F : \Sigma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M, (p, t) \mapsto \exp_p(tN(p))$  est une immersion où  $N$  est le vecteur unitaire normal sur  $\Sigma_0$  et si de plus  $F$  vérifie certaines hypothèses techniques que nous ne préciserons pas ici. L'existence d'un tel voisinage tubulaire peut être assurée par des hypothèses sur la géométrie de  $M$  et la courbure de  $\Sigma_0$ .

Ainsi l'étude d'une surface proprement immergée dans le voisinage tubulaire de  $\Sigma_0$  revient à l'étude d'une surface proprement immergée dans  $\Sigma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  muni de sa métrique induite. A partir de maintenant on travaillera essentiellement dans ce voisinage tubulaire.

On note alors  $\Sigma_t = \Sigma_0 \times \{t\}$  les équidistantes de  $\Sigma_0$ . Dans la définition de  $F$ , le choix de  $N$  est fait en sorte que le vecteur de courbure moyenne de  $\Sigma_0$  soit  $-H_0N$ . Ainsi, dans  $\Sigma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ , on calculera la courbure moyenne de  $\Sigma_t$  par rapport au vecteur unitaire normal  $-\partial_t$ , on notera  $H_t(p)$  cette courbure moyenne au point  $(p, t)$ . On remarque que  $\Sigma_0 \times [-\varepsilon, 0]$  correspond au côté mean convex de  $\Sigma_0$ .

On dira alors que  $\Sigma_0 \times [0, \varepsilon]$  vérifie l'hypothèse  $H \leq H_0$  si  $H_t(p) \leq H_0$  pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$  et  $p \in \Sigma_0$ . De même  $\Sigma_0 \times [-\varepsilon, 0]$  vérifie l'hypothèse  $H \geq H_0$  si  $H_t(p) \geq H_0$  pour tout  $t \in [-\varepsilon, 0]$  et  $p \in \Sigma_0$ .

Si  $\Sigma_0$  est une sphère de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^3$ , la courbure moyenne des équidistantes à  $\Sigma_0$  du côté mean convex est plus grande que 1, à l'extérieur de la sphère la courbure moyenne des équidistantes est plus petite que 1. Les deux hypothèses sur l'évolution de la courbure moyenne des équidistantes correspondent donc à la situation des sphères de  $\mathbb{R}^3$ . Nous avons alors obtenu le résultat suivant.

**Théorème 11** ([Ma8]). *Soit  $\Sigma_0$  une surface proprement plongée dans  $M$  avec courbure moyenne constante  $H_0$  admettant un voisinage tubulaire régulier  $\Sigma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ . Soit  $\Sigma$  une surface proprement immergée dans le voisinage tubulaire  $\Sigma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  ayant courbure moyenne  $H_0$  et avec éventuellement du bord dans  $\Sigma_\varepsilon$  ou  $\Sigma_{-\varepsilon}$ . On suppose que  $\Sigma$  ne rencontre pas  $\Sigma_0$ .*

*On suppose que  $\Sigma_0$  est parabolique.*

- *Si  $\Sigma \subset \Sigma_0 \times ]0, \varepsilon]$ ,  $\Sigma$  est bien orientée par rapport à  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_0 \times [0, \varepsilon]$  vérifie l'hypothèse  $H \leq H_0$ , alors  $\Sigma = \Sigma_t$  pour un certain  $t \in ]0, \varepsilon]$ .*
- *Si  $\Sigma \subset \Sigma_0 \times [-\varepsilon, 0[$  et  $\Sigma_0 \times [-\varepsilon, 0]$  vérifie l'hypothèse  $H \geq H_0$ , alors  $\Sigma = \Sigma_t$  pour un certain  $t \in [-\varepsilon, 0[$ .*

Rappelons que  $\Sigma_0$  parabolique signifie que toute fonction surharmonique bornée sur  $\Sigma_0$  est constante. Par ailleurs, l'hypothèse « bien orientée » du premier item signifie que le vecteur de courbure moyenne de  $\Sigma$  pointe vers  $\Sigma_0$ .

On constate que les deux hypothèses importantes du théorème sont donc la parabolicité de la surface de référence  $\Sigma_0$  et l'évolution de la courbure moyenne des surfaces équidistantes. Il est à noter que si l'on retire l'une ou l'autre de ces hypothèses on peut construire des contre-exemples au résultat. Par ailleurs, il existe actuellement un seul résultat de type demi-espace par rapport à des surfaces de type conforme hyperbolique. Il s'agit d'un résultat dû à Daniel, Meeks et Rosenberg [22] concernant des surfaces minimales dans  $\text{Nil}_3$  qui sont des graphes entiers par rapport à la fibration riemannienne de l'espace de Heisenberg.

Regardons maintenant un cas où ce théorème peut être appliqué. Parmi les espaces homogènes, certains ont une structure de groupe de Lie métrique : un groupe de Lie muni d'une métrique invariante à gauche. Dans le cas simplement connexe et de la dimension 3, ces groupes de Lie métriques ont été classifiés par Milnor [57]. Une façon de construire de tels groupes de Lie métriques est la suivante. Considérons  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice et définissons le groupe de Lie  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  qui est  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  muni de la loi :

$$(p, z) * (p', z') = (p + e^{zA}p', z + z')$$

En munissant  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  de la métrique invariante à gauche rendant  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  orthonormée à l'origine, on définit un groupe de Lie métrique.  $F = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  est alors un sous groupe distingué plat qui a pour courbure moyenne  $\text{tr } A/2$  par rapport à  $\partial_z$  et dont les équidistantes sont les  $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$  qui ont même courbure moyenne constante.  $F$  étant plat,  $F$  est une surface parabolique. Notons que les groupes de Lie métriques ci-dessus sont les seuls à être simplement connexes et à posséder un sous-groupe de dimension 2 distingué et parabolique. Le Théorème 11 s'applique alors pour donner le résultat suivant.

