

Phénomènes de propagation pour différents modèles de réaction-diffusion

Habilitation à diriger des recherches

présentée et soutenue publiquement le 28 juin 2018

par

Grégoire NADIN

Composition du jury

Rapporteurs : Hiroshi Matano, Professeur, University of Tokyo
Jean-Michel Roquejoffre, Professeur, Université de Toulouse
Jun-cheng Wei, Professeur, University of British Columbia

Examineurs : Henri Berestycki, Directeur d'études, EHESS Paris
François Hamel, Professeur, Aix-Marseille Université
Lenya Ryzhik, Professeur, Stanford university
Sylvia Serfaty, Professeur, Sorbonne université

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

À venir prochainement.

Résumé

Phénomènes de propagation pour différents modèles de réaction-diffusion

Les équations de réaction-diffusion engendrent des phénomènes de propagation, qu'on peut quantifier mathématiquement à travers deux notions : en localisant les lignes de niveau des solutions (vitesses d'expansion) ou à l'aide de solutions de type traveling waves. Le but de ce manuscrit est de discuter de ces deux notions pour différentes variantes de l'équation de Fisher-KPP.

Dans un premier chapitre, nous étudierons ces phénomènes pour des équations de Fisher-KPP hétérogènes dépendant de façon générale de t et de x . Des bornes sur les vitesses d'expansion dans chaque direction peuvent être obtenues à l'aide de valeurs propres généralisées, donnant des vitesses d'expansion exactes notamment pour des coefficients presque périodiques, uniquement ergodiques ou encore constant à l'infini dans des secteurs angulaires. Nous discuterons ensuite de la notion de fronts de transition généralisés pour cette équation, et montrerons leur existence quand les coefficients ne dépendent que de t ou bien sont presque périodiques en x .

Le second chapitre traite des équations de Fisher-KPP non-locales ou à retard. Ces équations n'admettant plus de principe de comparaison, le comportement asymptotique des traveling waves est encore mal compris. Une nouvelle méthode numérique appuie la conjecture de la convergence d'un état homogène vers l'autre pour des noyaux symétriques. Pour des noyaux asymétriques, la convergence des traveling waves dépend de la position de l'asymétrie par rapport à la direction de propagation.

Une équation de réaction-diffusion cinétique, avec un noyau mesurant la probabilité de changer de vitesse, sera étudiée dans le troisième chapitre. Si ce noyau est à support compact, on retrouve l'existence de traveling waves, dont on peut caractériser les vitesses. Dans le cas d'un noyau somme de deux Dirac, on retrouve une équation de Fisher-KPP avec un retard dans la loi de diffusion, dont on discutera une application en archéologie. Dans le cas d'un noyau Gaussien, les lignes de niveau se propagent en $t^{3/2}$, et on cherchera à déterminer ce taux de propagation de deux façons différentes.

Enfin, dans la quatrième partie, nous présenterons plusieurs résultats sur la dépendance entre les coefficients de l'équation et la vitesse de propagation dans le cas d'une équation périodique en espace. On peut en particulier montrer que le réarrangement de Schwarz du terme de croissance accélère la propagation en dimension 1, mais que la situation est beaucoup moins tranchée en dimension supérieure.

Mots-clés: équations de réaction-diffusion, traveling waves, vitesse d'expansion, équations de Hamilton-Jacobi, équations nonlocales et à retard, valeurs propres principales, réarrangement de Schwarz.

Abstract

Propagation phenomena in various reaction-diffusion models

Reaction-diffusion equations generate propagation phenomena, which can be quantified mathematically through two notions : by locating the level lines of the solutions (expansion speeds) or using traveling waves. The purpose of this manuscript is to discuss these two concepts for different variants of the Fisher-KPP equation.

In a first chapter, we will study these phenomena for heterogeneous Fisher-KPP equations depending in a general way on t and x . Bounds on the expansion speeds in each direction can be obtained with the aid of generalized eigenvalues, giving exact expansion speeds in particular for coefficients that are almost periodic, uniquely ergodic or constant at infinity in angular sectors. We will then discuss the notion of generalized transition waves for this equation and show their existence when the coefficients depend only on t or else are almost periodic in x .

The second chapter deals with non-local and delayed Fisher-KPP equations. Since these equations no longer admit a comparison principle, the asymptotic behavior of traveling waves is still poorly understood. A new numerical method supports the conjecture of the convergence of one homogeneous state towards the other for symmetric kernels. For asymmetric kernels, the convergence of the traveling waves depends on the position of the asymmetry with respect to the direction of propagation.

A kinetic reaction-diffusion equation, with a probability kernel measuring the velocity changes, will be studied in the third chapter. If this kernel is compactly supported, the existence of traveling waves can be proved and their velocities can be characterized. In the case where the kernel is a sum of two Dirac masses, we find a Fisher-KPP equation with a delay in the diffusion law, of which an application in archaeology will be discussed. In the case of a Gaussian kernel, the level lines propagate in $t^{3/2}$, and we will seek to determine this propagation rate in two different ways.

Finally, in the fourth part, we present several results on the dependence between the coefficients of the equation and the speed of propagation in the case of a periodic equation in space. In particular, one can show that the Schwarz rearrangement of the growth term accelerates the propagation in dimension 1, but that the situation is much less understood in higher dimensions.

Keywords: reaction-diffusion equations, traveling waves, expansion speeds, Hamilton-Jacobi equations, nonlocal and delayed equations, principal eigenvalues, Schwarz rearrangement.

Table des matières

Introduction

1	Première notion : la vitesse d’expansion	1
2	Deuxième notion : les traveling waves	2
3	Domaines d’application et autres types de nonlinéarités	3
4	Plan du manuscrit	3

Chapitre 1

Équations de réaction-diffusion complètement hétérogènes

1.1	Vitesses d’expansion en milieu complètement hétérogène	8
1.1.1	État de l’art dans le cas périodique	8
1.1.2	Le cas de la dimension 1	9
1.1.3	Oscillation des lignes de niveau et non-existence d’une vitesse d’expansion exacte	10
1.1.4	Milieus aléatoires stationnaires ergodiques en dimension 1	11
1.1.5	Énoncé du résultat en dimension N	11
1.1.6	Milieus uniquement ergodiques	14
1.1.7	Milieus homogènes dans chaque direction et convexité des ensembles d’expansion	15
1.1.8	Schéma de preuve	17
1.2	Fronts de transition généralisés pour l’équation de Fisher-KPP hétérogène	18
1.2.1	Définition, existence et non-existence	18
1.2.2	Une notion alternative en dimension $N = 1$: les fronts critiques	19
1.2.3	Existence de fronts généralisés pour les équations hétérogènes en temps	20
1.2.4	Existence de fronts généralisés pour les équations presque périodiques en espace	21
1.3	Traveling waves pour des équations avec vitesse prescrite	22

Chapitre 2

Équations de Fisher-KPP avec saturation non-locale

2.1	Une nouvelle approche numérique pour voir émerger les traveling waves	27
2.2	Un “toy-model” exhibant une grande variété d’ondes	28

2.3	Existence et comportement asymptotique des traveling waves pour les équations à retard	29
-----	--	----

Chapitre 3

Une version microscopique de l'équation de Fisher-KPP

3.1	Existence de traveling waves pour un noyau somme de deux Dirac	34
3.2	Une validation empirique de ce modèle	34
3.3	Existence de traveling waves pour un noyau à support compact	35
3.4	Non-existence de traveling waves et propagation surlinéaire pour un noyau Gaussien	36
3.5	Un théorème de grandes déviations pour un noyau Gaussien	38

Chapitre 4

Optimisation de forme et de valeur propre

4.1	Influence de la fragmentation de l'habitat sur la vitesse	41
4.2	Optimisation des valeurs propres auto-adjointes en dimension N	43
4.3	Autres résultats de dépendance	46
4.3.1	Limite de la vitesse pour de grandes périodes	46
4.3.2	Petits résultats de dépendance	46
4.3.3	Dépendance aléatoire stationnaire ergodique	48

Liste des publications	49
-------------------------------	-----------

Bibliographie	51
----------------------	-----------

Introduction

Ce manuscrit est consacré à l'étude des équations de réaction-diffusion, qu'on peut écrire en toute généralité sous la forme :

$$\partial_t u = \underbrace{A[u]}_{\text{Terme de diffusion}} + \underbrace{F[u]}_{\text{Terme de reaction}},$$

où l'inconnue u est une fonction scalaire ou vectorielle dépendant du temps t et de l'espace x .

L'étude de ce type d'équations remonte aux années 30, avec les travaux parallèles de Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov [63] et Fisher [39] sur l'équation scalaire aujourd'hui dite de *Fisher-KPP* :

$$\partial_t u = D\Delta u + ru(1 - u). \quad (1)$$

Ce type de modèle intervient naturellement en dynamique des populations, où u est une densité de population, D son taux de dispersion et r son taux de croissance à faible densité. Plus la densité de population est importante, plus la compétition entre les individus s'intensifie pour l'accès aux ressources, supposées être limitées, jusqu'à atteindre une capacité de charge maximale du milieu, qu'on peut toujours supposer égale à $u = 1$ quitte à renormaliser.

Le but de ce manuscrit est de comprendre et décrire les phénomènes de propagation émergeant des équations de réaction-diffusion. On peut quantifier ces phénomènes à l'aide deux notions mathématiques différentes mais imbriquées.

1 Première notion : la vitesse d'expansion

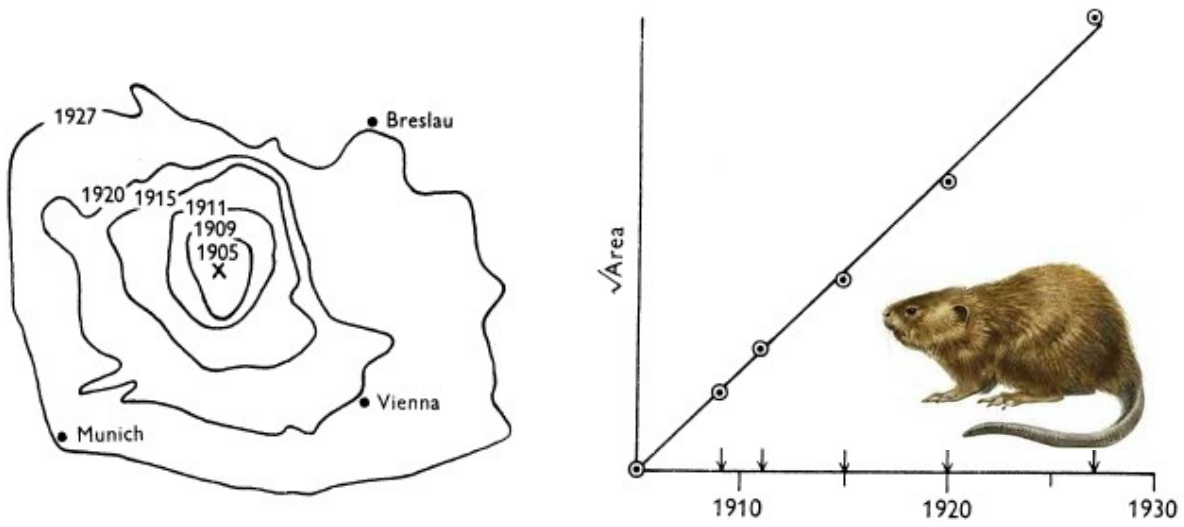
L'utilité de ce modèle fut confirmé empiriquement dans les travaux de Skellam en 1951 [97]. Afin de comprendre l'invasion du rat musqué en Autriche, celui-ci traça l'aire occupée par la population de rats musqués en fonction de l'année d'observation. Le résultat, reproduit Figure 0.1, montre une croissance linéaire de la racine de l'aire occupée en fonction du temps. Skellam retrouva heuristiquement ce taux de croissance via l'équation (1), et ce résultat fut formalisé rigoureusement plus tard par Aronson et Weinberger [6] : si $u(0, \cdot)$ est à support compact, alors la fonction u "occupe" au bout d'un temps t assez grand une boule de rayon w^*t , dont la racine de l'aire est $\sqrt{\pi}w^*t$, qui est bien linéaire en t . Plus rigoureusement, les lignes de niveau de $u(t, \cdot)$ sont localisées approximativement autour de la sphère de rayon w^*t .

On peut formaliser mathématiquement ce résultat de la façon suivante.

Theorem 0.1. [6] Soit $u_0 = u(0, \cdot) \not\equiv 0$ une donnée initiale à support compact, positive, bornée, non-nulle. Soit u la solution du problème de Cauchy associé à (1) et à u_0 . Alors :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 1 & \text{unif. sur } |x| \leq wt & \text{si } 0 \leq w < 2\sqrt{Dr}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0 & \text{unif. sur } |x| \geq wt & \text{si } w > 2\sqrt{Dr}, \end{cases}$$

On appelle $w^* = 2\sqrt{Dr}$ la vitesse d'expansion.



[Skellam 1951]

FIGURE 1 – Invasion du rat musqué en Europe de l'Est.

2 Deuxième notion : les traveling waves

On sait donc que les solutions se propagent à vitesse w^* . On peut ensuite se demander quel est le comportement asymptotique des solutions autour de la transition entre l'état instable 0 et l'état stable 1. C'est ici qu'entrent en jeu les traveling waves.

Definition 0.2. Une traveling wave de vitesse c et de direction $e \in \mathbb{S}^{N-1}$ est une solution de (1) pouvant s'écrire $u(t, x) = U(x - cte)$, avec $U > 0$, $U(-\infty) = 1$, $U(+\infty) = 0$.

J'utiliserai dans ce manuscrit cet anglicisme car il n'y a aucun doute sur ce qu'il désigne en mathématiques, alors que ses différentes traductions françaises (onde plane, front plan, vague d'avancée...) sont parfois utilisées pour désigner d'autres phénomènes, comme par exemple certains comportements asymptotiques des solutions du problème de Cauchy.

Pour l'équation de Fisher-KPP, les traveling waves existent pour une demi-droite de vitesses.

Theorem 0.3. [6, 63] Il existe une traveling wave de vitesse c si et seulement si $c \geq c^* := 2\sqrt{Dr}$.

On remarque d'emblée que la vitesse minimale d'existence des traveling waves est égale à la vitesse d'expansion w^* . On peut préciser ce lien entre les deux notions : en dimension 1, la solution du problème de Cauchy associée à une donnée initiale de type Heaviside [63] ou à support compact [29] converge vers la traveling wave de vitesse minimale le long des lignes de niveau, c'est-à-dire que si l'on définit $u(t, m(t)) = \theta$ pour un $\theta \in (0, 1)$, alors $u(t, x + m(t)) \rightarrow U(x)$ quand $t \rightarrow +\infty$ localement uniformément en c , où U est la traveling wave de vitesse c^* normalisée par $U(0) = \theta$. La translation $m(t)$ se comporte au premier ordre comme c^*t mais son développement est ensuite suivi d'une correction logarithmique [29, 49].

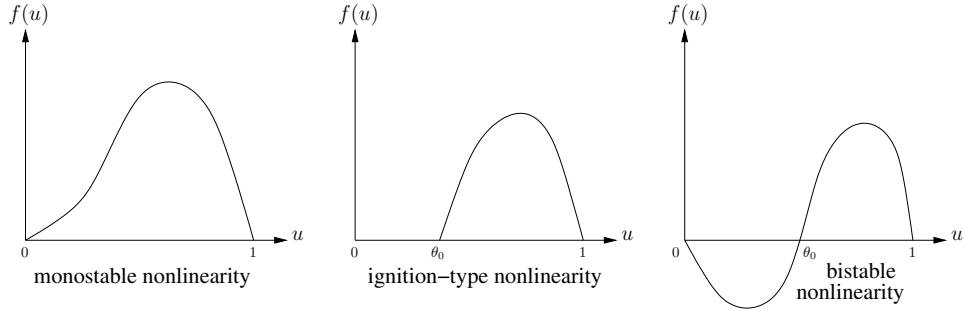
Il y a donc un lien clair entre les deux notions dans le cas de l'équation de Fisher-KPP homogène. Mais les deux notions peuvent diverger pour des équations plus complexes, et nous serons amenés à considérer l'une ou l'autre suivant les questions et variantes abordées.

3 Domaines d'application et autres types de nonlinéarités

Ce modèle d'un principe particulièrement simple donne ainsi lieu à des phénomènes mathématiques non-triviaux. Il a depuis été décliné et généralisé dans de nombreux champs d'applications, parmi lesquels :

- la dynamique des populations
- la chimie, pour laquelle ce sont plutôt des systèmes de réaction-diffusion qui sont utilisés (voir par exemple l'article pionnier de Turing [100])
- la théorie de la combustion [59, 104], pour laquelle les nonlinéarités sont de type ignition (voir Figure 0.3),
- la génétique [6, 9],
- les sciences humaines [4].

Nous considérerons dans ce manuscrit essentiellement des nonlinéarités du type Fisher-KPP. Mais nous serons amenés à mentionner les équations monostables, bistables et de type ignition afin de discuter des résultats, pour lesquelles la nonlinéarité $ru(1 - u)$ est remplacée par une fonction $f(u)$ de la forme décrite Figure 0.3.



Cette habilitation à diriger des recherches se situe dans le domaine des mathématiques appliquées. Notre but est donc de comprendre les phénomènes de propagation pour des équations de réaction-diffusion plus complexes que l'équation de Fisher-KPP, ces variantes étant motivées par les champs d'application décrits plus haut, en particulier la dynamique des populations, et d'interpréter quand c'est possible les résultats obtenus au regard des applications recherchées.

4 Plan du manuscrit

Le chapitre 1 de ce manuscrit traitera de l'équation de Fisher-KPP avec coefficients hétérogènes généraux : on supposera seulement que ces coefficients sont uniformément continus et bornés en (t, x) . Une première section sera consacrée aux vitesses d'expansion pour les solutions du problème de Cauchy, c'est-à-dire que l'on construira des bornes les plus précises possibles localisant les lignes de niveau de ces solutions. Ces bornes seront optimales sous différents jeux d'hypothèses additionnelles sur les coefficients : presque périodicité, unique ergodicité, homogénéité dans chaque direction etc. La deuxième section sera consacrée à l'existence de solutions globales en temps particulières : les *fronts de transition généralisés*. Ces fronts sont des solutions globales connectant spatialement deux états stationnaires de l'équation, avec une interface de profondeur uniformément bornée en temps. L'existence de tels fronts sera démontrée pour les équations de Fisher-KPP avec des coefficients ne dépendant que de t , ou bien dépendant de façon générale de t et étant périodiques en x , ainsi que pour des coefficients presque périodiques en x . La notion alternative de *front critique* sera discutée pour les équations unidimensionnelles.

Cette notion repose sur le décompte du nombre de zéros pour les solutions d'équations paraboliques, un front critique étant une solution globale en temps plus pentues en x que toutes les autres solutions globales.

Le chapitre 2 étudie l'existence et les propriétés asymptotiques des traveling waves pour les équations de Fisher-KPP avec saturation non-locale. De telles équations n'admettent plus de principe de comparaison, rendant caduques la plupart des méthodes utilisées pour traiter des équations locales. Dans un de mes travaux de thèse [BNPR09], nous avons établi l'existence de traveling waves pour une équation avec non-localité symétrique, sans toutefois déterminer en général le comportement asymptotique de la traveling wave : celle-ci décolle de l'état instable mais on ne sait pas si elle converge vers l'état stationnaire homogène 1. Dans une première section, je présente une approche numérique nouvelle permettant de construire ces traveling waves, et appuyant la conjecture d'une convergence vers l'état stationnaire homogène 1, quand bien même celui-ci deviendrait instable. La deuxième section discute d'un "toy-model" avec noyau asymétrique, pour lequel nous arrivons à construire une grande variété de traveling waves, avec divers comportements asymptotiques. Enfin, la dernière section étudie l'équation de Fisher-KPP à retard, correspondant à une équation non-locale avec noyau asymétrique, pour laquelle nous montrons au contraire que les traveling waves ont un comportement asymptotique bien déterminé.

Dans un troisième chapitre, je présente des résultats récents sur une version microscopique de l'équation de Fisher-KPP : la densité n'est plus seulement paramétrée en t et en x , mais également en vitesse v , les particules changeant de vitesse avec une certaine densité de probabilité $M(v)$ d'atteindre la vitesse v . Si $M(v)$ est une somme de deux Dirac autour de 0, alors on aboutit à une équation de Fisher-KPP avec un terme hyperbolique, pour laquelle on peut construire des traveling waves régulières, comme pour Fisher-KPP, ou singulières, plutôt proche des chocs hyperboliques. Cette équation peut être vue comme une équation de réaction-diffusion avec un retard dans la loi de diffusion. Une telle équation a été utilisée pour comprendre la propagation de l'agriculture en Europe au Néolithique, application que je décris dans la deuxième section. Pour un noyau $M(v)$ à support compact, on peut encore construire des traveling waves et caractériser leur vitesse minimale, comme décrit dans la troisième section. La situation se complique par contre quand le noyau n'a plus de support compact : les traveling waves n'existent plus et il s'agit alors de localiser les lignes de niveau des solutions du problème de Cauchy, qui croissent surlinéairement. Nous avons considéré le cas modèle d'un noyau Gaussien, pour lequel nous avons tout d'abord réussi à localiser les lignes de niveau entre deux bornes en $t^{3/2}$. Dans la cinquième section, je présente des résultats sur la linéarisation de l'équation, pour laquelle on peut faire un passage à la limite avec un scaling approprié, avant d'en déduire une conjecture sur la localisation des lignes de niveau, qui se comportent vraisemblablement exactement en $t^{3/2}$.

Enfin, le quatrième chapitre étudie la dépendance entre la vitesse de propagation et les coefficients dans le cas d'une équation de Fisher-KPP périodique en espace. En effet, dans ce cas, la vitesse peut-être caractérisée à l'aide d'une famille de valeurs propres, rendant abordable ce problème. La première section formalise mathématiquement le problème important en écologie de l'influence de la fragmentation de l'environnement sur la vitesse d'invasion : on peut montrer que, en dimension 1, cette question se traduit mathématiquement en comparant la vitesse liée à un certain taux de croissance et celle associée à son réarrangement de Schwarz. On montre alors que la fragmentation ralentit la propagation, à l'aide d'une nouvelle formule pour les valeurs propres d'opérateurs non-auto-adjoints. Cette question est plus difficile à formaliser en dimension N , le réarrangement n'étant pas défini de façon univoque. La section 2 étudie le cas le plus simple : l'optimisation d'une valeur propre symétrique en fonction d'un potentiel ne prenant que deux valeurs, l'inconnue étant alors la zone où le potentiel est le plus grand (l'habitat) et ayant une aire fixée. Numériquement, en dimension 2, l'optimiseur ressemble à des bandes, des boules ou des complémentaires de boule, mais on peut en fait montrer analytiquement que son bord ne contient aucun bout de sphère, ce qui ouvre de nouvelles questions. Enfin, dans une troisième section, je présenterai brièvement d'autres résultats de dépendance sur la vitesse : la limite de scaling pour de grandes périodes,

une série de contre-exemples concernant par exemple l'influence de la diffusion et l'étude du cas de coefficients aléatoires stationnaires ergodiques.

Introduction

Chapitre 1

Équations de réaction-diffusion complètement hétérogènes

Ce chapitre est dédié aux phénomènes de propagation pour les équations de réaction-diffusion en milieux hétérogènes, c'est-à-dire des équations de la forme :

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(t,x) \partial_{x_i x_j} u - \sum_{i=1}^N q_i(t,x) \partial_{x_i} u = r(t,x) u(1-u) \quad \text{dans } I \times \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

où $I = (0, \infty)$ ou $I = \mathbb{R}$, $A(t,x) = (a_{i,j}(t,x))_{i,j}$ est un champ de matrices elliptique ($0 < \underline{\nu} I_N \leq A(t,x) \leq \bar{\nu} I_N$ pour tout (t,x)) et le terme de réaction r est d'infimum positif. Notre objectif est de comprendre la dynamique de cette équation pour des coefficients dépendant de façon générale des variables de temps t et d'espace x . Nous supposerons seulement que les coefficients sont uniformément continus et bornés en (t,x) .

Introduire de l'hétérogénéité dans les équations de réaction-diffusion est tout à fait pertinent du point de vue de la modélisation. Si les modèles issus de la génétique [6] ou de la combustion [59] sont naturellement plutôt homogènes, cela ne peut être qu'une approximation pour les modèles de dynamique des populations. Nous renvoyons à [32, 88, 96] pour des discussions plus détaillées sur l'origine de l'hétérogénéité et les modèles afférents.

Afin de comprendre l'effet de l'hétérogénéité sur les équations de réaction-diffusion, la communauté a d'abord considéré dans les années 90 et 2000 des classes d'hétérogénéité particulières telles que des hétérogénéités transverses à la direction de propagation [21] ou périodiques (voir [14, 95, 103] et les nombreuses publications qui ont suivies). J'ai contribué à cette compréhension au cours de ma thèse, où j'ai étudié le cas des équations de Fisher-KPP périodiques à la fois en temps et en espace : existence, unicité et attractivité d'un état stationnaire positif [N10], définitions et propriétés des valeurs propres principales associées [N09-1], existence de fronts pulsatoires [N09-2], relations entre leurs vitesses et les coefficients [N11] et, en collaboration avec H. Berestycki et F. Hamel, preuves alternatives de l'existence d'une vitesse d'expansion [BHN08] à celle de H. Weinberger [101], reposant sur des arguments EDPistes.

Le cas des équations périodiques ayant été largement étudié dans les années 90 et 2000, l'actualité des équations de réaction-diffusion hétérogènes consiste entre autre aujourd'hui en l'étude de l'équation (1.1) sans faire d'hypothèses sur les coefficients autres que leur bornitude et leur régularité uniforme. En d'autres termes, on considère des milieux hétérogènes ne rentrant pas dans une classe particulière telle que des hétérogénéités périodiques ou ne dépendant que d'une variable transverse.

Il serait également pertinent de considérer une équation homogène dans un domaine Ω non-trivial au lieu de \mathbb{R}^N , afin de modéliser par exemple le franchissement d'un obstacle [15] ou d'un col [20] par une population, ou encore la propagation d'un accident vasculaire cérébral [10, 11, 33] (nous renvoyons également à [68] pour l'étude de l'équation par courbure moyenne, qui est un cas limite de l'équation de réaction-diffusion bistable, dans un cylindre en dents de scie). Tous les travaux que je vais présenter plus bas ont été menés dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, mais il est évident que la généralisation de ces résultats à des domaines Ω plus généraux en constitue une perspective naturelle.

Nous aborderons dans ce chapitre deux questions :

Question 1. *Pour des équations à coefficients dépendant de façon générale du temps et de l'espace :*

1. *Comment localiser les lignes de niveau des solutions du problème de Cauchy ?*
2. *Existe-t-il des fronts de transition généralisés ?*

1.1 Vitesses d'expansion en milieu complètement hétérogène

1.1.1 État de l'art dans le cas périodique

Rappelons tout d'abord les résultats obtenus dans les années 2000 dans le cas où les coefficients sont périodiques en t et en x : il existe (L_1, \dots, L_N, T) tels que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} A(t, x + L_i e_i) &= A(t, x), & A(t + T, x) &= A(t, x), \\ q(t, x + L_i e_i) &= q(t, x), & q(t + T, x) &= q(t, x), \\ f(t, x + L_i e_i, u) &= f(t, x, u), & f(t + T, x, u) &= f(t, x, u), \end{aligned}$$

où (e_1, \dots, e_N) est la base canonique de \mathbb{R}^N .

On sait que dans ce cas, sous certaines hypothèses raisonnables sur les coefficients, l'équation (1.1) admet des solutions du type *fronts pulsatoires* [18, N09-2], c'est-à-dire de solutions $u(t, x) = \phi(x \cdot e - ct, t, x)$, où $\phi = \phi(z, t, x)$ est périodique en t et en x , $\phi > 0$, $\phi(+\infty, t, x) = 0$ et $\liminf_{z \rightarrow -\infty} \inf_{t, x} \phi(z, t, x) > 0$, c étant ici la *vitesse* du front et $e \in \mathbb{S}^{N-1}$ sa *direction*. Cette vitesse peut être caractérisée par une famille de valeurs propres associées aux opérateurs paraboliques

$$L_p \phi = -\partial_t \phi + \text{tr}(A \nabla^2 \phi) - 2pA \nabla \phi + q \cdot \nabla \phi + (pAp + r + q \cdot p)\phi. \quad (1.2)$$

Les coefficients de ces opérateurs étant périodiques en (t, x) , la théorie de Krein-Rutman s'applique : pour tout $p \in \mathbb{R}^N$, L_p admet une unique *valeur propre principale périodique* $k_p = k_p(A, q, c)$ associée à une fonction propre périodique en (t, x) et positive, appelée *fonction propre principale périodique*, c'est-à-dire un couple (k_p, ϕ_p) solution de :

$$\begin{cases} L_p \phi_p = k_p \phi_p \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ \phi_p > 0, \\ \phi_p \text{ est périodique en } (t, x). \end{cases} \quad (1.3)$$

La vitesse minimale d'existence des fronts est alors caractérisée par

$$c_e^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k_{\lambda e}(A, q, c)}{\lambda}. \quad (1.4)$$

On peut d'autre part localiser les lignes de niveau de $u(t, \cdot)$, où u est la solution du problème de Cauchy associé à l'équation avec donnée initiale positive, non-nulle, à support compact. Ces ensembles

1.1. Vitesses d'expansion en milieu complètement hétérogène

de niveau ne convergent plus vers des boules, comme pour l'équation homogène, mais s'approchent d'ensembles de la forme $t\mathcal{S}$, au sens suivant [43, BHN08, 101] :

$$\begin{cases} \text{pour tout compact } K \subset \text{int}\mathcal{S}, & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{x \in tK} |u(t, x) - 1| \right\} = 0, \\ \text{pour tout fermé } F \subset \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{S}, & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{x \in tF} |u(t, x)| \right\} = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

L'ensemble \mathcal{S} est appelé *ensemble d'expansion*, ou encore *Wulff shape* par analogie avec la cristallographie [102], et se caractérise à l'aide des valeurs propres périodiques :

$$\mathcal{S} = \{x, \forall p \in \mathbb{R}^N, k_p \geq p \cdot x\}. \quad (1.6)$$

On peut reformuler ce résultat en définissant une vitesse d'expansion w_e^* dans chaque direction $e \in \mathbb{S}^{N-1}$:

$$\begin{cases} \liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t, x + wte) = 1 & \text{si } 0 \leq w < w^*(e), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x + wte) = 0 & \text{si } w > w^*(e), \end{cases} \quad (1.7)$$

Cette vitesse est par ailleurs reliée à la vitesse minimale d'existence des fronts via l'identité suivante :

$$w_e^* = \min_{\xi \cdot e > 0} \frac{c_\xi^*}{e \cdot \xi} = \min_{p \cdot e > 0} \frac{k_p}{p \cdot e}. \quad (1.8)$$

1.1.2 Le cas de la dimension 1

Considérons maintenant l'équation de Fisher-KPP hétérogène en espace en dimension 1 :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x(a(x)\partial_x u) = r(x)u(1-u) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.9)$$

où $u_0 \not\equiv 0$ est une fonction continue à support compact, telle que $0 \leq u_0 \leq 1$ et a, c sont des fonctions uniformément bornées et continues d'infimum positif. Nous avons étudié avec H. Berestycki [BN12] les vitesses de propagation associées à l'équation (1.9).

Au cours de ma thèse, j'avais obtenu avec H. Berestycki et F. Hamel des estimations sur la localisation des lignes de niveau de $u(t, \cdot)$, qui montraient notamment dans le cas d'une hétérogénéité à support compact que les vitesses de propagation ne dépendaient que de l'hétérogénéité des coefficients à l'infini. Cependant ces estimations restaient insatisfaisantes puisqu'elles n'étaient pas optimales dans le cas d'une hétérogénéité périodique. De fait, ce que nous enseigne le cas des coefficients périodiques, c'est que l'hétérogénéité des coefficients doit être prise en compte à travers une notion de valeurs propres pour les opérateurs L_p définis par (1.2). Cependant, pour des hétérogénéités arbitraires, les opérateurs L_p ne sont plus compacts et la théorie de Krein-Rutman ne s'applique plus.

Nous avons surmonté cette difficulté en utilisant la notion de *valeur propre généralisée*, inspirée par la notion introduite par H. Berestycki et ses collaborateurs dans [19, 22, 24]. Définissons deux *valeurs propres principales généralisées* associées à l'opérateur L_p dans (R, ∞) :

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_1(L_p, (R, \infty)) &:= \sup\{\lambda \mid \exists \phi \in \mathcal{A}_R, L_p \phi \geq \lambda \phi \text{ dans } (R, \infty)\} \\ \overline{\lambda}_1(L_p, (R, \infty)) &:= \inf\{\lambda \mid \exists \phi \in \mathcal{A}_R, L_p \phi \leq \lambda \phi \text{ dans } (R, \infty)\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

les fonctions-tests étant prises dans

$$\mathcal{A}_R := \left\{ \phi \in \mathcal{C}^2(R, \infty), \phi'/\phi \in L^\infty, \phi > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \phi(x) = 0 \right\}. \quad (1.11)$$

Notons que la condition à l'infini sur les fonctions-tests $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \phi(x) = 0$ est différente (et plus générale) que les conditions de bornitude utilisées dans [19, 22], cela afin d'obtenir des résultats optimaux dans le cas de coefficients aléatoire stationnaires ergodiques.

Le résultat suivant nous permet de vérifier que ces notions sont bien des généralisations de la notion classique de valeur propre.

Proposition 1.1. *Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $R \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{A}_R$ tels que $\mathcal{L}\phi = \lambda\phi$ dans (R, ∞) . Alors,*

$$\lambda = \underline{\lambda}_1(\mathcal{L}, (R, \infty)) = \overline{\lambda}_1(\mathcal{L}, (R, \infty)).$$

En particulier, si c est périodique, on peut montrer que $\underline{\lambda}_1(L_p, (R, \infty)) = \overline{\lambda}_1(L_p, (R, \infty)) = k_p$ la valeur propre principale périodique pour tout R .

Nous associons à ces valeurs propres deux vitesses par des formules analogues au cas périodique (1.8) :

$$\underline{w} = \min_{p>0} \sup_{R>0} \frac{\lambda_1(L_p, (R, \infty))}{p} \quad \text{et} \quad \overline{w} = \min_{p>0} \inf_{R>0} \frac{\overline{\lambda}_1(L_p, (R, \infty))}{p}. \quad (1.12)$$

Theorem 1.2. [BN12] *Soit u_0 une fonction mesurable à support compact telle que $0 \leq u_0 \leq 1$, $u_0 \not\equiv 0$ et soit u la solution du problème de Cauchy (1.9). Alors*

1. *pour tout $w > \overline{w}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \geq wt} |u(t, x)| = 0$,*
2. *pour tout $w \in [0, \underline{w}]$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq x \leq wt} |u(t, x) - 1| = 0$.*

Les lignes de niveau de $u(t, \cdot)$ sont donc bien localisées entre les droites $\underline{w}t$ et $\overline{w}t$, à correction sous-linéaire près.

Dans le cas de coefficients périodiques, on retrouve bien la vitesse $\underline{w} = \overline{w} = \min_{p>0} \frac{k_p}{p} = w^*$. Mais on peut prouver l'identité $\underline{w} = \overline{w}$, et ainsi localiser précisément les lignes de niveau de $u(t, \cdot)$, pour des classes d'hétérogénéités plus générales, telles que des coefficients presque périodiques, presque périodiques à l'infini, ou aléatoires stationnaires ergodiques.

1.1.3 Oscillation des lignes de niveau et non-existence d'une vitesse d'expansion exacte

Pour des hétérogénéités générales, il n'est pas tout le temps vraie qu'il existe une vitesse de propagation exacte, telle que $\underline{w} = \overline{w}$. J'ai construit un contre-exemple dans un travail avec J. Garnier et T. Giletti [GGN12], en utilisant un taux de croissance du type

$$r(x) = r_0(x/L(x)) \quad \text{où } r_0 \text{ est périodique et } L(x) \text{ croît suffisamment vite}$$

(comme $x/(\ln x)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ par exemple) alors on peut montrer que les lignes de niveau oscillent exactement entre $2\sqrt{\min r_0}t$ et $2\sqrt{\max r_0}t$. Plus précisément,

$\forall w \in (2\sqrt{\min r_0}, 2\sqrt{\max r_0})$, l'ensemble ω -limite quand $t \rightarrow +\infty$ de $t \mapsto u(t, wt)$ est égale à $[0, 1]$.

Il s'agit du premier contre-exemple explicite à l'existence d'une vitesse d'expansion exacte, bien que l'idée générale conduisant à un tel phénomène était plus ou moins dans toutes les têtes.

Si au contraire $L(x)$ croît lentement (comme $x/(\ln x)^\alpha$, $\alpha > 1$ par exemple), alors en utilisant le Théorème 1.2, on peut montrer que $\underline{w} = \overline{w} = w_\infty^*$, où l'on retrouve la vitesse w_∞^* définie par (4.6) et obtenue dans [HNR11] comme limite des vitesses de propagation associées à un taux de croissance $c_0(x/L)$ quand $L \rightarrow +\infty$.

Plusieurs autres types de phénomènes pouvant conduire à une oscillation des lignes de niveau, et donc à la non-existence d'une vitesse de propagation exacte, ont été identifiés ces dernières années. Hamel

1.1. Vitesses d'expansion en milieu complètement hétérogène

et Sire [54] ont retrouvé de tels phénomènes pour des équations de réaction-diffusion homogènes de type ignition, avec des données initiales oscillant périodiquement entre deux valeurs sous la température d'ignition. Nous avons également étudié avec F. Hamel [HN11] le cas d'une équation de Fisher-KPP homogène avec des données initiales décroissant exponentiellement entre deux taux de décroissance. Si la donnée initiale oscille périodiquement entre deux exponentielles, alors il existe toujours une vitesse de propagation exacte, qu'on peut caractériser explicitement. Mais si les oscillations sont de plus en plus amples, alors on peut construire des exemples où il existe toujours deux vitesses d'expansion $\underline{w} < \overline{w}$ telles que l'ensemble ω -limite de la fonction $u(t, wt)$ quand $t \rightarrow +\infty$ est exactement $[0, 1]$ si $w \in (\underline{w}, \overline{w})$.

1.1.4 Milieux aléatoires stationnaires ergodiques en dimension 1

Supposons que le terme de réaction est une variable aléatoire $r : (x, \omega, s) \in \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble de probabilité $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ et que $a \equiv 1$ et $q \equiv 0$ (afin de simplifier la présentation). On suppose que r est stationnaire, au sens où il existe un groupe $(\pi_x)_{x \in \mathbb{R}}$ de transformation préservant la mesure de probabilité tel que $r(x + y, \omega) = fr(x, \pi_y \omega)$ pour tout $(x, y, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$, et ergodique, au sens où si $\pi_x A = A$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour un $A \in \mathcal{F}$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ or 1.

L'hypothèse de stationnarité signifie que les propriétés statistiques du milieu ne dépendent pas de l'endroit où on observe celui-ci. L'ergodicité signifie qu'on ne peut pas séparer Ω en deux sous-ensembles de mesures non-nulles invariants par le groupe $(\pi_x)_{x \in \mathbb{R}}$.