**Proposition 12** ([Ma8]). *Soit  $S$  une surface proprement immergée dans  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  de courbure moyenne constante  $\text{tr } A/2$  sans bord.*

- *Si  $S$  est incluse dans le côté mean convex de  $\{z = t_0\}$  alors  $S$  est égale à un  $\{z = t_1\}$ .*
- *Si  $S$  est incluse dans le côté non mean convex de  $\{z = t_0\}$  et est bien orientée par rapport à  $\{z = t_0\}$  alors  $S$  est égale à un  $\{z = t_1\}$ .*

Lorsque  $A = 0$ , on retrouve ainsi le résultat de Hoffman et Meeks et pour  $A = I_2$ ,  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  est isométrique à  $\mathbb{H}^3$  et on obtient le résultat de Rodríguez et Rosenberg par rapport aux horosphères. En utilisant d'autres valeurs pour la matrice  $A$ , on retrouve d'autres résultats. Pour  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on obtient le résultat de Daniel et Hauswirth concernant les plans verticaux dans  $\text{Nil}_3$  [21]. Avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , on retrouve le résultat de Daniel, Meeks et Rosenberg dans  $\text{Sol}_3$  [22] par rapport à des plans verticaux. Enfin avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on obtient le théorème de Hauswirth, Rosenberg et Spruck dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  [28] par rapport aux horocylindres. En utilisant des valeurs différentes pour  $A$  on montre de nouveaux résultats. Par exemple, si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , l'espace homogène  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  est alors isométrique (mais non isomorphe) à  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{E}(-1, 1/2)$ , la Proposition 12 donne alors un résultat de demi-espace par rapport à des « horocylindres » dans  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ .

### 4.3 Quelques éléments de démonstration

Dans cette section nous allons donner quelques explications sur la preuve du Théorème 11. Pour cela, commençons par rappeler un résultat de demi-espace dû à Ros et Rosenberg.

**Théorème 13** (Ros et Rosenberg [70]). *Soit  $\Sigma$  une surface à courbure moyenne constante  $H_0$  non nulle proprement plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors il n'existe pas de surface à courbure moyenne constante  $H_0$  proprement plongée dans  $\mathbb{R}^3$  qui soit incluse dans le côté mean convex de  $\Sigma$ .*

La preuve de ce résultat suit l'idée suivante. Soit  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux surfaces à courbure moyenne constante  $H_0 > 0$  dans  $\mathbb{R}^3$  avec  $\Sigma_2$  incluse dans le côté mean convex de  $\Sigma_1$ . On considère  $\gamma$  une courbe fermée incluse dans  $\Sigma_1$  alors par un procédé de minimisation d'aire on peut construire une surface  $S$  à courbure moyenne constante  $H_0$  qui est stable et dont le bord est  $\gamma$ ; de plus,  $S$  est comprise entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . En choisissant correctement  $\gamma$ , cela implique qu'il existe un point  $p \in S$  tel que la distance dans  $S$  de  $p$  à  $\gamma = \partial S$  est très grande. Ceci contredit le résultat suivant que nous avons démontré dans [Ma6] dont Ros et Rosenberg avait montré une version non optimale dans [70].

**Théorème 14** ([Ma6]). *Soit  $S$  une surface à courbure moyenne constante  $H_0 > 0$  stable de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $p \in S$  alors :*

$$d_S(p, \partial S) \leq \frac{\pi}{2H_0}$$

*De plus si on a l'égalité,  $S$  est un hémisphère.*

Ce type de résultat est une estimé de distance pour les surfaces cmc stables. Dans [Ma6], nous montrons aussi des résultats équivalents pour les surfaces cmc stables de  $\mathbb{H}^3$  et  $\mathbb{S}^3$  en utilisant la correspondance de Lawson [44]. Dans d'autres espaces ambients, des résultats de ce type ne sont connus que pour de grande valeur de  $H_0$  (voir [72]); à titre

d'exemple, dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  une telle estimé n'est connue que pour  $H_0 > 1/\sqrt{3}$  [60] alors qu'elle est attendue pour  $H_0 > 1/2$ .

La preuve du Théorème 14 s'appuie sur des techniques de calcul pour des opérateurs de type Schrödinger sur les surfaces qui ont été introduites par Pogorelov [66] et Colding et Minicozzi [10].

Dans le cas du Théorème 11, nous nous intéressons plutôt à des valeurs de  $H_0$  trop petites pour qu'un résultat type estimé de longueur pour les surfaces stables soit vrai, par exemple le cas des surfaces minimales dans  $\mathbb{R}^3$ . Toutefois, nous nous inspirons de la preuve de Ros et Rosenberg. En un certain sens c'est le caractère parabolique de  $\Sigma_0$  qui remplace le rôle joué par l'estimé de longueur pour les surfaces stables.

Plaçons nous donc dans la situation du Théorème 11 avec une surface  $\Sigma_0$  de référence et une surface  $\Sigma$  dans le voisinage tubulaire de  $\Sigma_0$  d'un côté de  $\Sigma_0$ , fixons pour la suite  $\Sigma \subset \Sigma_0 \times ]0, \varepsilon]$ . La première partie de la preuve consiste à remplacer la surface  $\Sigma$  par une surface  $\Sigma'$  vérifiant les mêmes hypothèses que  $\Sigma$  mais qui de plus est stable.

Pour cela considérons  $S$  une partie compacte de  $\Sigma$  et considérons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des domaines compacts  $Q$  de  $\Sigma_0 \times [0, \varepsilon]$  compris entre  $\Sigma_0$  et  $\Sigma$  dont  $S$  est une partie du bord. On définit alors sur  $\mathcal{F}$  la fonctionnelle

$$F(Q) = \text{Aire}(\partial Q) + 2H_0 \text{Vol}(Q)$$

En fait  $F$  est bien définie sur la classe des domaines à bord rectifiable. L'idée est de minimiser la fonctionnelle  $F$  ce qui correspond à résoudre une sorte de problème isopérimétrique. Afin de contrôler un éventuel minimum, on a besoin de situer les suites minimisantes. L'hypothèse  $H \leq H_0$  dit que  $\text{div } \partial_t \leq 2H_0$  où  $\text{div}$  est l'opérateur divergence dans  $\Sigma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ . En intégrant cette inégalité sur un domaine appartenant à  $\mathcal{F}$  et en utilisant une formule de Stokes, on montre qu'un suite minimisante pour  $F$  n'a pas intérêt à se rapprocher de  $\Sigma_0$ .

En généralisant cet argument avec des champs de vecteurs autres que  $\partial_t$ , on obtient un contrôle précis sur les suites minimisantes. On montre alors que l'on peut minimiser  $F$  dans la classe des domaines à bord rectifiable et assurer qu'un minimiseur  $Q_0$  est à bord régulier. Au vue des équations (1.1), (1.2) et (1.3), la partie du bord  $\partial Q_0 \setminus S$  est nécessairement une surface à courbure moyenne constante  $H_0$  qui est stable. Ainsi on a réussi à construire une surface  $S'$  cmc  $H_0$  stable qui remplace  $S$ .  $Q_0$  étant un minimiseur de  $F$  la surface  $S'$  vérifie de plus plusieurs propriétés géométriques comme une estimé d'aire. En faisant grossir la surface  $S$  et en suivant le passage à la limite de  $S'$ , on arrive alors à construire la surface non compacte  $\Sigma'$  espérée.

La deuxième partie de la preuve consiste à utiliser la surface  $\Sigma'$  afin de construire une fonction surharmonique sur  $\Sigma_0$ . La surface  $\Sigma'$  est stable, elle satisfait donc une estimé de courbure ; ceci permet de montrer, si  $\Sigma'$  est plongée, que  $\Sigma'$  est le graphe d'une fonction au dessus de  $\Sigma_0$  dans  $\Sigma_0 \times [0, \varepsilon]$ . De plus la projection de  $\Sigma'$  sur  $\Sigma_0$  est quasi-isométrique ce qui implique que  $\Sigma'$  est parabolique. Si on note  $\mathbf{d}$  la fonction distance de  $\Sigma'$  à  $\Sigma_0$ , l'hypothèse sur l'évolution de la courbure des équidistantes permet alors de montrer qu'il existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \circ \mathbf{d} : \Sigma' \rightarrow \mathbb{R}$  est surharmonique.  $\Sigma'$  étant parabolique, cette fonction est donc constante et  $\Sigma'$  est une équidistante  $\Sigma_t$ . Ceci permet alors de conclure pour la surface de départ  $\Sigma$ .

Dans le cas général ( $\Sigma'$  simplement immergée),  $\Sigma'$  n'est pas un graphe mais la fonction  $f \circ \mathbf{d}$  peut être transportée sur  $\Sigma_0$  afin d'y construire une fonction surharmonique et de contredire la parabolicité.

## Chapitre 5

# Surfaces à courbure moyenne constante cylindriquement bornées dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Dans ce chapitre nous présentons un résultat de classification pour les surfaces à courbure moyenne constante dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Ce résultat est publié dans [Ma9].

On a vu à la Section 1.4 que Hsiang et Hsiang [35] ont montré que les seules surfaces cmc compactes plongées dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sont les sphères de révolution. Le résultat que nous présentons ici donne une caractérisation similaire des surfaces de Delaunay de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

### 5.1 Surfaces cylindriquement bornées

En 1988, Meeks [51] montre qu'un anneau proprement plongé dans  $\mathbb{R}^3$  qui est à courbure moyenne constante  $H_0 > 0$  doit nécessairement rester à distance finie d'une droite. A la suite de ce résultat, Korevaar, Kusner et Solomon [42] montrent qu'une surface cmc  $H_0$  proprement plongée dans  $\mathbb{R}^3$  qui est à distance finie d'une droite est nécessairement une surface de révolution donc une surface de Delaunay appelée onduloïde. On obtient ainsi une classification des anneaux à courbure moyenne constante proprement plongés dans  $\mathbb{R}^3$ . Notons que dans le cas minimal, Collin [16] a montré que les seuls anneaux minimaux proprement plongés dans  $\mathbb{R}^3$  sont les caténoïdes.