Freidlin et Gartner [43]. ont montré les premiers que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe une vitesse d'expansion, qu'on peut calculer en utilisant une famille d'exposants de Lyapounov associés à la linéarisation de l'équation autour de $u \equiv 0$. Ce résultat a été généralisé par Nolen et Xin à différentes équations de réaction-diffusion à coefficients aléatoires stationnaires ergodiques en t et en x , en dimension N [80, 81, 82].

On peut retrouver ce résultat à l'aide du Théorème 1.2, qui nous donne de plus une nouvelle caractérisation de la vitesse à partir des valeurs propres généralisées.

Theorem 1.3. *Sous les hypothèses énoncées plus haut, on a*

$$\overline{w} = \underline{w} = \min_{p>0} \frac{\overline{\lambda}_1(L_p, \mathbb{R})}{p} = \min_{p>0} \frac{\lambda_1(L_p, \mathbb{R})}{p} \quad (1.13)$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Ce résultat est en fait un corollaire immédiat du résultat suivant et du Théorème 1.2.

Theorem 1.4. *Pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a $\underline{\lambda}_1(L_p, \mathbb{R}) = \overline{\lambda}_1(L_p, \mathbb{R})$ pour tout $p > 0$.*

Ce résultat est obtenu par construction explicite de fonctions propres et application de la Proposition 1.1. Notons que celles-ci sont dans la classe $\mathcal{A}_{-\infty}$, c'est-à-dire qu'elles sont seulement sous-exponentielles, mais pas forcément bornées, ce qui aura son importance pour l'extension des résultats à \mathbb{R}^N .

1.1.5 Énoncé du résultat en dimension N

Revenons maintenant à l'équation de Fisher-KPP générale et multi-dimensionnelle (1.1). Les résultats que nous allons énoncer sont vrais pour une équation de la forme divergence (en d'autres termes, $q \equiv \nabla \cdot A$), comme en dimension 1, ou plus généralement pour un terme d'advection q pas trop différent de la divergence de A , au sens où :

$$\sup_{R>0} \inf_{t>R, |x|>R} \left(4f'_u(t, x, 0) \min_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} (eA(t, x)e) - |q(t, x) - \nabla \cdot A(t, x)|^2 \right) > 0. \quad (1.14)$$

Chapitre 1. Équations de réaction-diffusion complètement hétérogènes

Nous avons vu qu'en dimension 1, seule la valeur des coefficients en $t > R$ et $x > R$, avec R grand, comptait dans le calcul des vitesses d'expansion. Il nous faut donc d'abord comprendre à quel domaine en x on peut se restreindre en dimension N . Soit $C_{R,\alpha}(e)$ le cône tronqué de direction e et d'angle d'ouverture α :

$$C_{R,\alpha}(e) := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad t > R, \quad |x| > R, \quad \left| \frac{x}{|x|} - e \right| < \alpha \right\}. \quad (1.15)$$

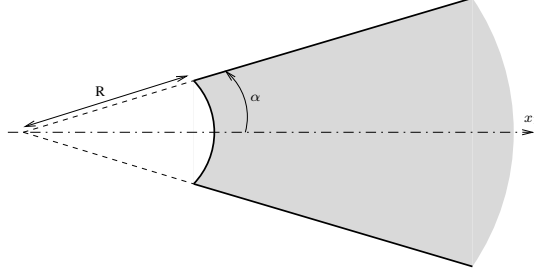


FIGURE 1.1 – Projection sur les coordonnées x du cône tronqué $C_{R,\alpha}(e_1)$.

Avertissons tout de suite le lecteur que les vitesses d'expansion dans la direction e ne se calculeront pas uniquement en considérant ce qui se passe dans $C_{R,\alpha}(e)$: leur caractérisation sera plus compliquée en général.

Introduisons ensuite les opérateurs paraboliques :

$$L_p \phi := e^{-p \cdot x} \mathcal{L}(e^{p \cdot x} \phi) = -\partial_t \phi + \text{tr}(A(t, x) \nabla^2 \phi) + (q(t, x) + 2A(t, x)p) \cdot \nabla \phi + (f'_u(t, x, 0) + p \cdot q(t, x) + pA(t, x)p) \phi \quad (1.16)$$

et ses valeurs propres généralisées dans tout ouvert $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$:

$$\underline{\lambda}_1(\mathcal{L}, Q) := \sup \{ \lambda \mid \exists \phi \in \mathcal{C}^{1,2}(Q) \cap W^{1,\infty}(Q), \inf_Q \phi > 0 \text{ et } \mathcal{L}\phi \geq \lambda \phi \text{ dans } Q \}, \quad (1.17)$$

$$\overline{\lambda}_1(\mathcal{L}, Q) := \inf \{ \lambda \mid \exists \phi \in \mathcal{C}^{1,2}(Q) \cap W^{1,\infty}(Q), \inf_Q \phi > 0 \text{ et } \mathcal{L}\phi \leq \lambda \phi \text{ dans } Q \}. \quad (1.18)$$

Cette définition est moins précise que celle utilisée en dimension 1, puisque les fonctions-tests sont choisies parmi les fonctions bornées et d'infimum positif, alors que nous considérons l'ensemble plus général défini dans (1.11) des fonctions sous-exponentielles en dimension 1. Nous avons eu besoin de cette hypothèse de bornitude sur les fonctions-tests pour obtenir une comparaison entre $\underline{\lambda}_1$ et $\overline{\lambda}_1$ dans les cônes $C_{R,\alpha}(e)$. Cette lacune aura son importance en particulier pour le cas des coefficients aléatoires stationnaires ergodiques.

Nous sommes maintenant en position de définir deux fonctions amenées à jouer le rôle de Hamiltoniens :

$$\overline{H}(e, p) := \inf_{R>0, \alpha \in (0,1)} \overline{\lambda}_1(L_p, C_{R,\alpha}(e)) \text{ et } \underline{H}(e, p) := \sup_{R>0, \alpha \in (0,1)} \underline{\lambda}_1(L_p, C_{R,\alpha}(e)) \quad (1.19)$$

pour tout $p \in \mathbb{R}^N$ et $e \in \mathbb{S}^{N-1}$. Ces Hamiltoniens satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 1.5. 1. Les fonctions $p \rightarrow \overline{H}(e, p)$ et $p \rightarrow \underline{H}(e, p)$ sont localement Lipschitziennes, uniformément par rapport à $e \in \mathbb{S}^{N-1}$, et $p \mapsto \overline{H}(e, p)$ est convexe pour tout $e \in \mathbb{S}^{N-1}$.

1.1. Vitesses d'expansion en milieu complètement hétérogène

2. Pour tout $p \in \mathbb{R}^N$, $e \mapsto \underline{H}(e, p)$ est semi-continue inférieure et $e \mapsto \overline{H}(e, p)$ est semi-continue supérieure.
3. Il existe $C \geq c > 0$ tel que pour tout $(e, p) \in \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{R}^N$:

$$c(1 + |p|^2) \leq \underline{H}(e, p) \leq \overline{H}(e, p) \leq C(1 + |p|^2).$$

La dernière propriété permet de définir les fonctions convexes conjuguées :

$$\underline{H}^*(e, q) := \sup_{p \in \mathbb{R}^N} (p \cdot q - \underline{H}(e, p)) \quad \text{et} \quad \overline{H}^*(e, q) := \sup_{p \in \mathbb{R}^N} (p \cdot q - \overline{H}(e, p)),$$

ainsi que les “fonctions-coûts” associées :

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &:= \inf \max_{t \in [0,1]} \left\{ \int_t^1 \underline{H}^* \left(\frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}, -\gamma'(s) \right) ds, \quad \gamma \in H^1([0,1]), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = x, \right. \\ &\quad \left. \forall s \in (0,1), \gamma(s) \neq 0 \right\}, \\ \overline{U}(x) &:= \inf \max_{t \in [0,1]} \left\{ \int_t^1 \overline{H}^* \left(\frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}, -\gamma'(s) \right) ds, \quad \gamma \in H^1([0,1]), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = x, \right. \\ &\quad \left. \forall s \in (0,1), \gamma(s) \neq 0 \right\}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Enfin, nous définissons les deux *ensembles d'expansion* :

$$\underline{\mathcal{S}} := \text{cl}\{\underline{U} = 0\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{S}} := \{\overline{U} = 0\}. \tag{1.21}$$

On peut montrer que les ensembles $\underline{\mathcal{S}}$ et $\overline{\mathcal{S}}$ sont compacts, étoilés par rapport à 0 et contiennent une boule centrée en 0.

Dans le cas de coefficients périodiques, les Hamiltoniens \underline{H} et \overline{H} sont en fait indépendants de e et tous deux égaux à la valeur propre périodique k_p définie par (1.3), et on peut calculer explicitement $\underline{U}(x) = \overline{U}(x) = \max\{0, H^*(-x)\}$, où $H(p) := k_p$. On retrouve ainsi la Wulff shape $\underline{\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ définie par (1.6).

Nous sommes maintenant en position d'énoncer notre résultat principal.

Theorem 1.6. Soit u_0 une fonction mesurable à support compact tel que $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$ et soit u la solution de l'équation (1.1) avec donnée initiale $u(0, x) = u_0(x)$. Alors

$$\begin{cases} \text{pour tout ensemble compact } K \subset \text{int}\underline{\mathcal{S}}, & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{x \in tK} |u(t, x) - 1| \right\} = 0, \\ \text{pour tout ensemble fermé } F \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathcal{S}}, & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{x \in tF} |u(t, x)| \right\} = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Il n'est pas possible, dans ce cadre général, d'exprimer simplement les vitesses d'expansion dans chaque direction comme dans le cas périodique. On ne peut à ce stade les définir que comme $\underline{w}_e := \sup\{w, w \in \underline{\mathcal{S}}\}$ et $\overline{w}_e := \sup\{w, w \in \overline{\mathcal{S}}\}$.

Ce résultat n'est pas optimal, car il ne couvre pas le cas de coefficients aléatoires stationnaires ergodiques, pour lesquels l'existence de vitesses exactes d'expansion est connue [80], c'est-à-dire pour lesquels $\underline{\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{S}}$. Nous n'avons pas réussi, contrairement au cas de la dimension 1, à construire des fonctions propres sous-exponentielles, ni à contredire une telle existence. Dans les articles d'homogénéisation, cette difficulté est contournée en utilisant une notion relaxée de correcteur (voir par exemple [67], mais cette approche ne nous paraissait pas adaptée pour traiter du cas général.

Cependant, ce Théorème couvre tous autres cas où l'existence d'une vitesse exacte d'expansion était connus, et nous arrivons également à montrer que $\underline{\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{S}}$ dans des cas jusqu'ici ouverts : les équations à coefficients uniquement ergodiques ou homogènes dans chaque direction.

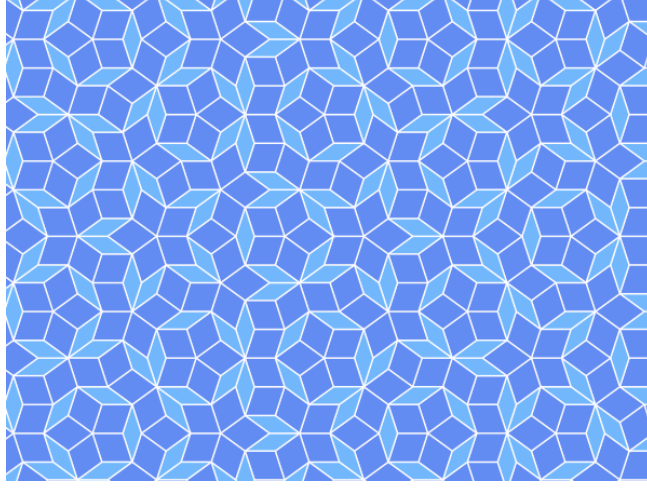


FIGURE 1.2 – Une représentation du pavage de Penrose

1.1.6 Milieux uniquement ergodiques

Nous utiliserons dans ce manuscrit la définition suivante d'unique ergodicité.

Definition 1.7. Une fonction uniformément continue et bornée $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite **uniquement ergodique** si pour toute fonction continue $\Psi : \mathcal{H}_f \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{H}_f := cl\{f(\cdot + a), a \in \mathbb{R}^N\}$, la fermeture étant prise pour la convergence localement uniforme, la limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|B_R(a)|} \int_{B_R(a)} \Psi(\tau_y f) dy$$

existe et est uniforme en $a \in \mathbb{R}^N$.

Cette limite définit une mesure de probabilité \mathbb{P} sur \mathcal{H}_f , qui est invariante par rapport aux translations $g \mapsto g(\cdot + a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^N$. On peut montrer qu'une telle mesure est unique, d'où le nom d'unique ergodicité. Dans la littérature, c'est plutôt cette propriété qui définit l'unique ergodicité, la convergence des moyennes sur $B_R(a)$ étant plutôt vue comme une conséquence de l'unicité de la mesure \mathbb{P} .

On vérifie facilement que les fonctions périodiques, presque périodiques ou à support compact sont uniquement ergodiques.

Un exemple classique de fonction uniquement ergodique est construite à partir du pavage de Penrose. Nous renvoyons à [85] pour une définition de celui-ci. Si on définit sur chaque tuile une fonction à support compact dans cette tuile, la fonction ainsi obtenue sur \mathbb{R}^N est uniquement ergodique [74, 85]. Pour autant, elle n'est pas presque périodique. La classe des fonctions uniquement ergodiques est donc plus large que celle des fonctions presque périodiques.

Theorem 1.8. Supposons que A , q et c ne dépendent que de x et sont uniquement ergodiques, où $c \in C_{loc}^\delta(\mathbb{R}^N)$ est une fonction uniformément continue et bornée donnée. Définissons l'opérateur elliptique : $\mathcal{L} = tr(A\nabla^2) + q \cdot \nabla + c$. Alors

$$\underline{\lambda}_1(\mathcal{L}, \mathbb{R}^N) = \overline{\lambda}_1(\mathcal{L}, \mathbb{R}^N).$$

1.1. Vitesses d'expansion en milieu complètement hétérogène

On déduit tout de suite le résultat suivant des Théorèmes 1.6 et 1.8.

Corollary 1.9. *Supposons que A , q et $f'_u(\cdot, 0)$ ne dépendent que de x et sont uniquement ergodiques, alors $\underline{\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{S}}$ et*

$$\overline{w}(e) = \underline{w}(e) = \min_{p \cdot e > 0} \frac{\overline{\lambda}_1(L_{-p}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)}{p \cdot e} = \min_{p \cdot e > 0} \frac{\lambda_1(L_{-p}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)}{p \cdot e}. \quad (1.23)$$

Le Théorème 1.8 est un résultat puissant qui devrait trouver d'autres applications à partir de la théorie des valeurs propres généralisées [24] : existence et unicité des solutions de problèmes non-linéaires, principes de comparaison pour les opérateurs elliptiques etc.

1.1.7 Milieux homogènes dans chaque direction et convexité des ensembles d'expansion

Considérons maintenant des hétérogénéités spatiales convergeant quand $|x| \rightarrow +\infty$ dans des secteurs angulaires de \mathbb{R}^2 . Commençons par le cas où la matrice de diffusion A converge vers deux valeurs différentes quand $x_1 \rightarrow \pm\infty$.

Proposition 1.10. *Supposons que $N = 2$, $q \equiv 0$, f ne dépend pas de (t, x) et $A(x_1, x_2) = a(x_1)I_2$ est une fonction régulière telle que $\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} a(x_1) = a_{\pm}$, avec $a_+ > a_- > 0$. Alors $\overline{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}$ et cet ensemble est l'enveloppe convexe de*

$$\{x \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 2\sqrt{f'(0)a_+}, x_1 \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 2\sqrt{f'(0)a_-}, x_1 \leq 0\}.$$

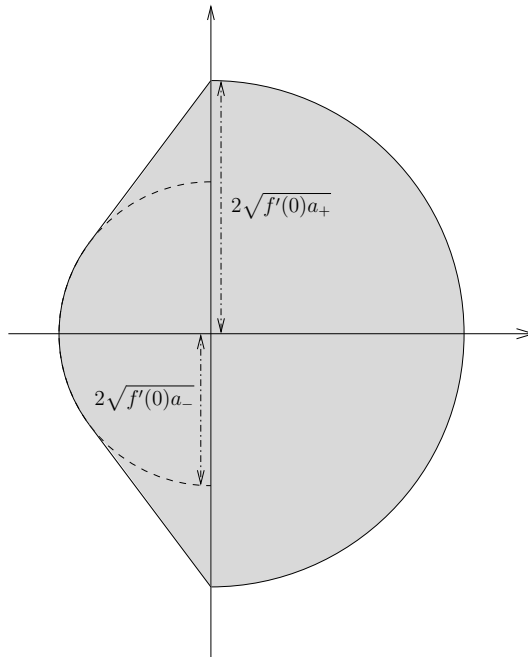


FIGURE 1.3 – L'ensemble d'expansion $\overline{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}$ donné par la Proposition 1.10.

On peut montrer que pour ce type de coefficients, constants à l'infini dans des secteurs angulaires, il existe toujours un ensemble d'expansion exact, c'est-à-dire que $\overline{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}$. Nous passerons sur l'énoncé de ce type de résultat assez technique.

Il est tentant de conjecturer qu'on peut toujours caractériser, pour ce type d'hétérogénéités, l'ensemble d'expansion comme l'enveloppe convexe des ensembles d'expansion associés aux valeurs des coefficients dans chaque secteur angulaire. Cette hypothèse est contredite par le résultat suivant, qui vient même contredire plus généralement la convexité des ensembles d'expansion.

Proposition 1.11. *Supposons que $N = 2$, $q \equiv 0$, f ne dépend pas de (t, x) et $A(x) = a(x)I_2$ est une fonction régulière telle que*

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} a(x_1, \alpha x_1) = \begin{cases} a_+ & \text{if } |\alpha| < r_0 \\ a_- & \text{if } |\alpha| > r_0 \end{cases}$$

où $a_+ > a_- > 0$ et $0 < r_0 < r := \sqrt{\frac{a_-}{a_+ - a_-}}$. Alors $\bar{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}$ et cet ensemble est

$$\left\{ |x| < 2\sqrt{f'(0)a_+}, |x_2| \geq r_0 x_1 \right\} \cup \left\{ x_1 < \frac{1 - r_0 r}{r_0 + r} |x_2| + \frac{2\sqrt{f'(0)a_+(1 + r_0^2)}}{1 + r_0/r}, |x_2| \leq r_0 x_1 \right\}.$$

Cet ensemble d'expansion n'est pas convexe si $r_0 r < 1$, comme on peut le voir sur la Figure illustrant la Proposition 1.11.

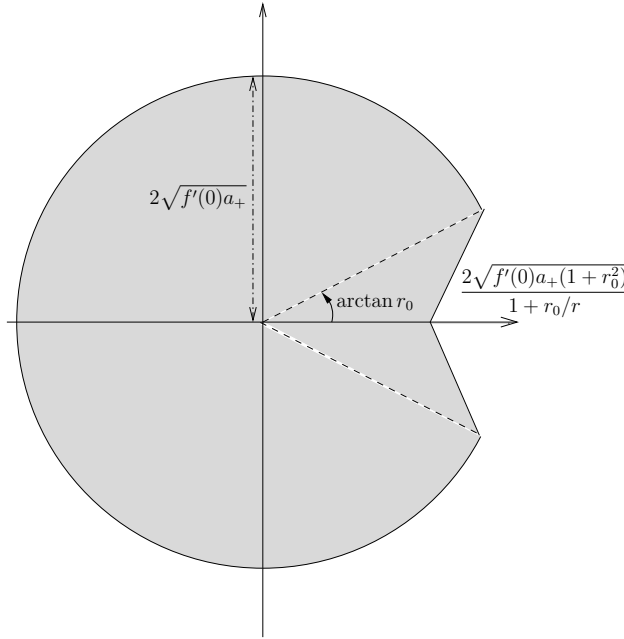


FIGURE 1.4 – L'ensemble d'expansion $\bar{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}$ donné par la Proposition 1.11.