Par ailleurs, les résultats de Meeks et Korevaar, Kusner et Solomon permettent même de contrôler le comportement asymptotique des surfaces cmc de topologie finie et d'étudier l'espace de module de ces surfaces. On se référera aux travaux de Kusner, Mazzeo et Pollack [43].

Les résultats ci-dessus portant sur  $\mathbb{R}^3$  ont été étendus à  $\mathbb{H}^3$  dans [41].

Si on s'intéresse aux mêmes problèmes dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , on est très vite confronté à la difficulté que le groupe des isométries de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  est plus petit que celui de  $\mathbb{R}^3$ . Plus précisément, on dispose de moins de symétries renversant l'orientation dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Par exemple, on ne sait pas actuellement montrer qu'un anneau cmc  $H_0 > 1/2$  doit rester

à distance finie d'une géodésique. Rappelons que la valeur  $H_0 = 1/2$  est la limite pour laquelle on s'attend à un tel comportement.

Par ailleurs, considérons  $\gamma$  une géodésique dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Si  $\gamma$  est verticale, comme on l'a vu en Section 1.4, on a alors une famille à un paramètre de surfaces de révolution plongées qui restent à distance finie de  $\gamma$  pour tout  $H_0 > 1/2$  (ce sont les surfaces de Delaunay). Si  $\gamma$  n'est pas verticale, on ne connaît que quelques exemples de surfaces cmc  $H_0 > 1/2$  restant à distance finie d'une géodésique (voir Mazzeo et Pacard [49] et Manzano et Torralbo [48]).

On s'intéresse donc plus particulièrement au cas de la géodésique verticale. On dira qu'une surface de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  est cylindriquement bornée si elle reste à distance bornée d'une telle géodésique verticale. Dans ce contexte nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 15** ([Ma9]). *Soit  $\Sigma$  une surface proprement plongée à courbure moyenne constante dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Si  $\Sigma$  est de topologie finie et est cylindriquement bornée alors  $\Sigma$  est une surface de Delaunay.*

Tout d'abord remarquons que l'hypothèse cylindriquement bornée implique que la courbure moyenne de  $\Sigma$  est plus grande que  $1/2$  : c'est une conséquence du théorème du demi-espace.

Par ailleurs, ce résultat est similaire à celui de Korevaar, Kusner et Solomon [42], mise à part l'hypothèse topologique que nous mettons sur la surface. Comme nous le verrons ci-dessous cette hypothèse est là pour nous donner un contrôle sur le comportement asymptotique de la surface dont on peut se passer dans  $\mathbb{R}^3$ . Rappelons que dans  $\mathbb{R}^3$  un anneau minimal proprement plongé est un caténoïde alors que dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  on n'a pas un résultat équivalent : plus précisément, Cartier et Hauswirth [8] ont construit récemment des anneaux proprement plongés de courbure moyenne  $1/2$  qui sont asymptotiques à des exemples de révolution mais qui ne sont pas de révolution.

Par ailleurs, les idées de la preuve s'appliquent aussi au cas de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  pour montrer qu'une surface plongée cmc de topologie finie qui est incluse dans  $\mathbb{S}_+^2 \times \mathbb{R}$  (où  $\mathbb{S}_+^2$  est un hémisphère) est une surface de révolution.

## 5.2 Quelques éléments de démonstration

Comme pour le cas des surfaces compactes dû à Hsiang et Hsiang, la démonstration s'appuie sur la technique de réflexion d'Alexandrov [4]. Afin de la mettre en œuvre sur des surfaces non compactes, on introduit la fonction d'Alexandrov définie par Korevaar, Kusner et Solomon [42].

Soit  $\Sigma$  une surface cmc proprement plongée dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et cylindriquement bornée et considérons  $\gamma$  une géodésique de  $\mathbb{H}^2$ .  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  est alors feuilletté par les plans verticaux  $\Pi_s$  orthogonaux à  $\gamma$ . Chaque plan  $\Pi_s$  coupe  $\Sigma$  en deux parties  $\Sigma_{1,s}$  et  $\Sigma_{2,s}$  et la technique d'Alexandrov consiste à comparer  $\Sigma_{1,s}$  avec le symétrique  $\tilde{\Sigma}_{2,s}$  de  $\Sigma_{2,s}$  par rapport à  $\Pi_s$ . Si  $\Sigma$  est compacte, pour  $s$  grand,  $\Sigma_{1,s}$  et  $\tilde{\Sigma}_{2,s}$  ne se rencontrent pas. Alors pour le plus grand  $s = s_1$  où les deux surfaces se touchent, le principe du maximum implique que  $\Sigma$  est symétrique par rapport à  $\Pi_{s_1}$ . Dans le cas général ( $\Sigma$  non compacte), on définit une

fonction  $\alpha_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  appelée fonction d’Alexandrov. Le nombre  $\alpha_\gamma(z_0)$  dit pour quelle valeur de  $s$  on a un premier point de contact entre  $\Sigma_{1,s}$  et  $\tilde{\Sigma}_{2,s}$  dans  $\mathbb{H}^2 \times \{z_0\}$ . Ainsi si  $\alpha_\gamma$  admet un maximum, un raisonnement similaire au cas compact montre que  $\Sigma$  est symétrique par rapport à un plan vertical normal à  $\gamma$  et donc  $\alpha_\gamma$  est constante.

Par ailleurs, on montre que  $\alpha_\gamma$  est semi-continue supérieurement et qu’elle peut donc être constante, monotone ou décroissante proche de  $-\infty$  et croissante proche de  $+\infty$ . Dans  $\mathbb{R}^3$ , Korevaar, Kusner et Solomon montrent que la seule possibilité est  $\alpha_\gamma$  constante. Ils utilisent pour cela la réflexion d’Alexandrov par rapport à des plans inclinés. Dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , on ne peut pas adapter cet argument car les seules symétries renversant l’orientation de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sont les symétries par rapport à des plans verticaux.

Dans notre résultat, nous supposons que  $\Sigma$  est de topologie finie. Sous cette hypothèse, des résultats de Hoffman, De Lira et Rosenberg [32, 71] montrent que la seconde forme fondamentale de  $\Sigma$  est uniformément bornée. Ceci permet de déterminer le comportement asymptotique de la surface. En effet, si  $t_n$  est une suite de translations verticales divergente, l’estimé de courbure assure qu’une sous-suite de  $t_n(\Sigma)$  converge vers une surface cmc cylindriquement bornée. Cette surface est de plus une union finie d’anneaux. Par ailleurs, à cause de leur monotonie, les fonctions d’Alexandrov  $\alpha_\gamma$  admettent des limites en  $\pm\infty$ . Cela implique que les fonctions d’Alexandrov de chacun des anneaux composant la limite de  $t_n(\Sigma)$  sont toutes constantes. Ces anneaux sont donc tous invariants par rotation autour d’une géodésique verticale. Autrement dit, les bouts de la surface  $\Sigma$  sont tous asymptotes à des surfaces de Delaunay.

De cela il résulte qu’il suffit de s’intéresser aux fonctions d’Alexandrov définies sur un bout de type anneau asymptote à une surface de Delaunay. Si  $A$  est un tel bout inclus dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^+$ , les fonctions d’Alexandrov de  $A$  sont définies sur  $\mathbb{R}^+$ . On montre alors que ces fonctions d’Alexandrov sont décroissantes ce qui implique que les fonctions d’Alexandrov de  $\Sigma$  sont constantes. Ainsi  $\Sigma$  est symétrique par rapport à une infinité de plans verticaux : elle est donc invariante par rotation et cela finit la preuve du théorème.

Pour obtenir la monotonie de la fonctions d’Alexandrov  $\alpha_\gamma$  de  $A$ , on utilise un argument de flux. Afin de présenter cet argument, nous allons regarder le cas particulier où  $\Sigma$  est un anneau. D’après le comportement asymptotique donné ci-dessus, pour  $z$  proche de  $+\infty$ ,  $\Sigma$  ressemble à une surface de Delaunay et de même pour  $z$  proche de  $-\infty$ . Chacune de ces deux surfaces de Delaunay vient avec un axe de révolution. Si ces deux axes sont confondus, on peut alors facilement montrer que les fonctions d’Alexandrov de  $\Sigma$  sont constantes et que  $\Sigma$  est invariante par rotation autour de cet axe.

Supposons donc que les deux axes soient différents et considérons  $\gamma$  une géodésique horizontale passant par les deux axes. On peut alors modéliser  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  comme étant  $\mathbb{R}^2 \times_f \mathbb{R}$  (voir Section 1.2) avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, z) \mapsto \cosh x$  de sorte  $\gamma$  soit  $\{z = 0, x = 0\}$ . Dans ce modèle,  $z$  est toujours la coordonnée réelle de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . On peut de plus supposer que le plan vertical  $\Pi = \{t = 0\}$  sépare les deux axes de  $\Sigma$  (voir Figure 5.1). Le plan  $\Pi$  coupe la surface  $\Sigma$  en deux parties  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . En utilisant les surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  comme barrières, on peut alors construire une surface  $S$  de courbure moyenne  $H_0$  qui a le même bord que  $\Sigma_1$ , qui est comprise entre  $\Pi$  et  $\Sigma_1$  et qui est un graphe au sens de la structure  $\mathbb{R}^2 \times_{\cosh x} \mathbb{R}$ . On utilise une technique de Perron pour construire

cette solution de l'équation (1.5) ; pour cela on montre une généralisation de l'estimé de gradient de Spruck (voir Section 1.2) dans ce contexte. Cette estimé de gradient permet de plus d'assurer que la solution de (1.5) est solution d'une équation au dérivées partielles uniformément elliptique et est donc régulière jusqu'au bord : la surface  $S$  est donc une surface lisse à bord. Par ailleurs, à cause du comportement asymptotique de  $\Sigma$ , on peut être sûr que  $S \neq \Sigma_1$  et on peut déterminer le comportement asymptotique de  $S$  ; on montre pour cela des résultats d'unicité similaires à ceux de la Section 2.3.