Le résultat suivant donne une condition garantissant la convexité de l'ensemble d'expansion pour de telles hétérogénéités.

Proposition 1.12. *Supposons que $\underline{\mathcal{S}} = \bar{\mathcal{S}}$ et que la fonction $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \mapsto \underline{H}(x/|x|, p)$, prolongée en 0 par $\underline{H}(0, p) := \sup_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} \underline{H}(e, p)$, est quasiconcave sur \mathbb{R}^N pour tout $p \in \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire que*

$$\text{l'ensemble } \{x \in \mathbb{R}^N, \underline{H}(x/|x|, p) \geq \alpha\} \text{ est convexe pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^N.$$

Alors l'ensemble $\bar{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}$ est convexe.

1.1. Vitesses d'expansion en milieu complètement hétérogène

Un résultat célèbre de Alvarez, Lasry et Lions [2] garantit la convexité des solution d'équations de Hamilton-Jacobi pour des Hamiltoniens concaves en x . Dans les exemples présentés dans cette section, les Hamiltoniens sont seulement quasi-concaves et il nous a donc fallu étendre le résultat de [2] à ce cas de figure.

1.1.8 Schéma de preuve

Soit $e \in \mathbb{S}^{N-1}$, l'idée de notre preuve est de calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$. On introduit donc la transformation de Hopf-Cole Z_ε définie par $u(t/\varepsilon, x/\varepsilon) = e^{Z_\varepsilon(t, x)/\varepsilon}$, et les semi-limites de cette fonction

$$Z_*(t, x) := \liminf_{(s, y) \rightarrow (t, x), \varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon(s, y) \text{ et } Z^*(t, x) := \limsup_{(s, y) \rightarrow (t, x), \varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon(s, y).$$

Il vient immédiatement que $u(t, wte) \rightarrow 0$ si $Z^*(1, we) < 0$. Et on peut montrer de même que $u(t, wte) \rightarrow 1$ si $(1, we) \in \text{Int}\{Z_* = 0\}$. Calculer la limite de $u(t, wte)$ quand $t \rightarrow +\infty$ revient donc à calculer le signe de $Z^*(1, we)$ et $Z_*(1, we)$. On peut estimer ces semi-limites en vérifiant qu'elles sont solutions de certaines inéquations.

Notre approche est classique : il existe de nombreux résultats de cet ordre dans la littérature (voir par exemple [7, 8, 58, 67, 70]) pour des coefficients périodiques, aléatoires stationnaires ergodiques ou pour étudier des limites de petite diffusion. La difficulté ici était de considérer des coefficients dépendant de façon générale de (t, x) . Cela nécessitait en particulier de trouver de bons correcteurs pour absorber les oscillations des coefficients en $(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$. Ces correcteurs approchés sont précisément les valeurs propres généralisées, restreintes aux cônes tronqués $C_{R, \alpha}(e)$.

Proposition 1.13.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\{\partial_t Z^* - \overline{H}(\frac{x}{|x|}, \nabla Z^*), Z^*\} \leq 0 \quad \text{dans } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \\ \max\{\partial_t Z_* - \underline{H}(\frac{x}{|x|}, \nabla Z_*), Z_*\} \geq 0 \quad \text{dans } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} Z^*(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} Z_*(t, x) = 0 \quad \text{si } x = 0, \quad -\infty \quad \text{si } x \neq 0, \\ Z^*(t, 0) = Z_*(t, 0) = 0 \quad \text{pour tout } t > 0, \end{array} \right.$$

$$\text{où } \overline{H}(e, p) := \lim_{R \rightarrow +\infty, \alpha \rightarrow 0} \overline{\lambda}_1(L_p, C_{R, \alpha}(e)), \quad \underline{H}(e, p) := \lim_{R \rightarrow +\infty, \alpha \rightarrow 0} \underline{\lambda}_1(L_p, C_{R, \alpha}(e)).$$

Ces équations sont très singulières : les Hamiltoniens ne sont pas définis en $x = 0$ et sont semi-continus en x , la donnée initiale n'est ni bornée, ni continue. On peut malgré tout obtenir les estimations suivantes, dont découle le Théorème 1.6.

Proposition 1.14. $Z_*(t, x) \geq -t\underline{U}(x/t)$ et $Z^*(t, x) \leq -t\overline{U}(x/t)$, où \underline{U} et \overline{U} ont été définies dans (1.20).

La preuve repose sur les formules de représentation de Evans et Souganidis [37] pour les équations de Hamilton-Jacobi. Ces formules n'étant vraies que pour des Hamiltoniens H réguliers, définis pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et pour des données initiales bornées et régulières, la difficulté consiste à vérifier que l'on peut approcher nos équations singulières par des équations régulières vérifiant les hypothèses de [37], puis passer à la limite.

1.2 Fronts de transition généralisés pour l'équation de Fisher-KPP hétérogène

1.2.1 Définition, existence et non-existence

La notion de traveling waves n'est plus adaptée aux équations complètement hétérogènes, et il nous faut donc commencer par définir une extension de cette notion. Une première définition est due à Berestycki et Hamel [13] (voir aussi [92]) : en dimension 1, un *front de transition généralisé* est une solution positive u de (1.1) globale en temps, telle que pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, les interfaces $I_\varepsilon(t) := \{x \in \mathbb{R}, \varepsilon < u(t, x) < 1 - \varepsilon\}$ ont des longueurs bornées uniformément en t . En d'autres termes, la transition entre les états d'équilibres 0 et 1 est bien localisée dans l'espace, uniformément en t .

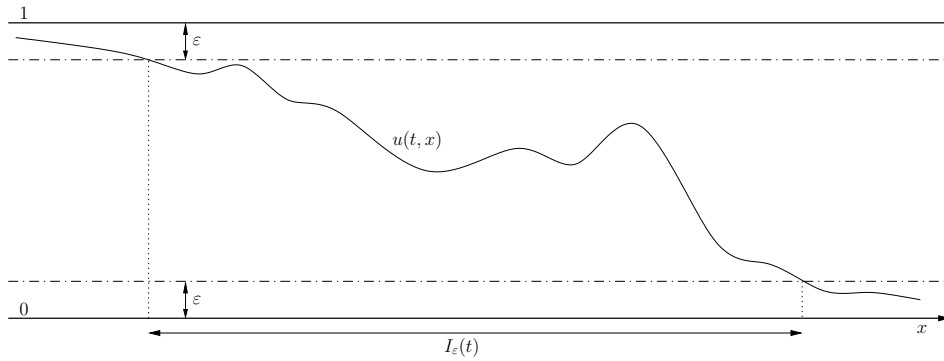


FIGURE 1.5 – L'interface $I_\varepsilon(t) = \{x, \varepsilon < u(t, x) < 1 - \varepsilon\}$ d'un front de transition généralisé u .

En dimension 1, l'existence de tels fronts pour une nonlinéarité f ne dépendant que de x de type "ignition", c'est-à-dire tel que $f(x, u) = 0$ si $u < \theta$, avec $\theta \in (0, 1)$, a été démontrée en parallèle par Nolen et Ryzhik [79] et Mellet, Roquejoffre et Sire [76]. Ces deux équipes ont ensuite montré leur unicité et leur stabilité [75], toujours pour ce type de nonlinéarités.

Cependant, il a été montré par Nolen, Roquejoffre, Ryzhik et Zlatos [77] qu'il n'existait pas toujours de fronts généralisés pour des nonlinéarités de type KPP. Considérons une nonlinéarité $f(x, u) = r(x)u(1 - u)$, avec $r(x) \equiv 1$ en dehors d'un compact, et $r \geq 1$ sur \mathbb{R} . Alors si l'hétérogénéité compacte est suffisamment grande, au sens où $\lambda_1(\mathcal{L}, \mathbb{R}) > 2$, toutes les solutions globales en temps sont exponentiellement décroissantes en $|x| \rightarrow +\infty$, contredisant ainsi l'existence de fronts de transition généralisés.

Zlatos [106] a d'autre part donné des conditions suffisantes, mais non nécessaires, à l'existence de fronts généralisés pour des équations de type KPP, toujours en dimension 1. Ces conditions sont vérifiées en particulier quand seul le taux de diffusion dépend de x , mais ne sont plus forcément satisfaites pour des coefficients périodiques, alors que l'on sait que des fronts de transition généralisés (les fronts pulsatoires) existent dans ce cas. Il a d'autre part construit [105] un contre-exemple à l'existence de fronts généralisés pour une nonlinéarité de type ignition en dimension $N \geq 2$. Ainsi, les conditions garantissant l'existence de fronts généralisés pour des coefficients hétérogènes en espace ne sont pas complètement claires.

Enfin, une autre définition de fronts généralisés a été introduite par Matano [73], basée sur une continuité du front par rapport aux coefficients. Si le front généralisé est unique, comme dans le cas ignition [75], alors les deux notions coïncident. Pour les équations de type KPP, il peut exister des familles de fronts généralisés (voir [106] mais aussi les articles [NR12, NR15, NR16] présentés plus bas). Dans ce second cas l'existence de fronts généralisés au sens de Matano reste ouverte.

1.2.2 Une notion alternative en dimension $N = 1$: les fronts critiques

Notre but est d'introduire une notion alternative de fronts dans les équations hétérogènes unidimensionnelles, qui existeraient sous des conditions très générales. Nous ferons dans cette section les hypothèses suivantes sur les coefficients de l'équation (1.1) :

$$\begin{aligned} & a, a_x, a_{xx}, 1/a, b, b_x \in L^\infty(\mathbb{R}), f \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, 1]), \\ & \exists C > 0 \text{ t.q. } |f(x, u) - f(x, v)| \leq C|u - v| \text{ p.p. } (x, u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \times [0, 1], \\ & f(x, 0) = f(x, 1) = 0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

La définition est la suivante.

Definition 1.15. [N15-1] ($N=1$) Une solution globale en temps u de (1.1), avec $0 < u < 1$, est un **front critique** (vers la droite) si pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si v est une solution globale en temps de (1.1) telle que $v(t_0, x_0) = u(t_0, x_0)$ et $0 < v < 1$, alors soit $u \equiv v$, soit

$$u(t_0, x) > v(t_0, x) \quad \text{si } x < x_0 \quad \text{et} \quad u(t_0, x) < v(t_0, x) \quad \text{si } x > x_0. \quad (1.25)$$

Cette notion repose sur le principe d'Angenent [5], qui établit que le nombre de zéros des solutions d'une équation parabolique ne peut que décroître en temps. Ce principe avait déjà été utilisé pour étudier le comportement de solutions dans le cas de coefficients aléatoires [92] ou périodiques [35].

Theorem 1.16. [N15-1]

1. (Existence et unicité) Pour tout $\theta \in (0, 1)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, l'équation (1.1) admet un unique front critique u tel que $u(0, x_0) = \theta$.
2. (Monotonie en temps) $t \mapsto u(t, x)$ est strictement décroissante pour tout $x \in \mathbb{R}$, strictement croissante pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou bien constante pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. (Comparaison avec les fronts généralisés) Si l'équation (1.1) admet un front de transition généralisé v tel que $\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t, x) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t, x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors tout front critique u est un front de transition généralisé et $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, x) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

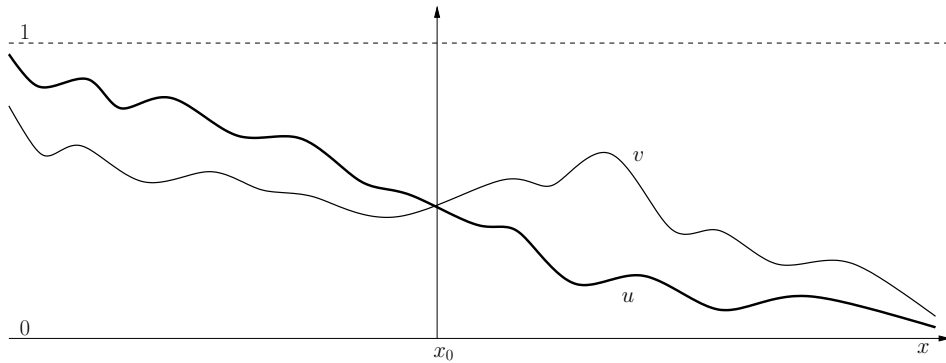


FIGURE 1.6 – Le front critique u comparé à une solution v globale en temps à $t = t_0$.

On peut également démontré que si f est monostable, au sens où l'équilibre 1 est globalement attractif et où $s \mapsto f(t, x, s)/s$ est décroissante, alors, dans le cas où il existe un front de transition généralisé, le front critique est le front de plus petite vitesse globale (au sens de [13]). Mais il existe des situations

où le front critique existe alors qu'il n'existe pas de front généralisé [77], ce qui donne tout son relief à cette notion.

Dans le cas où les coefficients sont aléatoires, stationnaires et ergodiques en x , alors l'existence de fronts de transition généralisés est ouverte en général. Des simulations numériques semblent cependant contredire l'existence de tels fronts en général : la taille des interfaces $I_\varepsilon(t)$ semble croître et ne pas rester bornée quand le front traverse alternativement des zones à fort puis à faible taux de réaction. Ce cas donne donc potentiellement un exemple de plus où le front critique existe et présente certaines propriétés de stationnarité, bien que les fronts généralisés n'existent sans doute pas.

Enfin, ce front critique est attractif globalement pour le problème de Cauchy avec une donnée initiale de type "Heaviside" si et seulement si ce front est continu par rapport au milieu (au sens de Matano [73]). Cette continuité a cependant depuis été contredite en général dans [52], mais pourrait rester vraie dans certains cas particuliers.

Ainsi, une telle approche a été utilisée en parallèle par Ducrot, Giletti et Matano [35] pour étudier l'attractivité du front critique pour des nonlinéarités très générales périodiques en espace et des données initiales de type Heaviside, et dans le cas homogène par Polacik, pour des données initiales générales [83]. Dans ces deux articles, les fronts critiques sont plutôt appelés "terrasses" ou "système d'ondes minimal". L'attractivité du front de vitesse minimale pour les équations de Fisher-KPP périodiques a également été prouvée par d'autres méthodes, donnant un meilleur ordre de convergence, par Hamel, Nolen, Roquejoffre et Ryzhik [50].

1.2.3 Existence de fronts généralisés pour les équations hétérogènes en temps

Considérons maintenant les équations de type Fisher-KPP ne dépendant que de t , par exemple :

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = r(t)u(1 - u), \quad (1.26)$$

où r est une fonction mesurable, bornée, d'infimum positif. Pour de telles équations, il est plus judicieux d'utiliser une formulation alternative et équivalente des fronts généralisés : on peut les caractériser comme des solutions positives globales en temps s'écrivant $u(t, x) = U(t, x - \int_0^t \sigma(s) ds)$, avec $U(t, -\infty) = 1$ et $U(t, +\infty) = 0$ uniformément en t . La fonction $\sigma(t)$ représente alors la vitesse locale du front.

L'existence de fronts généralisés pour ces équations avait été démontrée par Shen [93] dans le cas où r est uniquement ergodique, ce qui implique en particulier que la limite $\langle r \rangle := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} r(s) ds$ existe et est uniforme en $t \in \mathbb{R}$. De tels fronts existent pour une famille de vitesses locales satisfaisant $\langle \sigma \rangle \geq 2\sqrt{\langle r \rangle}$. Notre but est d'étendre ce résultat à des coefficients généraux, n'admettant plus de moyenne uniforme, et d'identifier une quantité se substituant à ces moyennes.

Nous avons montré avec L. Rossi [NR12] que pour tout $c > 2\sqrt{[r]}$, il existe un front généralisé de vitesse σ telle que $[\sigma] = c$, où l'on définit la moyenne inférieure :

$$[r] := \sup_{T>0} \inf_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} r(s) ds.$$

Ce résultat s'étend facilement au cas où $c = 2\sqrt{[r]}$ en utilisant la notion de front critique développée a posteriori dans [N15-1]. Par ailleurs, de tels fronts n'existent pas si $c < 2\sqrt{[r]}$. La quantité $2\sqrt{[r]}$ joue ainsi le rôle d'une vitesse critique sur les moyennes inférieures.

D'autre part, ces fronts sont décroissants en x , et dans le cas où les coefficients satisfont certaines propriétés (presque périodicité, ergodicité), alors ces propriétés sont transmises à la vitesse σ et au profil du front U . En effet, la vitesse σ construite est explicite : $\sigma(t) = r(t)/\kappa + \kappa$, avec un κ bien choisi

1.2. Fronts de transition généralisés pour l'équation de Fisher-KPP hétérogène

pour pouvoir construire des sur et sous-solutions. Une étude minutieuse des propriétés des moyennes inférieures fait ainsi émerger la condition $\kappa \in (0, \lfloor r \rfloor)$.

Ce résultat a ensuite été partiellement étendu par L. Rossi et L. Ryzhik [87] à des milieux dépendant à la fois généralement du temps t et périodiquement de l'espace x , mais pour des taux de croissance très particulier du type $r(t, x) = r_1(t) + r_2(x)$ et une matrice de diffusion et un terme d'advection ne dépendant que de x . Là-aussi, Shen [94] avait prouvé l'existence de fronts généralisés pour des coefficients périodiques en x et uniquement ergodiques en t . Nous avons généralisé ce résultat à une équation du type (1.1), dont les coefficients sont périodiques en x et généraux en t [NR15] : il existe $c_* \leq c^* \in \mathbb{R}$ tel que si $c > c^*$, il existe un front généralisé de vitesse σ tel que $\lfloor \sigma \rfloor = c$, tandis qu'un tel front n'existe pas si $c < c_*$. Les vitesses c_* et c^* sont évidemment beaucoup plus implicites que dans le cas où r ne dépend que de t . Leur caractérisation fait intervenir des solutions du problème linéarisé en 0. Mais nous n'avons pas réussi à démontrer en général que $c_* = c^*$. Ce travail nous a de plus permis de comprendre que sans l'hypothèse de périodicité en x , l'existence de fronts généralisés peut être obtenue si l'on arrive à démontrer une inégalité du type Harnack, globale en x , pour la linéarisation de l'équation (1.1) au voisinage de $u = 0$.

1.2.4 Existence de fronts généralisés pour les équations presque périodiques en espace

Nous avons étudié dans ce travail commun avec L. Rossi [NR16] les équations de Fisher-KPP unidimensionnelles :

$$\partial_t u - \partial_x (a(x) \partial_x u) = r(x)u(1 - u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \quad (1.27)$$

avec des coefficients $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ satisfaisant :

$$\inf_{\mathbb{R}} a > 0, \quad \inf_{\mathbb{R}} r > 0, \quad a, a', r \text{ sont presque périodiques.}$$

Nous utiliserons ici la définition de Bochner de la presque périodicité :

Definition 1.17. [27] Une fonction $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est presque périodique si de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $a(x_{n_k} + x)$ converge uniformément en $x \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions possèdent de nombreuses propriétés. Elles appartiennent à la classe des fonctions uniquement ergodiques, c'est-à-dire que si r est presque périodique, alors la limite $\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_x^{x+L} r(y) dy$ existe et est uniforme en $x \in \mathbb{R}$.

Soit \mathcal{L} l'opérateur associé à l'équation linéarisée en 0 :

$$\mathcal{L}\phi := (a(x)\phi')' + r(x)\phi, \quad (1.28)$$

et $\lambda_1(\mathcal{L}, \mathbb{R})$ sa valeur propre principale généralisée, cette fois-ci au sens de Berestycki, Nirenberg et Varadhan [22] :

$$\lambda_1(\mathcal{L}, \mathbb{R}) := \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}, \exists \phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \phi > 0, \mathcal{L}\phi \leq \lambda\phi \text{ dans } \mathbb{R} \}. \quad (1.29)$$

En dimension 1, on peut définir, sans avoir à faire d'hypothèse de presque périodicité, la famille $(\phi_\gamma)_{\gamma > \lambda_1(\mathcal{L}, \mathbb{R})}$ par :

$$\mathcal{L}\phi_\gamma = \gamma\phi_\gamma \text{ in } \mathbb{R}, \quad \phi_\gamma(0) = 1, \quad \phi_\gamma > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_\gamma(x) = 0. \quad (1.30)$$

Si les coefficients sont presque périodiques, alors $\phi'_\gamma / \phi_\gamma$ est presque périodique et on peut ainsi définir la limite

$$\mu(\gamma) := - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \ln \phi_\gamma(x) > 0,$$

qui s'avère être croissante et concave en $\gamma > \lambda_1(\mathcal{L}, \mathbb{R})$.