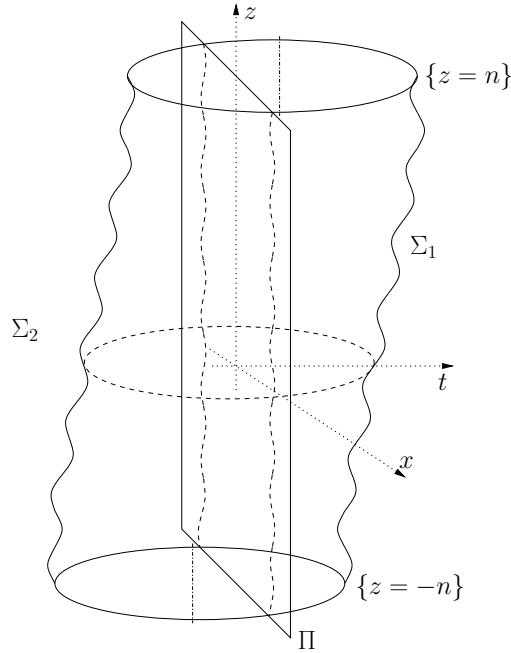


FIGURE 5.1 – Le plan  $\Pi$  séparant les deux axes

On note alors  $c_1^n$  le bord de  $\Sigma_1 \cap \{-n \leq z \leq n\}$  et  $c^n$  le bord de  $S \cap \{-n \leq z \leq n\}$ . Les flux de  $\Sigma_1$  au travers de  $c_1^n$  et de  $S$  au travers de  $c^n$  dans la direction  $\partial_t$  sont nuls puisque ces courbes sont des bords. Par ailleurs, le long de  $c_1^n \cap \Pi = c^n \cap \Pi$ , on peut comparer les deux calculs de flux et voir que la contribution au flux de  $\Sigma_1$  est nécessairement plus petite que celle au flux de  $S$  car  $S$  reste d'un côté de  $\Sigma_1$ . Par ailleurs, le comportement asymptotique de  $\Sigma_1$  et  $S$  permet de calculer les limites des contributions le long de  $c_1^n \cap \{z = \pm n\}$  et  $c^n \cap \{z = \pm n\}$  : on montre que ces limites sont nulles. On obtient alors une contradiction avec le fait que les deux flux soient nuls.

Dans le cas général, on peut mettre en place le même type d'argument sur chacun des bouts de la surface  $\Sigma$  et obtenir la décroissance de la fonction d'Alexandrov.

# Articles présentés

- [Ma1] Laurent Mazet. A height estimate for constant mean curvature graphs and uniqueness results. *Manuscripta Math.*, 119 :255–268, 2006.
- [Ma2] Laurent Mazet. Lignes de divergence pour les graphes à courbure moyenne constante. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 24 :757–771, 2007.
- [Ma3] Laurent Mazet. Some uniqueness results for constant mean curvature graphs. *Pacific J. Math.*, 230 :365–380, 2007.
- [Ma4] Laurent Mazet. A uniqueness result for maximal surfaces in minkowski 3-space. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344 :785–790, 2007.
- [Ma5] Laurent Mazet. Complements to quasi-periodic minimal surfaces. article non soumis, 2008.
- [Ma6] Laurent Mazet. Optimal length estimates for stable CMC surfaces in 3-space forms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137 :2761–2765, 2009.
- [Ma7] Laurent Mazet. Adding one handle to half-plane layers. *J. Differential Geom.*, 84 :389–407, 2010.
- [Ma8] Laurent Mazet. A general halfspace theorem for constant mean curvature surfaces. à paraître dans *Amer. J. Math.*, 2010.
- [Ma9] Laurent Mazet. Cylindrically bounded constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . prépublication, 2012.
- [MRR1] Laurent Mazet, M. Magdalena Rodríguez, and Harold Rosenberg. The dirichler problem for minimal surface equation - with possible infinite boundary date -over domains in riemannian surface. *Proc. London Math. Soc.*, 102 :985–1023, 2011.
- [MRR2] Laurent Mazet, M. Magdalena Rodríguez, and Harold Rosenberg. Periodic constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . prépublication, 2011.
- [MRT] Laurent Mazet, M. Magdalena Rodríguez, and Martin Traizet. Saddle towers with infinitely many ends. *Indiana Univ. Math. J.*, 56 :2821–2838, 2007.
- [MT] Laurent Mazet and Martin Traizet. A quasi-periodic minimal surface. *Comment. Math. Helv.*, 83 :573–601, 2008.



# Bibliographie

- [1] Uwe Abresch and Harold Rosenberg. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Acta Math.*, 193 :141–174, 2004.
- [2] Uwe Abresch and Harold Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.*, 28 :1–28, 2005.
- [3] Juan A. Aledo, José M. Espinar, and José A. Gálvez. Height estimates for surfaces with positive constant mean curvature in  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . *Illinois J. Math.*, 52 :203–211, 2008.
- [4] A. D. Alexandrov. A characteristic property of spheres. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 58 :303–315, 1962.
- [5] Robert Bartnik and Leon Simon. Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature. *Comm. Math. Phys.*, 87 :131–152, 1982/83.
- [6] J. Bolte, A. Daniilidis, O. Ley, and L. Mazet. Characterizations of Lojasiewicz inequalities and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362 :3319–3363, 2010.
- [7] P. Bérard and R. Sa Earp. Minimal hypersurfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , total curvature and index. prépublication.
- [8] Sébastien Cartier and Laurent Hauswirth. Deformation of cmc-1/2 surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  with vertical ends at infinity. prépublication.
- [9] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Complete properly embedded minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . *Duke Math. J.*, 107 :421–426, 2001.
- [10] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Estimates for parametric elliptic integrands. *Int. Math. Res. Not.*, pages 291–297, 2002.
- [11] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. I. Estimates off the axis for disks. *Ann. of Math. (2)*, 160 :27–68, 2004.
- [12] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. II. Multi-valued graphs in disks. *Ann. of Math. (2)*, 160 :69–92, 2004.
- [13] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. III. Planar domains. *Ann. of Math. (2)*, 160 :523–572, 2004.

- [14] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. IV. Locally simply connected. *Ann. of Math.* (2), 160 :573–615, 2004.
- [15] Pascal Collin. Deux exemples de graphes à courbures moyenne constante sur la bande de  $\mathbb{R}^2$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311 :539–542, 1990.
- [16] Pascal Collin. Topologie et courbure des surfaces minimales proprement plongées de  $\mathbb{R}^3$ . *Ann. of Math.* (2), 145 :1–31, 1997.
- [17] Pascal Collin and Romain Krust. Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur des domaines non bornés. *Bull. Soc. Math. France*, 119 :443–462, 1991.
- [18] Pascal Collin and Harold Rosenberg. Construction of harmonic diffeomorphisms and minimal graphs. *Ann. of Math.* (2), 172 :1879–1906, 2010.
- [19] Benoît Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 82 :87–131, 2007.
- [20] Benoît Daniel. Isometric immersions into  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  and applications to minimal surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361 :6255–6282, 2009.
- [21] Benoît Daniel and Laurent Hauswirth. Half-space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 98 :445–470, 2009.
- [22] Benoît Daniel, William H. Meeks, III, and Harold Rosenberg. Half-space theorems for minimal surfaces in  $\text{Nil}_3$  and  $\text{Sol}_3$ . prépublication.
- [23] Benoît Daniel and Pablo Mira. Existence and uniqueness of constant mean curvature spheres in  $\text{Sol}_3$ . à paraître dans *J. Reine Angew. Math.*
- [24] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, and Friedrich Sauvigny. *Minimal surfaces*, volume 339 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [25] Isabel Fernández and Pablo Mira. Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361 :5737–5752, 2009.
- [26] Laurent Hauswirth. Minimal surfaces of Riemann type in three-dimensional product manifolds. *Pacific J. Math.*, 224 :91–117, 2006.
- [27] Laurent Hauswirth and Frank Pacard. Higher genus Riemann minimal surfaces. *Invent. Math.*, 169 :569–620, 2007.
- [28] Laurent Hauswirth, Harold Rosenberg, and Joel Spruck. On complete mean curvature  $\frac{1}{2}$  surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Comm. Anal. Geom.*, 16 :989–1005, 2008.
- [29] Laurent Hauswirth, Harold Rosenberg, and Joel Spruck. Infinite boundary value problems for constant mean curvature graphs in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . *Amer. J. Math.*, 131 :195–226, 2009.
- [30] Laurent Hauswirth, Ricardo Sa Earp, and Eric Toubiana. Associate and conjugate minimal immersions in  $M \times \mathbb{R}$ . *Tohoku Math. J.* (2), 60 :267–286, 2008.

- [31] D. Hoffman and William H. Meeks, III. The strong halfspace theorem for minimal surfaces. *Invent. Math.*, 101 :373–377, 1990.
- [32] David Hoffman, Jorge H. S. de Lira, and Harold Rosenberg. Constant mean curvature surfaces in  $M^2 \times \mathbb{R}$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358 :491–507, 2006.
- [33] David Hoffman and William H. Meeks, III. The asymptotic behavior of properly embedded minimal surfaces of finite topology. *J. Amer. Math. Soc.*, 2 :667–682, 1989.
- [34] David Hoffman and Brian White. Axial minimal surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  are helicoidal. *J. Differential Geom.*, 87 :515–523, 2011.
- [35] Wu-Teh Hsiang and Wu-Yi Hsiang. On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in noncompact symmetric spaces. I. *Invent. Math.*, 98 :39–58, 1989.
- [36] Howard Jenkins and James Serrin. Variational problems of minimal surface type. II. Boundary value problems for the minimal surface equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 21 :321–342, 1966.
- [37] Luquésio P. de M. Jorge and Frederico Xavier. A complete minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  between two parallel planes. *Ann. of Math. (2)*, 112 :203–206, 1980.
- [38] Hermann Karcher. Embedded minimal surfaces derived from Scherk’s examples. *Manuscripta Math.*, 62 :83–114, 1988.
- [39] Hermann Karcher, Fu Sheng Wei, and David Hoffman. The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery. In *Global analysis in modern mathematics (Orono, ME, 1991; Waltham, MA, 1992)*, pages 119–170. Publish or Perish, Houston, TX, 1993.
- [40] A. A. Klyachin and V. M. Miklyukov. The existence of solutions with singularities of the equation of maximal surfaces in a Minkowski space. *Mat. Sb.*, 184 :103–124, 1993.
- [41] Nicholas J. Korevaar, Rob Kusner, William H. Meeks, III, and Bruce Solomon. Constant mean curvature surfaces in hyperbolic space. *Amer. J. Math.*, 114 :1–43, 1992.
- [42] Nicholas J. Korevaar, Rob Kusner, and Bruce Solomon. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. *J. Differential Geom.*, 30 :465–503, 1989.
- [43] R. Kusner, R. Mazzeo, and D. Pollack. The moduli space of complete embedded constant mean curvature surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 6 :120–137, 1996.
- [44] H. Blaine Lawson, Jr. Complete minimal surfaces in  $\mathbb{S}^3$ . *Ann. of Math. (2)*, 92 :335–374, 1970.
- [45] Francisco J. López and Antonio Ros. On embedded complete minimal surfaces of genus zero. *J. Differential Geom.*, 33 :293–300, 1991.
- [46] R. López. Constant mean curvature graphs in a strip of  $\mathbb{R}^2$ . *Pacific J. Math.*, 206 :359–373, 2002.