Theorem 1.18. [NR16] Soit

$$c^* := \inf_{\gamma > \lambda_1} \frac{\gamma}{\mu(\gamma)}, \quad \underline{c} := \frac{\lambda_1}{\underline{\mu}}, \quad \text{où } \underline{\mu} := \lim_{\gamma \searrow \lambda_1} \mu(\gamma).$$

1. Si $c^* < \underline{c}$, alors pour tout $c \in [c^*, \underline{c})$, il existe un front généralisé de vitesse moyenne c , strictement croissant en t : si $c > c^*$, ce front s'écrit $u(t, x) = U(\int_0^x \sigma - t, x)$, où $\sigma \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ est presque périodique de moyenne $1/c$ et $U = U(z, x)$ est presque périodique en x uniformément par rapport à $z \in \mathbb{R}$.
2. Il n'existe pas de front généralisé de vitesse moyenne $c < c^*$.

Si $\underline{\mu} = 0$, alors $\underline{c} = +\infty$ et la condition $c^* < \underline{c}$ est toujours satisfaite. Un exemple de terme presque périodique $r = r(x)$ pour lequel $\underline{\mu} > 0$ a été construit par Sorets et Spencer [98] dans le cas du Laplacien discret et par Bjerklov [26] pour le Laplacien continu.

À l'inverse, si \mathcal{L} admet une fonction propre positive $\varphi_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ presque périodique, c'est-à-dire une solution de $\mathcal{L}\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, alors $\underline{\mu} = 0$. Une telle fonction existe en particulier

- si les coefficients sont périodiques et non pas seulement presque périodiques,
- si r est constant,
- si a et r sont *quasipériodiques* et si r a une amplitude assez petite.

Nous avons également identifié plusieurs conditions liées à la criticalité de l'opérateur, c'est-à-dire à l'existence de sur et sous fonctions propres, garantissant l'existence d'une fonction propre presque périodique.

Notre résultat laisse ouvert plusieurs questions intéressantes :

- Qu'en est-il du cas multi-dimensionnel ? La construction des ϕ_γ repose fortement sur des arguments 1D, y a-t-il des solutions analogues en plus grande dimension ?
- Dans le cas où $\underline{\mu} > 0$, existe-t-il des fronts généralisés de vitesse moyenne $c > \underline{c}$? Existe-t-il encore des fronts quand $\underline{c} = c^*$?
- Quelles sont les propriétés du front critique de vitesse $c = c^*$? A-t-il un profil presque périodique ? Est-il attractif, en un certain sens, pour le problème de Cauchy ?

1.3 Traveling waves pour des équations avec vitesse prescrite

Dans ce travail un peu différent mené avec J. Bouhours [BoN15], il s'agissait d'établir des conditions garantissant la survie d'une population dans un environnement évoluant à vitesse constante dans le temps du fait d'un changement climatique. H. Berestycki et plusieurs coauteurs [12, 23, 89] ont étudié cette question à l'aide d'un modèle de réaction-diffusion (voir aussi [84] ainsi que [64] pour un modèle intégro-différentiel). La densité de population u vérifie alors une équation du type

$$u_t - u_{xx} = f(x - ct, u) \quad \text{dans } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (1.31)$$

où $f(x, 0) = 0$, $f(x, 1) \leq 0$ et $f(x, u) \leq -\delta u$ pour tout $|x| \geq R$ et $u \geq 0$. En d'autres termes, $u = 0$ est un état d'équilibre, quand $u = 1$ le milieu est saturé du fait de la quantité finie de ressources et le taux de croissance $f(x, \cdot)$ est très négatif si x est trop grand, c'est-à-dire que la zone favorable (l'habitat) pour la population est localisée en espace. La quantité c représente alors la vitesse à laquelle l'habitat évolue du fait du réchauffement climatique.

Cette équation a été étudiée exhaustivement par Berestycki et Rossi [23] dans le cas où la nonlinéarité est de type KPP, c'est-à-dire que le taux de croissance par individu $f(x, u)/u$ décroît en u . Ils ont montré que sous ces hypothèses il existe une vitesse critique c^* telle que si $c \in (0, c^*)$, alors u converge vers une solution du type traveling waves quand $t \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire de la forme $u(t, x) = U(x - ct)$,

1.3. Traveling waves pour des équations avec vitesse prescrite

avec $U(\pm\infty) = 0$, tandis que si $c > c^*$, alors la u tend vers 0 localement. Ainsi, la vitesse critique c^* détermine bien la persistance ou l'extinction de la population : si le réchauffement climatique est trop rapide, alors la population s'éteint.

L'hypothèse KPP sur f est une hypothèse relativement forte. Elle n'est pas complètement réaliste, les biologistes considérant qu'il peut être plus naturel d'introduire un effet Allee, c'est-à-dire une nonlinéarité de type bistable : si la densité u est trop petite, alors le taux de croissance $f(x, u)$ doit être négatif car la population est trop dispersée pour arriver à se reproduire. Du point de vue mathématique, l'hypothèse KPP permet de se ramener à l'étude de la linéarisation de l'équation autour de $u = 0$, qui s'avère alors déterminer complètement la dynamique de l'équation. Notre but était donc d'étudier l'équation (1.31) sous des hypothèses plus générales sur f .

Nous avons obtenu de premiers résultats en remarquant que (1.31) possédait une structure variationnelle. Introduisons l'énergie :

$$E_c[u] = \int_{\mathbb{R}} e^{cz} \left\{ \frac{u_z^2}{2} - F(z, u) \right\} dz, \quad \forall u \in H_c^1(\mathbb{R}),$$

où $H_c^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R}, e^{cx} dx)$ et $F(z, s) = \int_0^s f(z, t) dt$. Alors les traveling waves sont en fait des points critiques de cette fonctionnelle d'énergie. On peut ainsi en déduire le théorème suivant :

Theorem 1.19. [BoN15] Si $\inf_{u \in H^1(\mathbb{R})} E_0[u] < 0$, alors il existe $\bar{c} \geq \underline{c} > 0$, telles que

- pour tout $c \in (0, \underline{c})$, (1.31) admet une solution de type traveling wave dans $H_c^1(\mathbb{R})$,
- pour tout $c > \bar{c}$, (1.31) n'admet pas de solution de type traveling wave, c'est-à-dire que 0 est la seule solution stationnaire de (1.31).

Nous avons par ailleurs montré que les solutions du problème d'évolution (1.31) convergent vers des solutions stationnaires dans le repère mobile de vitesse c , donc vers une traveling wave de vitesse c ou vers 0. Différentes conditions suffisantes garantissent la convergence vers 0 ou une traveling wave.

L'existence d'une vitesse critique exacte $\underline{c} = \bar{c} = c^*$, analogue au cas KPP, est loin d'être claire. Nos études numériques indiquent qu'une telle vitesse devrait exister. Par ailleurs, pour des nonlinéarités f modélisant un effet Allee, l'état stationnaire 0 devient localement stable, contrairement au cas KPP. Le problème de minimisation de l'énergie cachée dans (1.31) est alors non-triviale : plusieurs points critiques peuvent coexister, chacun correspondant à une traveling wave, mais de stabilité variable. Ces phénomènes sont qualitativement très différents du cas KPP.

Chapitre 2

Équations de Fisher-KPP avec saturation non-locale

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation

$$u_t - u_{xx} = ru(1 - K_\sigma \star u) \quad (2.1)$$

où $r > 0$, $\sigma > 0$ et K est une densité de probabilité et

$$K_\sigma(x) := \frac{1}{\sigma} K\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

où σ est ainsi un paramètre mesurant la portée de la non-localité, et \star est le produit de convolution standard. Cette équation avait été introduite par Genieys, Volpert et Auger [45] comme un modèle de dynamique adaptative, le paramètre d'espace x représente ici un trait évoluant stochastiquement dans le temps et le noyau $K(x - y)$ mesure l'intensité de la compétition entre deux individus de trait x et y .

La principale difficulté rencontrée dans l'étude de cette équation est, comme pour les systèmes de réaction-diffusion, l'absence de principe de comparaison pour l'équation (2.1), du fait du terme non-local. Notons que si la nonlinéarité était $K \star u(1 - u)$, alors l'équation bénéficierait encore d'un principe de comparaison, et l'étude serait alors d'une nature complètement différente. Cette difficulté est donc propre à l'équation (2.1). Par ailleurs, il ne s'agit pas d'une simple difficulté d'ordre technique mais bien d'une caractéristique de l'équation puisque c'est cette absence de principe de comparaison qui autorise l'apparition de solutions stationnaires non-triviales, observées numériquement dans [45], via un mécanisme de Turing [100] : l'état homogène 1 devenant instable relativement à des perturbations de fréquences bien choisies, des branches de bifurcations émergent.

Nous avons démontré avec H. Berestycki, B. Perthame et L. Ryzhik [BNPR09] que pour tout $c \geq 2$, (2.1) admet une traveling wave $u(t, x) = U(x - ct)$, avec $U > 0$, $U(+\infty) = 0$ et $\liminf_{z \rightarrow -\infty} U(z) > 0$, cette dernière condition étant utilisée pour inclure d'éventuels fronts connectant 0 à un autre état d'équilibre que 1. Nous avons également démontré que si la transformée de Fourier $\hat{\phi}$ était positive, alors nécessairement $U(-\infty) = 1$. Enfin, nous avons identifié un paramètre $\sigma_M(c)$ tel que pour tout $\sigma > \sigma_M(c)$, un front de propagation de (2.1) de vitesse c est forcément non-monotone. Ce résultat était novateur dans ce domaine car il reposait sur des méthodes issues des équations de réaction-diffusion locales, donnant des résultats globaux et non des résultats perturbatifs comme dans la plupart des articles sur les équations non-locales.

L'existence de fronts monotones, connectant nécessairement 0 à 1, a par la suite été établie pour $\sigma < \sigma_M(c)$ par Fang et Zhao [41], en s'inspirant de méthodes utilisées dans le cadre des équations à retard [46, 66]. Alfaro et Coville [1] ont également utilisé des méthodes d'énergie pour montrer que si la vitesse c est assez grande (à σ fixé) alors $U(-\infty) = 1$.

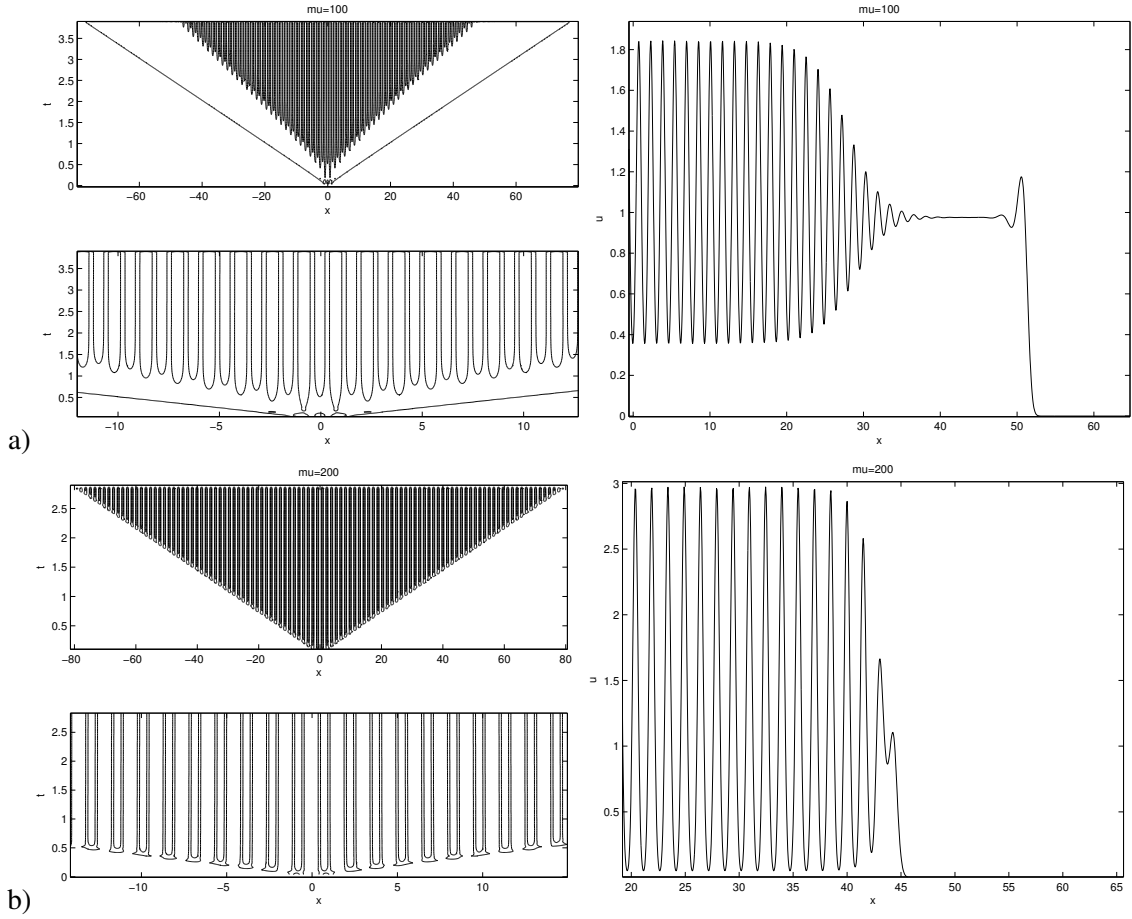


FIGURE 2.1 – Simulations du problème de Cauchy associé à (2.1) avec un noyau $K = 1_{(-1/2, 1/2)}$ sur le domaine $[-80, 80]$. À gauche : les lignes de niveau montrent que la solution ne converge pas vers une traveling wave mais a une structure plus complexe ; les figures du bas sont des zooms des figures du haut. À droite : la fonction connecte l'état instable 0 à une solution périodique en x . Deux valeurs de r sont utilisées a) $r = 100$; b) $r = 200$.

2.1. Une nouvelle approche numérique pour voir émerger les traveling waves

Plus récemment, Faye et Holzer [38] ont construit des fronts pulsatoires connectant avec une vitesse très petite la solution stationnaire 1 à une solution stationnaire périodique au voisinage du paramètre σ pour lequel l'équilibre 1 devient instable en variables de Fourier, pour le noyau particulier

$$K(z) = \frac{3a}{2}e^{-a|z|} - e^{-|z|}, \quad a \in (2/3, 1).$$

Ce type de noyau permet de transformer l'équation non-locale en un système, pour lequel les méthodes de bifurcations s'appliquent.

D'autre part, le lien entre ces traveling waves et le problème de Cauchy associé à (2.1) est encore mal compris. Hamel et Ryzhik ont montré une borne uniforme pour les solutions du problème de Cauchy, ainsi que l'existence d'une vitesse d'expansion [53], mais il n'existe pas d'autres résultats dans cette direction à notre connaissance.

L'existence de fronts pulsatoires pour d'autres noyaux, et plus loin du paramètre critique, et/ou connectant 0 à un état stationnaire périodique reste ouverte. Nous allons présenter dans ce chapitre plusieurs approches permettant de répondre partiellement à cette question.

Question 2. *Quel est le comportement asymptotique des traveling waves pour l'équation de Fisher-KPP non-locale (2.1) ?*

2.1 Une nouvelle approche numérique pour voir émerger les traveling waves

Les simulations numériques présentées Figure 2 se bornaient à simuler l'équation d'évolution associée à (2.1), observant ainsi l'émergence de fronts pulsatoires connectant 0 à une solution stationnaire périodique pour une non-localité σ assez grande. Or on peut très bien imaginer qu'il existe des traveling waves instables dynamiquement, donc non-observables par simulation de l'équation d'évolution. Partant de cette hypothèse, nous avons donc simulé, avec B. Perthame et M. Tang [NPT11], directement la méthode de construction des traveling waves utilisée dans [BNPR09].

Notre algorithme approche le problème dans un domaine borné de longueur $L = x_r - x_l$, $x_l < 0 < x_r$:

$$\begin{cases} \sigma^L \partial_x u^L + \partial_{xx} u^L + u^L(1 - K_\sigma \star u^L) = 0, & x_l < x < x_r, \\ u^L(x_l) = 1, \quad u^L(x_r) = 0, \quad u^L(0) = \varepsilon, \end{cases} \quad (2.2)$$

où la convolution est calculée en étendant u^L par 1 à gauche et 0 à droite. Nous avons démontré analytiquement dans [BNPR09] que, à condition de choisir ε assez petit (sous toutes les oscillations possibles des solutions stationnaires périodiques), la suite (u^L, σ^L) converge vers une traveling wave quand $L \rightarrow +\infty$.

Afin de résoudre (2.2) nous divisons le domaine en deux parties : $I_1 = [x_l, 0]$ et $I_2 = [0, x_r]$. Pour tout σ , on résout ensuite l'équation elliptique avec conditions aux bords de Dirichlet :

$$-\sigma \partial_x u_i = \partial_{xx} u_i + u_i(1 - K_\sigma \star u), \quad u_i(0) = \varepsilon, \quad i = 1, 2, \quad u_1(x_l) = 1, \quad u_2(x_r) = 0. \quad (2.3)$$

Le terme de convolution est calculée en utilisant u_i sur l'intervalle I_i , 1 sur $(-\infty, x_l)$ et 0 sur $(x_r, +\infty)$.

Afin de compenser le saut de dérivées en $x = 0$, on voudrait que σ^L satisfasse

$$\sigma^L = [\partial_x u_2(x_r) - \partial_x u_1(x_l)] + \int_{x_l}^{x_r} u(1 - K_\sigma \star u) dx. \quad (2.4)$$

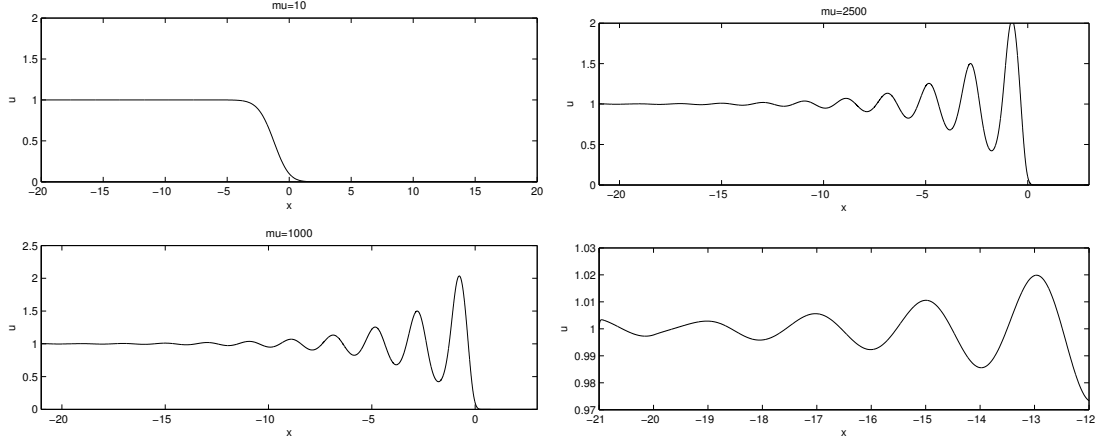


FIGURE 2.2 – traveling waves de l'équation (2.1) pour le noyau $K(z) := \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(-1,1)}$ pour $\mu = 10$ et $\mu = 1000$ (gauche) et $\mu = 2500$ (droite, la figure du haut montre la traveling wave tandis que celle du bas est un zoom de sa queue) obtenu via l'algorithme de [NPT11].