- [47] José Manzano, Joaquín Pérez, and M. Magdalena Rodríguez. Parabolic stable surfaces with constant mean curvature. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 42 :137–152, 2011.
- [48] José Miguel Manzano and Francisco Torralbo. New examples of constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . prépublication, arXiv :1104.1259.
- [49] Rafe Mazzeo and Frank Pacard. Foliations by constant mean curvature tubes. *Comm. Anal. Geom.*, 13 :633–670, 2005.
- [50] William H. Meeks, III. prépublication.
- [51] William H. Meeks, III. The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature. *J. Differential Geom.*, 27 :539–552, 1988.
- [52] William H. Meeks, III, Joaquín Pérez, and Antonio Ros. Properly embedded minimal planar domains. prépublication.
- [53] William H. Meeks, III, Joaquín Pérez, and Antonio Ros. The geometry of minimal surfaces of finite genus. I. Curvature estimates and quasiperiodicity. *J. Differential Geom.*, 66 :1–45, 2004.
- [54] William H. Meeks, III and Harold Rosenberg. The global theory of doubly periodic minimal surfaces. *Invent. Math.*, 97 :351–379, 1989.
- [55] William H. Meeks, III and Harold Rosenberg. The geometry and conformal structure of properly embedded minimal surfaces of finite topology in  $\mathbb{R}^3$ . *Invent. Math.*, 114 :625–639, 1993.
- [56] William H. Meeks, III and Harold Rosenberg. The uniqueness of the helicoid. *Ann. of Math. (2)*, 161 :727–758, 2005.
- [57] John Milnor. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Math.*, 21 :293–329, 1976.
- [58] Filippo Morabito and Martin Traizet. Non-periodic riemann examples with handles. *Advances in Math.*, 229 :26–53, 2012.
- [59] Barbara Nelli and Harold Rosenberg. Minimal surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 33 :263–292, 2002.
- [60] Barbara Nelli and Harold Rosenberg. Global properties of constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Pacific J. Math.*, 226 :137–152, 2006.
- [61] Barbara Nelli and Harold Rosenberg. Simply connected constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Michigan Math. J.*, 54 :537–543, 2006.
- [62] Irene I. Onnis. Invariant surfaces with constant mean curvature in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 187 :667–682, 2008.
- [63] F. Pacard and T. Sun. Doubling constructions for constant mean curvature surfaces in riemannian manifolds. prépublication.
- [64] Joaquín Pérez and Martin Traizet. The classification of singly periodic minimal surfaces with genus zero and Scherk-type ends. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359 :965–990 (electronic), 2007.

- [65] Ana Lucia Pinheiro. A Jenkins-Serrin theorem in  $M^2 \times \mathbb{R}$ . *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 40 :117–148, 2009.
- [66] A. V. Pogorelov. On the stability of minimal surfaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 260 :293–295, 1981.
- [67] Juncheol Pyo. New complete embedded minimal surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Ann. Global Anal. Geom.*, 40 :167–176, 2011.
- [68] Sa Earp Ricardo. Parabolic and hyperbolic screw motion surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *J. Aust. Math. Soc.*, 85 :113–143, 2008.
- [69] Lucio Rodriguez and Harold Rosenberg. Half-space theorems for mean curvature one surfaces in hyperbolic space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126 :2755–2762, 1998.
- [70] Antonio Ros and Harold Rosenberg. Properly embedded surfaces with constant mean curvature. *Amer. J. Math.*, 132 :1429–1443, 2010.
- [71] Harold Rosenberg. *Some recent developments in the theory of minimal surfaces in 3-manifolds*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2003.
- [72] Harold Rosenberg. Constant mean curvature surfaces in homogeneously regular 3-manifolds. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 74 :227–238, 2006.
- [73] Harold Rosenberg and Éric Toubiana. A cylindrical type complete minimal surface in a slab of  $\mathbb{R}^3$ . *Bull. Sci. Math. (2)*, 111 :241–245, 1987.
- [74] Ricardo Sa Earp and Eric Toubiana. Screw motion surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . *Illinois J. Math.*, 49 :1323–1362, 2005.
- [75] Richard M. Schoen. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *J. Differential Geom.*, 18 :791–809 (1984), 1983.
- [76] James Serrin. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 264 :413–496, 1969.
- [77] Rabah Souam. On stable constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362 :2845–2857, 2010.
- [78] Rabah Souam and Eric Toubiana. Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 84 :673–704, 2009.
- [79] Joel Spruck. Infinite boundary value problems for surfaces of constant mean curvature. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 49 :1–31, 1972/73.
- [80] Joel Spruck. Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in  $M^n \times \mathbb{R}$ . *Pure Appl. Math. Q.*, 3 :785–800, 2007.
- [81] Matthias Weber, David Hoffman, and Michael Wolf. An embedded genus-one helicoid. *Ann. of Math. (2)*, 169 :347–448, 2009.
- [82] Fu Sheng Wei. Some existence and uniqueness theorems for doubly periodic minimal surfaces. *Invent. Math.*, 109 :113–136, 1992.
- [83] Michael Wolf. Minimal graphs in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and their projections. *Pure Appl. Math. Q.*, 3 :881–896, 2007.