Nous avons ainsi reformulé la construction de la solution approchée u^L en un problème de point fixe sur (σ, u) , qui peut se résoudre par itérations de Newton. La méthode donne des résultats très différents de ceux obtenus en simulant l'équation d'évolution, présentés Figure 2.1.

Ces simulations semblent en particulier montrer que les traveling waves connectent forcément 0 à 1. Cette conjecture est naturelle puisque, pour des noyaux K symétriques, il est nécessaire d'ajouter une dépendance périodique en x pour qu'une bifurcation vers des solutions stationnaires périodiques puisse avoir lieu. On s'attend donc à voir ces solutions stationnaires être reliées à 0 par des fronts pulsatoires, comme dans [38] et non pas de simples traveling waves.

Cette approche a ensuite été généralisée par M. Tang à plusieurs autres types d'équations de réaction-diffusion, locales ou non-locales, hétérogènes ou non [99].

2.2 Un “toy-model” exhibant une grande variété d'ondes

Intéressons-nous maintenant à l'équation :

$$u_t - u_{xx} = ru(x)(1 - u(x - a)) \quad (2.5)$$

avec $a > 0$. En d'autres termes, contrairement au cas étudié plus haut, le noyau $K = K(z)$ est ici asymétrique : un Dirac en $z = a$. Simplifions encore cette équation en considérant une nonlinéarité linéaire par morceaux aux voisinages de 0 et de 1 :

$$\partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) = \begin{cases} ru(t, x) & \text{pour } 0 \leq u(t, x) < \theta \\ 1 - u(t, x - a) & \text{pour } u(t, x) \geq \theta, \end{cases} \quad (2.6)$$

avec $\theta \in (0, 1)$, $a, r > 0$

On peut alors construire explicitement des ondes, c'est-à-dire des solutions de la forme $u(t, x) = U(x - ct)$, en résolvant les deux problèmes linéaires et en connectant les solutions ainsi obtenues. Nous avons montré, avec B. Perthame, L. Rossi et L. Ryzhik [NRRP13], qu'il existe un grand nombre de solutions en fonction des paramètres :

- des traveling waves monotones pour toute vitesse $c \geq 2\sqrt{r}$ si $r \geq (1 - \theta)/\theta$,

2.3. Existence et comportement asymptotique des traveling waves pour les équations à retard

- des traveling waves non-monotones reliant 0 à 1 à vitesse c pour tout $c \geq 2\sqrt{r}$ et a assez grand (en fonction de c),
 - $k + 1$ trains d'onde si $(2k + 1)\pi \leq a < (2k + 3)\pi$, c'est-à-dire des solutions de la forme $u(t, x) = W(x - ct)$, avec W périodique,
 - une traveling wave connectant 0 à un train d'onde dès que $a \geq a_* := \frac{3}{2}\pi\sqrt{2r + \sqrt{4r^2 + 1}}$.
- Ce résultat confirme ainsi la grande richesse de l'équation (2.1).

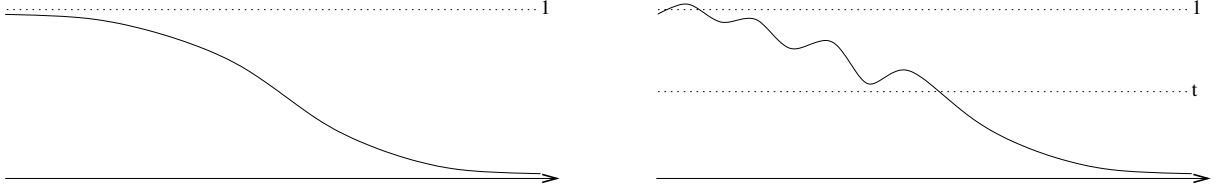


FIGURE 2.3 – Représentation de la traveling wave monotone (gauche) et non-monotone (droite) connectant 0 à 1.

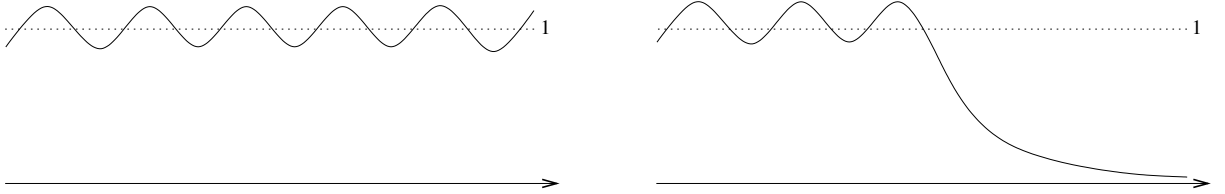


FIGURE 2.4 – Représentation du train d'onde (gauche) et sa connexion à 0 (droite).

2.3 Existence et comportement asymptotique des traveling waves pour les équations à retard

Nous avons étudié avec A. Ducrot [DN14] l'équation de Fisher-KPP avec retard en temps,

$$u_t - u_{xx} = u(t, x)(1 - u(t - \tau, x)),$$

avec $\tau > 0$ le retard. Une traveling wave de cette équation $u(t, x) = U(x - ct)$ satisfait

$$-U'' - cU' = U(z)(1 - U(z + c\tau)) \quad (2.7)$$

avec les conditions additionnelles $U > 0$, $U(+\infty) = 0$ et $\liminf_{z \rightarrow -\infty} U(z) > 0$. L'équation (2.7) est ainsi de la même forme que celle satisfaite par les traveling waves de (2.5) étudiées dans la section précédente, mais avec $a = -c\tau < 0$.

L'existence de traveling waves monotones, convergeant donc vers 1 en $-\infty$, a été prouvée en parallèle par Kwong et Ou [66] et Gomez et Trofimchuk [46], pour tout $\tau \leq \tau_{mon}(c)$ explicite. L'existence de traveling waves et leur convergence en $-\infty$ pour $\tau \geq \tau_{mon}(c)$ restait cependant ouverte.

L'équation (2.7) rentre dans la théorie des systèmes différentiels à retard avec boucle positive (quitte à changer z en $-z$), étudiés par Mallet-Paret et Sell dans [71, 72]. À l'aide de cette observation, nous avons déduit [DN14], ainsi qu'Hasik et Trofimchuk [55] en parallèle avec une méthode différente, que pour tout $\tau > 0$ et $c \geq 2$, il existe des traveling waves, avec la condition à limite relaxée $\liminf_{z \rightarrow -\infty} U(z) > 0$.

Déterminer la convergence en $-\infty$ des traveling waves est un problème difficile, mais pour lequel on peut être plus précis que pour l'équation à noyau (2.1). Ainsi, Hasik et Trofimchuk [56] ont montré la

convergence vers 1 pour tout $\tau \leq 3/2$ et $c \geq 2$, ainsi que la non-convergence vers 1 quand $\tau \geq \pi/2$ et $c \geq c^*(\tau)$, avec $c^*(\tau)$ explicite.

Nous avons caractérisé la convergence des traveling waves via une approche différente. En effet, en se replongeant dans la preuve des résultats de [72], on peut montrer qu'une traveling wave est entièrement déterminée par le couplet $(U(z_0), U'(z_0))$, pour tout $z_0 \in \mathbb{R}$. En particulier, la courbe associée à U dans le plan des phases ne s'auto-intersecte pas, et on peut donc réutiliser bon nombre de méthodes issues des EDO.

Proposition 2.1. *Soit deux solutions $U, V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ positives et bornées de (2.7). Supposons que*

$$\liminf_{z \rightarrow -\infty} \frac{U(z)}{V(z)} \leq 1 \leq \limsup_{z \rightarrow -\infty} \frac{U(z)}{V(z)}$$

et qu'il existe $A > 0$ tel que $U(z) > V(z)$ pour tout $z > A$. Alors il n'existe aucun $X \in \mathbb{R}$ tel que $U(X) = V(X)$ et $U'(X) = V'(X)$.

En particulier, si $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est une solution positive et bornée de (2.7) telle que $U(+\infty) = 0$, alors la courbe (U, U') ne s'auto-intersecte pas.

Ce résultat est très surprenant, puisqu'il est connu qu'une équation à retard est bien posée seulement si on lui associe une donnée initiale définie sur un intervalle de temps de longueur égale au retard. Les quelques propriétés additionnelles énoncées dans la Proposition (positivité, définition sur tout \mathbb{R} etc.) suffisent à garantir ce résultat de non-intersection dans le plan des phases.

Il conduit assez naturellement à la définition et au résultat de convergence suivant.

Définition 2.2. *On dit qu'une solution positive $w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de (2.7) est un **train d'onde maximal** (de vitesse c) si w est périodique de période $L \geq c\tau$ et si la courbe*

$$\mathcal{S} = \{(w(z), w'(z)), z \in \mathbb{R}\}$$

est une courbe de Jordan telle que pour tout autre train d'onde \tilde{w} , on ait

$$\{(\tilde{w}(z), \tilde{w}'(z)), z \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{int}.$$

Theorem 2.3. *Soit $c \geq 2$. L'équation (2.7) admet un unique train d'onde maximal w (à translation près). Si U est une traveling wave, c'est-à-dire une solution positive et bornée de (2.7) telle que $U(+\infty) = 0$ et $\liminf_{z \rightarrow -\infty} U(z) > 0$, alors il existe $\tau \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (u(z) - w(z + \tau)) = 0.$$

On peut remarquer que le train d'onde maximal est également celui ayant les plus grandes oscillations, c'est-à-dire à la fois le plus grand maximum et le plus petit minimum.

Il est possible que le train d'onde maximal soit en fait la solution constante 1. Notre résultat dit que s'il existe un train d'onde non-trivial, alors les traveling waves ne convergent pas vers 1 mais vers le train d'onde maximal, et réciproquement : si la traveling wave converge vers 1, alors il n'existe pas de train d'onde.

Bien que nous ayons caractérisé de façon unique la convergence des traveling waves en $-\infty$, nous n'avons pas réussi à prouver l'unicité de ces traveling waves. Ce problème est toujours ouvert.

Concluons en remarquant que les résultats présentés dans cette section sont tout à fait différents des résultats obtenus dans la section précédente, bien que les deux équations soient très similaires, au signe de a près dans (2.5) : alors que pour $a > 0$ une grande variété d'onde existe, pour $a < 0$ la limite en $-\infty$ est bien déterminée, laissant conjecturer que la traveling wave est unique.

2.3. Existence et comportement asymptotique des traveling waves pour les équations à retard

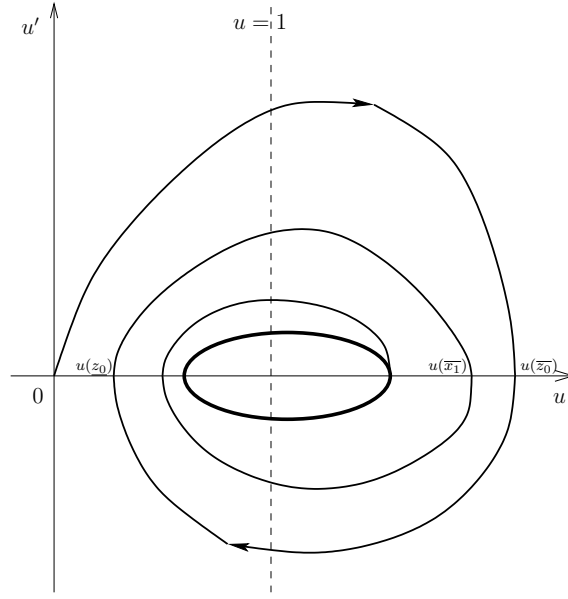


FIGURE 2.5 – La courbe (U, U') associée à une traveling wave dans le plan des phases. En gras : la courbe associée au train d'onde maximal (w, w') .

En conclusion, ces travaux montrent à la fois que les traveling waves construites dans [BNPR09] pour un noyau symétrique $K(z) = K(-z)$ connectent sans doute toujours 0 à 1, même si 1 est instable [NPT11], auquel cas un front pulsatoire se superposerait pour connecter 1 à un état périodique stationnaire stable [38]. Cependant, dans le cas d'un noyau asymétrique, les traveling waves changent de nature et leur convergence dépend de la position de l'asymétrie : à l'arrière du front [NRRP13], elle permet à de nombreuses solutions de type traveling waves de coexister, alors qu'à l'avant du front [DN14], les traveling waves connectent à un objet bien défini : le train d'onde maximal.

Chapitre 3

Une version microscopique de l'équation de Fisher-KPP

Ce chapitre est dévolu à l'étude de l'équation de réaction-diffusion cinétique :

$$f_t + vf_x = M(v)\rho_f - f + r\rho_f(M(v) - f), \quad (3.1)$$

où $f = f(t, x, v)$ représente une densité de population paramétrée par le temps t , sa position x et sa vitesse $v \in V \subset \mathbb{R}$, $\rho_f(t, x) := \int_V f(t, x, v)dv$ et M est une densité de probabilité mesurant la probabilité qu'un individu ait changé de vitesse pour acquérir la vitesse v :

$$M \geq 0, \quad \int_V M(v)dv = 1, \quad \int_V vM(v)dv = 0, \quad \int_V v^2 M(v)dv = D < +\infty. \quad (3.2)$$

Cette équation a été introduite sous une forme générale par Bisi et Desvillettes en 2006 [25] et sous cette forme par Cuesta, Hittmeir et Schmeiser [34]. Il s'agit en quelque sorte d'une version microscopique de l'équation de réaction-diffusion. En effet, sous l'effet du changement d'échelle permettant des changements de vitesses de plus en plus fréquents, on aboutit à l'équation :

$$\varepsilon^2 f_t + \varepsilon v f_x = M(v)\rho_f - f + \varepsilon^2 r\rho_f(M(v) - f). \quad (3.3)$$

On peut alors montrer que la densité $\rho(t, x) = \int_V f(t, x, v)dv$ converge quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la solution de l'équation de réaction-diffusion

$$\partial_t \rho = D\partial_{xx}\rho + r\rho(1 - \rho),$$

où $D := \int_V v^2 M(v)dv$. C'est en utilisant un tel changement d'échelle et des méthodes perturbatives que Cuesta, Hittmeir et Schmeiser [34] ont prouvé l'existence quand ε est assez petit de traveling waves pour l'équation (3.3), quand M est à support compact en v . L'état d'équilibre jouant le rôle de 1 pour l'équation (3.1) est $M(v)$. Ainsi une traveling wave est dans ce contexte une solution de la forme $f(t, x, v) = U(x - ct, v)$, avec $U > 0$, $U(+\infty, v) = 0$ et $U(-\infty, v) = M(v)$.

Hors de ce cas perturbatif, l'existence de traveling waves pour cette équation n'était connu que dans le cas particulier d'un noyau uniforme : $M(v) = \frac{1}{|V|}\mathbf{1}_V(v)$ [90, 91], pour des nonlinéarités de type KPP, ignition ou bistable.

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier l'existence de traveling waves pour (3.1) directement, c'est-à-dire hors de situations perturbatives et pour des noyaux généraux.

Question 3. *Sous quelles conditions sur le noyau $M(v)$ existe-t-il des traveling waves pour l'équation (3.1) ? Dans le cas où il n'en existe pas, peut-on localiser les lignes de niveau de la solution de problème de Cauchy ?*

3.1 Existence de traveling waves pour un noyau somme de deux Dirac

Nous avons dans un premier temps étudié avec E. Bouin et V. Calvez [BCN14] le cas où M est remplacé par deux Dirac en v_m et $-v_m$ et où le terme de réaction $r\rho_f(M(v) - f)$ est remplacé par le terme, très similaire, $r\rho_f(M(v) - \rho_f)$. Dans ce cas l'équation se simplifie en une équation scalaire sur la densité $\rho(t, x)$:

$$\tau^2 \partial_{tt} \rho + (1 - \tau^2 + 2\tau^2 \rho) \partial_t \rho - \partial_{xx} \rho = r\rho(1 - \rho), \quad (3.4)$$

où $\tau = 1/v_m$. Si $\tau = 0$ on retrouve l'équation de Fisher-KPP standard.

L'équation a une double nature, à la fois hyperbolique (pour τ grand) et parabolique (pour τ petit). Si $\tau^2 r < 1$ (régime parabolique), il existe une traveling wave de vitesse c si et seulement si $c \geq c_\tau^*$, où

$$c_\tau^* = \frac{2\sqrt{r}}{1 + \tau^2 r}. \quad (3.5)$$

Ce résultat avait été démontré par Haderer [47] en 1988, mais seulement pour $c \in [c_\tau^*, 1/\tau)$, et avec des méthodes très différentes. On peut tout de suite remarquer que l'introduction du terme en τ ralentit la propagation en comparaison avec l'équation de Fisher-KPP standard, pour laquelle $c^* = 2\sqrt{r}$. Ces traveling waves changent de nature si $c \geq 1/\tau$ et peuvent devenir singulières. Enfin, la traveling wave de vitesse c_τ^* est stable dans des espaces L^2 à poids.

Si $\tau^2 r \geq 1$ (régime hyperbolique), alors il existe une traveling wave de vitesse c si et seulement si $c \geq 1/\tau$, la traveling wave de vitesse $1/\tau$ étant discontinue si $\tau^2 r > 1$.

La preuve de ces résultats fait appel à la fois à des méthodes paraboliques (méthode des sur et sous-solutions) et hyperboliques (constructions de chocs à la main).

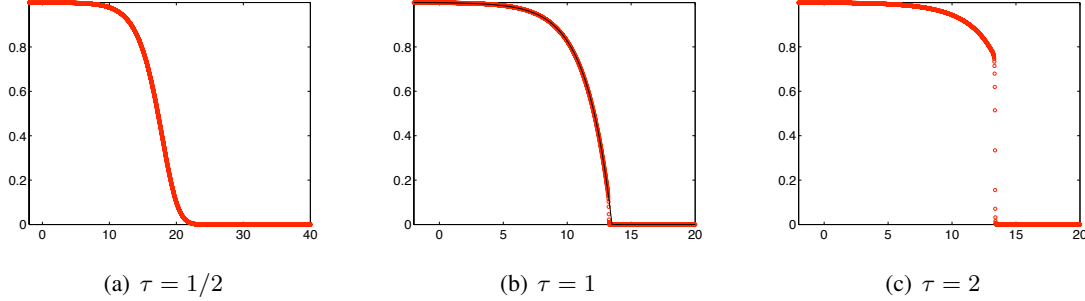


FIGURE 3.1 – Simulations numériques ($r = 1$). Si $\tau < 1$, la traveling wave est régulière et sa vitesse est déterminée par l'avant du front, où $\rho \simeq 0$. Si $\tau \geq 1$, la traveling wave n'est plus régulière : la densité de population saute de $\rho = 0$ à $\rho = 3/4$ pour $\tau = 2$.

3.2 Une validation empirique de ce modèle

L'équation (3.4) avait été utilisée dans les années 90 par Fort et Mendez [40] pour modéliser la transition néolithique, c'est-à-dire la propagation de l'agriculture en Europe. Ces travaux trouvent leur origine dans ceux des archéologues Ammerman et Cavalli-Sforza [4], qui ont modélisés cette transition à l'aide de l'équation de Fisher-KPP (appelée dans cette communauté le “wave-of-advance model”). En estimant la vitesse de diffusion et le taux de reproduction des populations humaines du Néolithique, à l'aide de données sur des populations agricoles actuelles, Ammerman et Cavalli-Sforza ont estimé une vitesse de propagation empirique à l'aide des données archéologiques (distance et datation des sites de

3.3. Existence de traveling waves pour un noyau à support compact

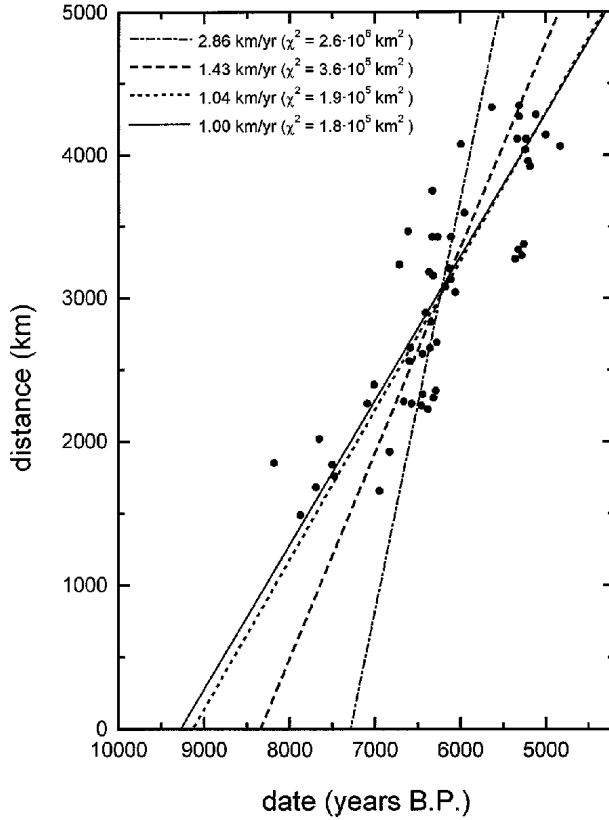


FIGURE 3.2 – Figure issue de [40] : comparaison entre le modèle de Fisher-KPP et le modèle d'équation à retard (3.4). Chaque point correspond à un site archéologique daté où des preuves d'activité agricole ont été trouvées, les distances étant mesurées depuis Jericho (lieu de départ présumé de l'agriculture). La ligne pleine est la régression issue des données empiriques de [4].

Les trois autres lignes sont calculées à partir du modèle de Fisher-KPP (ligne en pointillés et tirets) du modèle à retard (ligne en pointillé). Nous ne discuterons pas ici la ligne en tirets, et renvoyons à [40]. Le modèle à retard est clairement le plus ajusté à la régression issue des données empiriques.

fouilles). La vitesse de propagation ainsi obtenue était nettement supérieure aux observations, même en première approximation (voir Figure 3.1).

Fort et Mendez ont donc supposé que la loi de Fick régissant la dispersion subissait un retard $\tau = 25$ ans, c'est-à-dire qu'il fallait attendre une génération pour qu'une migration s'opère. Ce retard dans la loi de dispersion transforme l'équation de Fisher-KPP en (3.4). La vitesse c_τ^* ainsi obtenue est bien plus proche de la vitesse empirique, validant ainsi ce modèle.

Ce modèle d'équation de Fisher-KPP avec retard est finalement très naturel et a ensuite été utilisé par plusieurs physiciens, par exemple pour modéliser des feux de forêt ou des réactions chimiques particulières (nous renvoyons à [BCN14]).

J'ai présenté le lien entre les différents modèles et j'ai formalisé mathématiquement les résultats heuristiques de [4, 40] dans un chapitre d'ouvrage interdisciplinaire issu de la conférence "Interactions in complex systems" [Nchapitre].

3.3 Existence de traveling waves pour un noyau à support compact

Nous sommes ensuite revenus [BCN15] à l'étude de l'équation (3.1). Forts des méthodes développées dans [BCN14], nous avons résolu le cas où la densité $M(v)$ est à support compact en v , pour lequel on peut trouver explicitement des solutions exponentielles de l'équation linéarisée au voisinage de 0.

Theorem 3.1. *Supposons que V est compact et que $M \in C^0(V)$ satisfait (3.2). Soit $v_{\max} = \sup V$. Il existe une vitesse $c^* \in (0, v_{\max})$ telle que (3.1) admet des traveling waves de vitesse c pour tout $c \in [c^*, v_{\max})$. Ces traveling waves sont décroissantes en $z = x - ct$.*

De plus, si $\inf_V M > 0$ alors il n'existe aucune traveling wave de vitesse $c \in [0, c^)$.*

Naturellement, la vitesse minimale c^* se calcule en cherchant des solutions de l'équation linéarisée en 0 de la forme $Q(v)e^{-\lambda(x-ct)}$, ce qui nous conduit à résoudre la relation de dispersion :

$$(1+r) \int_V \frac{M(v)}{1+\lambda(c-v)} dv = 1. \quad (3.6)$$

On démontre alors que pour tout $\lambda > 0$ il existe une unique vitesse $c(\lambda) \in (v_{\max} - \lambda^{-1}, v_{\max})$ satisfaisant cette relation, et on définit

$$c^* = \inf_{\lambda > 0} c(\lambda).$$

Nous avons donc complètement généralisé les résultats antérieurs de [34] hors du cadre perturbatif, avec une caractérisation de la vitesse minimale. Notre construction des traveling waves utilise une méthode classique de sur et sous-solutions construites à l'aide du problème linéarisé, avec cependant un manque de compacité dû au terme de transport qui complique les passages à la limite. On peut également montrer que la vitesse c^* est bien une vitesse exacte d'expansion pour le problème de Cauchy.

Notons que nous n'avons pas réussi à démontrer l'existence de traveling waves "supersoniques", c'est-à-dire de vitesse $c \geq v_{\max}$. Par analogie avec le cas où M est une somme de deux Dirac présenté dans la Section 3.1, on peut conjecturer que de telles traveling waves existent, mais sont sans doute d'une nature différente, et en particulier singulières.

Cette relation de dispersion est évidemment très utile pour étudier la dépendance entre la vitesse minimale $c^* = c^*(M)$ et le noyau de dispersion M . On peut ainsi montrer que

$$c^*(M^*) \leq c^*(M) \leq c^*(M_\star),$$

où M^* est le réarrangement décroissant de Schwarz de la fonction M (voir la Définition 4.1 plus bas) et $M_\star = -(-M)^*$ est son réarrangement croissant. Ainsi, M doit plutôt concentrer sa masse aux extrémités de V pour augmenter la vitesse de propagation. En poussant le raisonnement plus loin, on peut démontrer qu'on maximise la vitesse en mettant deux Dirac aux extrémités de M , ce qui nous ramène à notre précédent article [BCN14]. Plus formellement, on a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{rD}}{1+r} &\leq c^*(M) \leq \frac{2\sqrt{r}}{1+r} v_{\max} & \text{si } r < 1, \\ \sqrt{D} &\leq c^*(M) \leq v_{\max}, & \text{si } r \geq 1. \end{aligned}$$

Dans chacune de ces inégalités, le membre de droite est la vitesse de propagation calculée dans la Section 3.1.

3.4 Non-existence de traveling waves et propagation surlinéaire pour un noyau Gaussien

La dynamique se complexifie dans le cas où M n'est plus à support compact. Ainsi, les traveling waves n'existent plus, comme en atteste le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Supposons que $M(v) > 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}$. Alors l'équation (3.1) n'admet pas de traveling wave.*

On peut, malgré tout, essayer de localiser la transition entre 0 et 1. Considérons le cas d'un noyau Gaussien $M(v) = e^{-v^2}/\sqrt{2\pi}$. Les simulations numériques présentées Figure 3.4 montrent que pour des données initiales de type Heaviside, les solutions du problème de Cauchy se propagent à une vitesse

3.4. Non-existence de traveling waves et propagation surlinéaire pour un noyau Gaussien

surlinéaire. En d'autres termes, si on définit un certain $X(t)$ localisant une ligne de niveau de $\rho_f(t, \cdot)$, par exemple $\rho_f(t, X(t)) = 1/2$, alors $X(t)/t^{3/2}$ converge quand $t \rightarrow +\infty$. On peut formellement retrouver ce taux de croissance de $X(t)$ en résolvant $M(X(t)/t)e^{rt} = 1$, ce qui donne bien $X(t) \sim t^{3/2}$ dans le cas d'un $M(v)$ Gaussien.

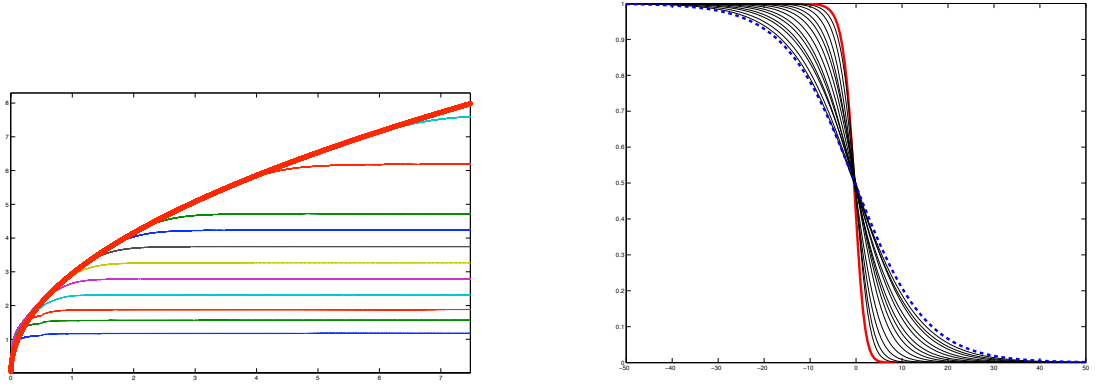


FIGURE 3.3 – Simulations numériques de l'équation (3.1) avec donnée initiale $f^0(x < 0, \cdot) = M(\cdot)$ et $f^0(x > 0, \cdot) = 0$. La distribution du noyau M est Gaussienne. Chaque tracé correspond à l'évolution de la vitesse du front pour une troncature sur $V = [-A, A]$, pour (gauche) $A = [(1 : 9), 15, 20]$, et (droite) $A = (1 : 15)$. Les courbes sont ordonnées de bas en haut : la vitesse du front est croissante en A . La fonction $t \mapsto t^{1/2}$ est tracée en rouge gras : elle semble correspondre à une très bonne approximation de l'enveloppe des courbes. Le front pourrait ainsi se propager à l'échelle $x \sim t^{3/2}$. À droite sont superposées les profils macroscopiques ρ_f obtenus en temps grand, pour différentes troncatures $A = (1 : 15)$. Les profils sont translatés afin d'avoir $\rho_f(t, 0) = \frac{1}{2}$. On observe que le taux de décroissance exponentiel est décroissant en A . Ainsi, la solution correspondant à $V = \mathbb{R}$ devrait s'aplatir quand $t \rightarrow \infty$.

Nous avons réussi à montrer [BCN15] analytiquement l'existence de bornes inférieures et supérieures se propageant en $t^{3/2}$ sur la localisation des lignes de niveau pour les noyaux Gaussiens.

Theorem 3.3. Soit $M(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$ pour tout $v \in \mathbb{R}$. Soit $f^0 \in L^\infty(\mathbb{R} \times V)$ telle que $0 \leq f^0(x, v) \leq M(v)$ pour tout $(x, v) \in \mathbb{R} \times V$. Soit f la solution du problème de Cauchy (3.1) avec donnée initiale f^0 .

— Supposons qu'il existe $a \geq b \geq 1$ tels que

$$\forall (x, v) \in \mathbb{R} \times V, \quad f^0(x, v) \leq \frac{1}{b} M\left(\frac{x}{b}\right) M(v) e^{ra}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq (1+\varepsilon)\sigma\sqrt{2rt^{3/2}}} \rho_f(t, x) = 0.$$

— S'il existe $\gamma \in (0, 1)$ et $x_L \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall (x, v) \in \mathbb{R} \times V, \quad f^0(x, v) \geq \gamma M(v) 1_{x < x_L},$$

Chapitre 3. Une version microscopique de l'équation de Fisher-KPP

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \leq (1-\varepsilon)\sigma(\frac{rt}{r+2})^{3/2}} \rho_f(t, x) \geq 1 - \gamma.$$

En d'autres termes, pour des données initiales type Heaviside (en x), on a l'estimation de localisation des lignes de niveau :

$$\sigma(\frac{r}{r+2})^{3/2} \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{X(t)}{t^{3/2}} \quad (3.7)$$

tandis que pour des données initiales à support compact en x , on a :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X(t)}{t^{3/2}} \leq \sigma\sqrt{2r}. \quad (3.8)$$

Ce résultat a nécessité une compréhension fine des contributions de chaque terme (croissance, transport et redistribution des vitesses), par des isolations successives de chaque phénomène.

Ce type de comportement est à rapprocher d'autre propagations surlinéaires obtenus dans plusieurs articles récents pour l'équation de Fisher-KPP avec diffusion fractionnaire [30], pour des dispersions non-locales non-exponentiellement bornées [44] ou pour des diffusions singulières [28]. Notons que dans le cas d'une diffusion fractionnaire, le taux de propagation n'est pas le même pour des initiales Heaviside où à support compact [30], contrairement au cas de la diffusion locale. On peut donc légitimement s'attendre à des phénomènes similaires dans notre cas.

3.5 Un théorème de grandes déviations pour un noyau Gaussien

Afin de mieux comprendre la localisation des lignes de niveau des solutions de l'équation nonlinéaire (3.1) avec noyau Gaussien (avec variance $\sigma = 1$ dans cette section pour simplifier l'exposé), avec E. Bouin, V. Calvez et E. Grenier [BCGN], nous sommes revenus à l'étude de sa linéarisation en $f \simeq 0$:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = (1+r)M(v)\rho - f. \quad (3.9)$$

Le changement de variables $f^\varepsilon(t, x, v) := e^{-rt/(1+r)\varepsilon} f(t/(1+r)\varepsilon, x/(1+r)\varepsilon^{3/2}, v/\sqrt{\varepsilon})$ permet d'éliminer la dépendance en r et correspond au scaling attendu en (t, x, v) , conduisant ainsi à l'équation :

$$\partial_t f^\varepsilon(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon(t, x, v) = \frac{1}{\varepsilon} (M_\varepsilon(v)\rho^\varepsilon(t, x) - f^\varepsilon(t, x, v)), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n \quad (3.10)$$

où $M_\varepsilon(v) := M(v/\varepsilon^{1/2})/\varepsilon^{n/2}$ et $\rho^\varepsilon(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(t, x, v) dv$.

On traite ce problème à l'aide de la transformation de Hopf-Cole, déjà utilisée dans la Section 1.1.8 :

$$u^\varepsilon(t, x, v) := -\varepsilon \log f^\varepsilon(t, x, v),$$

qui vérifie l'équation :

$$\partial_t u^\varepsilon(t, x, v) + v \cdot \nabla_x u^\varepsilon(t, x, v) = 1 - \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{u^\varepsilon(t, x, v) - u^\varepsilon(t, x, v') - |v|^2/2}{\varepsilon}\right) dv'. \quad (3.11)$$

3.5. Un théorème de grandes déviations pour un noyau Gaussien

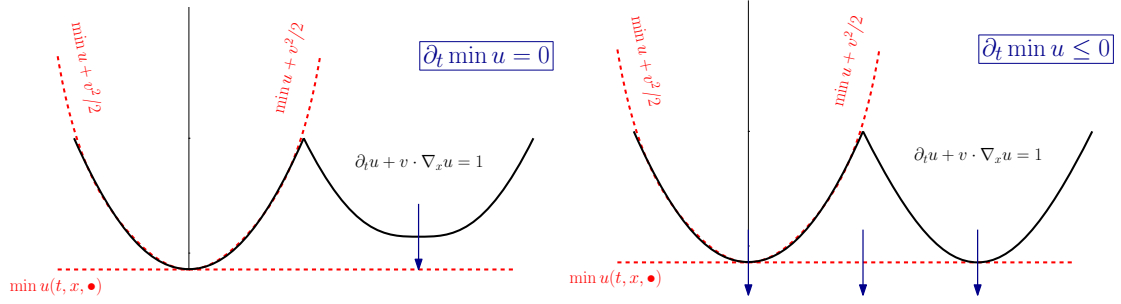


FIGURE 3.4 – Dynamique de l'équation (3.14).

Theorem 3.4 (Convergence). *Supposons que la donnée initial u_0 satisfait :*

$$[A] \quad u_0 - \frac{|v|^2}{2} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{2n}), \quad (3.12)$$

$$[B] \quad -\det(\text{Hess}_v(u_0(x, v))) \neq 0, \quad D_v^{(3)}Z_0 \in L_{loc}^\infty. \quad (3.13)$$

Soit u^ε la solution de (3.11) avec donnée initiale $u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0$. Alors, u^ε converge localement uniformément quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers u , l'unique solution de viscosité de

$$\begin{cases} \max \left(\partial_t u(t, x, v) + v \cdot \nabla_x u(t, x, v) - 1, \quad u(t, x, v) - \min_{w \in \mathbb{R}^n} u(t, x, w) - \frac{|v|^2}{2} \right) = 0, \\ \partial_t \left(\min_{w \in \mathbb{R}^n} u(t, x, w) \right) \leq 0, \\ \partial_t \left(\min_{w \in \mathbb{R}^n} u(t, x, w) \right) = 0, \quad \text{si } \mathcal{S}(u)(t, x) = \{0\}, \\ u(0, x, v) = u_0(x, v). \end{cases} \quad (3.14)$$

où $\mathcal{S}(u)(t, x) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid u(t, x, v) = \min_{w \in \mathbb{R}^n} u(t, x, w)\}$.

La notion de solution de viscosité pour cette équation n'a rien de naturelle. De même, le fait que cette équation satisfait un principe de comparaison (avec pour conséquence l'unicité de la solution) nécessite de longs développements techniques, que l'on peut surmonter grâce aux deux conditions $[A, B]$, qui ne sont pas optimales. Nous renvoyons à [BCGN] sur ces points.

Afin de convaincre le lecteur que l'équation (3.14) est bien posée, nous allons en décrire brièvement et informellement la dynamique. Tout d'abord, la première condition de (3.14) impose la contrainte parabolique :

$$u(t, x, v) \leq \min_{w \in \mathbb{R}^n} u(t, x, w) + \frac{|v|^2}{2}. \quad (3.15)$$

En conséquence, la solution atteint son minimum global par rapport à v en $v = 0$. De plus, on a la dichotomie suivante :

1. soit la contrainte est saturée : $u = \min_v u + |v|^2/2$,
2. soit la solution évolue par transport libre et création de matière : $\partial_t u + v \cdot \nabla_x u = 1$.

On distingue ensuite deux autres cas. Si $v = 0$ est l'unique minimiseur global en v (i.e $\mathcal{S}(u)(t, x) = \{0\}$), alors $\min_v u$ ne diminue pas, et la contrainte parabolique (3.15) est inchangée. Cependant, la solution continue d'évoluer par transport libre et création de matière dans la zone insaturée. Si le minimum

Chapitre 3. Une version microscopique de l'équation de Fisher-KPP

global en vitesse est atteint pour une autre vitesse que $v = 0$ (i.e $\mathcal{S}(u)(t, x) \neq \{0\}$), ce minimum peut diminuer, ce qui modifie la contrainte parabolique (3.15). C'est donc la décroissance dans la zone insaturée qui détermine la décroissance dans la zone saturée.

Définissons maintenant la fonction à partir de laquelle on peut construire une formule de représentation pour les solutions de (3.14) :

$$\mu(t, x; w) := \begin{cases} \frac{x}{w}, & \text{si } 0 \leq \frac{x}{w} \leq t \\ \frac{3}{2}|x|^{2/3}, & \text{si } |x| \leq t^{3/2} \text{ et } \frac{x}{w} > t \\ \frac{|x|^2}{2t^2} + t, & \text{si } |x| \geq t^{3/2} \text{ et } \frac{x}{w} > t. \end{cases} \quad (3.16)$$

Theorem 3.5. *Supposons $N = 1$. Soit $u_0 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors, la solution de viscosité de (3.14) est donnée par :*

$$u(t, x, v) = \inf_{(y, w)} (\phi(t, x - y, v; w) + u_0(y, w)), \quad (3.17)$$

où

$$\phi(t, x, v; w) = \frac{|v|^2}{2} + \min(\mu(t, x; v), \mu(t, x; w)),$$

sauf dans le cas particulier $v = w = x/t$, pour lequel :

$$\phi(t, x, v; w) = \frac{x}{w}.$$

On peut, à partir de cette formule de représentation et de la caractérisation de μ , calculer une localisation des lignes de niveau pour l'équation linéaire initiale (3.9) :

$$X(t) \simeq \left(\frac{((2/3)r)^{3/2}}{1+r} \right) t^{3/2}.$$

Pour pouvoir conclure que ce taux de croissance est celui associé à l'équation nonlinéaire (3.1), il reste cependant plusieurs obstacles à lever.

- Tout d'abord, même pour l'équation linéaire, il n'est pas facile de déterminer à partir de la formule de représentation (3.17) quelles conditions imposer sur les données initiales pour atteindre ce taux de croissance, calculé à partir de la fonction μ . De plus, nous avons appliqué le changement d'échelle $(t/\varepsilon, x/\varepsilon^{3/2}, v/\sqrt{\varepsilon})$ à l'équation mais pas à la donnée initiale. Là aussi il faudra s'assurer que cela ne change pas le taux de propagation.
- Ensuite, on ne dispose pas de formule de représentation pour l'équation linéaire (3.1). On peut toujours borner le taux de propagation par au-dessus à l'aide de solutions du problème linéaire, mais il est toujours plus difficile de construire des sous-solutions.

Chapitre 4

Optimisation de forme et de valeur propre

Nous considérerons dans ce chapitre une équation de réaction-diffusion de type Fisher-KPP :

$$u_t - \nabla \cdot (A(t, x) \nabla u) + q(t, x) \cdot \nabla u = r(t, x)u - u^2 \quad (4.1)$$

avec coefficients de diffusion A , d'advection q et de croissance r périodiques en $x \in \mathbb{R}^N$. Rappelons ici les résultats décrits dans la Section 1.1.1 : on peut caractériser la vitesse minimale d'existence des fronts par

$$c_e^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k_{\lambda e}(A, q, c)}{\lambda}, \quad (4.2)$$

et cette vitesse est reliée à la vitesse exacte d'expansion w_e^* dans la direction e pour le problème de Cauchy avec données initiale à support compact via l'identité $w_e^* = \min_{\xi \cdot e > 0} c_\xi^* / e \cdot \xi$ [BHN08]. Cette caractérisation rend abordable le problème d'optimisation des vitesses par rapport aux coefficients.

Question 4. *Quelle est l'influence de l'hétérogénéité de l'environnement sur la vitesse d'invasion de la population ?*

4.1 Influence de la fragmentation de l'habitat sur la vitesse

En écologie, la *fragmentation de l'habitat* est définie comme l'émergence de discontinuités au sein de celui-ci suite à des pertes de surface, l'habitat étant défini comme la partie de l'environnement la plus favorable à l'organisme considéré. Les causes de cette fragmentation peuvent être à la fois naturelles (processus géologiques, changement climatique) ou humaines (agriculture, extension des aires urbaines).

La fragmentation de l'habitat est une des principales causes d'extinction des espèces. Les biologistes ont identifié plusieurs mécanismes en ce sens : l'accroissement de la compétition dans les habitats restants, des effets de seuil sur la taille des fragments d'habitat et l'impossibilité pour les espèces de migrer vers d'autres habitats. Pour autant, très peu de modèles mathématiques ont été utilisés pour étudier cette question.

Mais comment définir mathématiquement la fragmentation d'un habitat ? Une première approche, due à Shigesada, Kawasaki et Teramoto [95], consiste à comparer l'environnement associé aux coefficients $A_L(x) := A(x/L)$, $q_L(x) = q(x/L)$ et $c_L(x) = r(x/L)$, avec $L > 1$, à celui, intuitivement plus fragmenté, associé à $A(x)$, $q(x)$ et $r(x)$.

J'ai ainsi confirmé analytiquement [N09-3] des simulations numériques [96] montrant que, sous l'hypothèse $\nabla \cdot q = 0$, la fonction $L \mapsto k_p(A_L, q_L, r_L)$ est croissante pour tout $p \in \mathbb{R}^N$ et donc la vitesse $w_e^*(A_L, q_L, r_L)$ est croissante en L , ce qui signifie que la fragmentation de l'environnement ralentit l'invasion biologique.

Une autre approche, due à Berestycki, Hamel et Roques [17] (voir aussi [31]), consiste à optimiser la vitesse en fonction du taux de croissance r parmi la classe des fonctions valant r_+ sur un ensemble E de mesure donnée $|E| = m$ et r_- sur son complémentaire, avec $A \equiv I_N$ et $q \equiv 0$. En dimension $N = 1$, l'environnement le moins fragmenté est alors celui associé à l'intervalle centré¹ de mesure m , que l'on notera E^* .

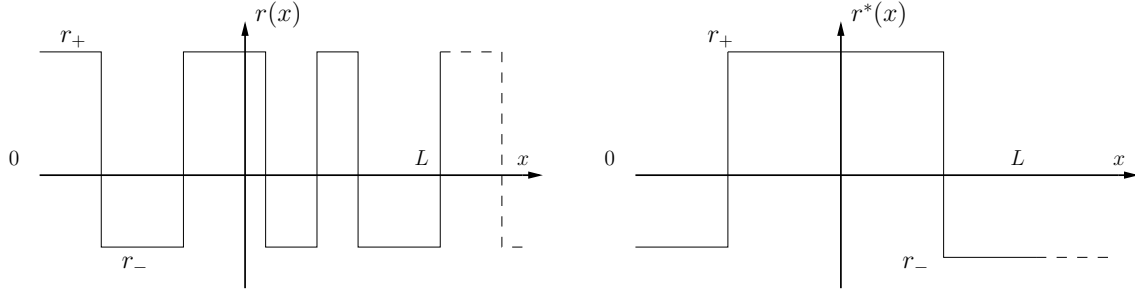


FIGURE 4.1 – Gauche : un taux de croissance r correspondant à un habitat “fragmenté”. Droite : Son réarrangement décroissant r^* .

On peut en fait généraliser cette construction à chaque ensemble de niveau d’une fonction étagée puis à toute fonction bornée r , c’est ce qu’on appelle le *réarrangement de Schwarz* r^* de cette fonction.

Définition 4.1. *Le réarrangement de Schwarz d’une fonction périodique mesurable et bornée $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l’unique fonction r^* périodique mesurable*

- *de même fonction de distribution,*
- *symétrique par rapport à $x = 0$,*
- *décroissante sur $(0, L/2)$.*

On peut donc considérer que le réarrangement de Schwarz r^* du taux de croissance correspond à l’habitat le moins fragmenté parmi les habitats de fonction de distribution donnée.

Ce réarrangement satisfait plusieurs inégalités puissantes telles que celles de Polya-Szego ou de Hardy-Littlewood (voir [61]). En utilisant la caractérisation par quotient de Rayleigh de la valeur propre symétrique $k_0(1, 0, r)$:

$$k_0(1, 0, r) = - \min_{\alpha \in H_{per}^1(0, L)} \frac{\int_0^L |\alpha'|^2 - \int_0^L r(x) \alpha^2}{\int_0^L \alpha^2}, \quad (4.3)$$

Berestycki, Hamel et Roques en ont déduit [17] une inégalité de type Faber-Krahn sur la valeur propre associée à $p = 0$:

$$k_0(1, 0, r^*) \geq k_0(1, 0, r).$$

Le signe de cette valeur propre déterminant le comportement en temps grand de la solution du problème de Cauchy associé à

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + r(x)u - u^2,$$

on peut ainsi observer des situations pour lesquelles la solution de l’équation avec un taux de croissance réarrangé r^* tend vers une solution positive de l’équation stationnaire quand $t \rightarrow +\infty$, on peut alors

1. On considère dans cette section des coefficients périodiques en x . En conséquence, on peut aisément vérifier que la vitesse ne varie pas quand on translate les coefficients. La position de l’intervalle au sein de la cellule de périodicité $(0, L)$ est donc sans importance. Ça n’est plus vrai si l’on considère des conditions au bord de Dirichlet, Neumann ou Robin, voir Section 4.2.

4.2. Optimisation des valeurs propres auto-adjointes en dimension N

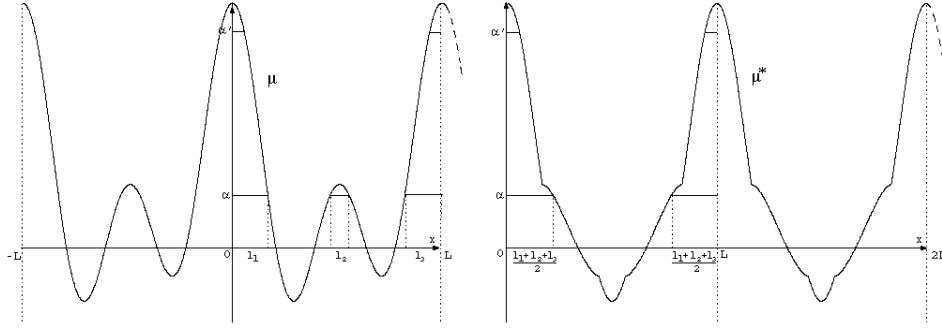


FIGURE 4.2 – Une fonction μ et son réarrangement de Schwarz μ^* [Berestycki-Hamel-Roques 05]

parler de persistance de la population, tandis que celle associée au taux r tend vers 0, on parle alors d'extinction, alors que la situation inverse est toujours impossible. Ainsi, l'habitat le moins fragmenté est le plus favorable à la survie de la population. Mais quand les espèces associées à r et à r^* persistent, comment comparer leurs comportements ?

En dimension 1, on peut montrer [N09-3] que

$$\forall p \in \mathbb{R}, \quad k_p(1, 0, r^*) \geq k_p(1, 0, r), \quad \text{et donc} \quad c^*(1, 0, r^*) \geq c^*(1, 0, r),$$

c'est-à-dire que l'habitat le moins fragmenté donne la vitesse de propagation la plus grande.

La principale difficulté pour obtenir ces résultats était le caractère non-symétrique des opérateurs L_p quand $p \neq 0$. Du fait de la condition au bord de périodicité, on ne peut pas se débarrasser du terme d'ordre 1 par un changement de variable. Cette non-symétrie empêche d'écrire la valeur propre k_p comme un quotient de Rayleigh, c'est-à-dire comme le maximum d'un quotient d'intégrales. Les propriétés du réarrangement étant intégrales plutôt que ponctuelles, il existe très peu de résultats sur l'effet du réarrangement sur des valeurs propres d'opérateurs non-symétriques, et les résultats existants reposent tous sur une symétrisation du terme d'ordre 1 [3, 48].

J'ai surmonté cette difficulté en trouvant une nouvelle caractérisation intégrale de cette valeur propre :

$$k_p(1, 0, r) = - \min_{\alpha \in H_{per}^1(0, L)} \left(\int_0^L \alpha'^2 - \int_0^L r(x) \alpha^2 - \frac{Lp^2}{\frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{\alpha^2}} \right) / \int_0^L \alpha^2. \quad (4.4)$$

Notons tout de suite que cette caractérisation n'est pas le minimum d'une forme quadratique, ce qui confirme qu'il n'était pas possible de réécrire cette valeur propre comme un quotient de Rayleigh. L'inégalité $k_p(1, 0, r^*) \geq k_p(1, 0, r)$ découle alors immédiatement de cette formule et des inégalités classiques vérifiées par le réarrangement.

Cette caractérisation découle d'une formule plus générale permettant de caractériser toute valeur propre d'un opérateur non-symétrique comme minimum d'une famille de valeurs propres d'opérateurs auto-adjoints :

$$k_p(A, q, c) = \min_{\beta \in C_{per}^1} k_0 \left(A, 0, (\nabla \beta + p)A(\nabla \beta + p) + q \cdot (\nabla \beta + p) + c - \nabla \cdot q/2 \right). \quad (4.5)$$

4.2 Optimisation des valeurs propres auto-adjointes en dimension N

L'optimisation de la vitesse $c_e^*(I_N, 0, r)$ en fonction du taux de croissance r est beaucoup plus difficile en dimension N .

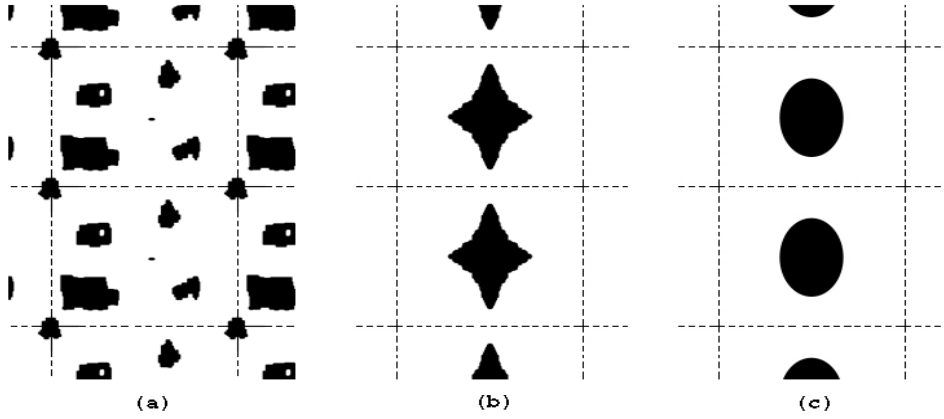


FIGURE 4.3 – (a) Un ensemble E , (b) son symétrisé de Steiner $E^\#$, (c) un autre ensemble Steiner symétrique ayant même aire que E , mais pas obtenu par symétrisation de Steiner [Berestycki-Hamel-Roques 05]

Une notion utile en dimension N est la *symétrisation de Steiner*. Considérons une fonction périodique r de N variables (x_1, \dots, x_N) . On peut construire une fonction r^{*1} en fixant (x_2, \dots, x_N) et appliquant le réarrangement de Schwarz à la fonction $x_1 \mapsto r(x_1, \dots, x_N)$. On réitère ensuite en fixant (x_1, x_3, \dots, x_N) et en réarrangeant $x_2 \mapsto r^{*1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$. La fonction obtenue après avoir réarrangé en chaque variable est la symétrisation de Steiner $r^\#$ de r . Elle a même fonction de distribution que r , est symétrique et décroissante par rapport à chaque hyperplan $\{x_k = 0\}$. Pour autant, ces propriétés ne suffisent plus à caractériser une telle fonction, qui n'est donc plus unique (voir Figure 4.2). On pourrait par exemple obtenir une autre fonction, invariante par symétrisation de Steiner, en réarrangeant d'abord en x_N , puis en x_{N-1} etc.

Cette symétrisation vérifie toujours les inégalités classiques de Hardy-Littlewood et Polya-Szego, ce qui permet de démontrer [17] que

$$k_0(I_N, 0, r^\#) \geq k_0(I_N, 0, r).$$

Cependant, contrairement à la dimension 1, on peut construire des contre-exemples [N09-3] pour lesquels la symétrisation de Steiner de r *diminue* la vitesse de propagation au lieu de l'augmenter.

Il s'avère en fait que même le problème le plus simple, celui de la minimisation de la valeur propre principale

$$F(E) := k_0(I_N, 0, B1_E)$$

de l'opérateur de Schrodinger $-\Delta - B1_E$ avec conditions au bord périodiques en fonction du domaine $E \subset C$ d'aire donnée, est mal compris.

Rappelons l'interprétation de ce problème en dynamique des populations : E étant vu comme la zone favorable ou l'habitat de l'espèce considérée, il s'agit de comprendre où placer cet habitat pour maximiser les chances de survie de l'espèce [17, 31].

On peut montrer [86] qu'il existe un maximiseur \hat{E} de la fonction F , et que ce maximiseur est forcément Steiner symétrique, $\hat{E}^\# = \hat{E}$. En dimension 1, \hat{E} est donc un intervalle, mais peut-on mieux caractériser \hat{E} en dimension N ?

Des simulations numériques montrent que l'ensemble optimal \hat{E} ressemble à une boule, au complément d'une boule ou à une bande, en fonction de l'amplitude B (voir [60, 86] et Figure 4.2). L. Roques et

4.2. Optimisation des valeurs propres auto-adjointes en dimension N

F. Hamel ont montré [86] analytiquement que la boule ne pouvait pas être optimale pour toute amplitude B et Kao, Lou et Yanagida [60] ont prouvé que la bande cessait d'être un minimiseur local pour certains paramètres.

Nous avons démontré avec J. Lamboley, A. Laurain et Y. Privat [LLNP], que le bord d'un ensemble maximiseur $\partial\hat{E}$ ne pouvait en fait contenir aucun morceau de sphère, contredisant ainsi les conjectures émises sur la base des simulations numériques.

Theorem 4.2. [LLNP] *Si $\partial\hat{E} \cap \Omega$ est analytique, alors $\partial\hat{E} \cap \Omega$ ne contient aucun bout de sphère.*

Nous avons également considéré le cas de conditions de Neumann ou de Robin dans un domaine Ω n'étant plus forcément l'hypercube C associé aux conditions au bord périodiques. Pour ces conditions, nous avons démontré que si l'ensemble \hat{E} (resp. $\Omega \setminus \hat{E}$) est radialement symétrique par rapport à un point de Ω et suffisamment régulier, alors Ω est forcément une sphère, de même que \hat{E} (resp. $\Omega \setminus \hat{E}$).

D'autre part, nous traitons également le cas de la dimension 1 ($\Omega = (0, 1)$) avec conditions au bord de Robin, problème resté ouvert, et montrons que \hat{E} est forcément un intervalle centré ou un intervalle touchant le bord, en fonction de la position du paramètre de Robin β par rapport à un paramètre critique calculé antérieurement dans [57].

Enfin, nous avons étudié plus avant le cas où $\Omega = B(0, 1)$ est une boule avec conditions au bord de Neumann. Pour $N = 2, 3, 4$, l'ensemble \hat{E} maximisant la valeur propre principale de $-\Delta - B1_E$ dans Ω avec conditions au bord de Neumann ne peut jamais être une boule. Les simulations numériques présentées Figure 4.2 plaident pour un ensemble \hat{E} ressemblant à un bout de disque, mais nous n'avons ni confirmé ni infirmé analytiquement ces observations.

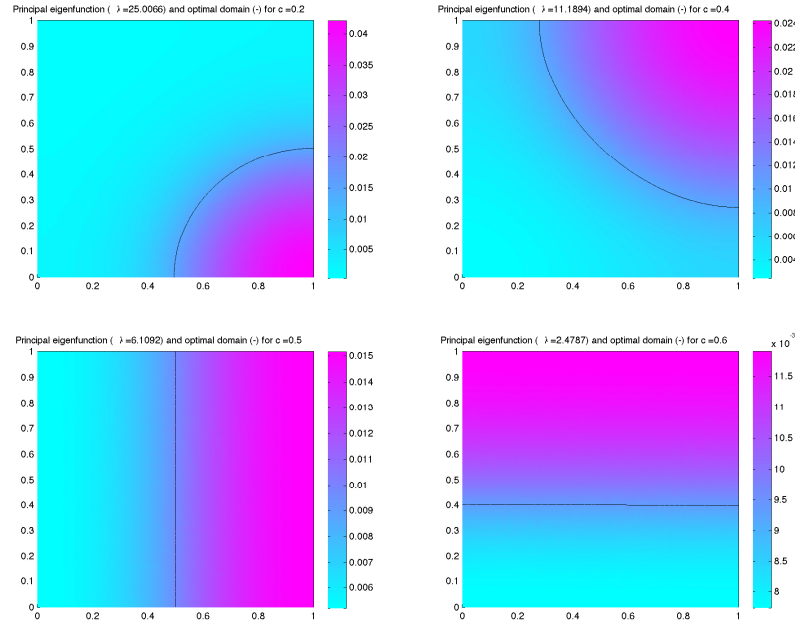


FIGURE 4.4 – Domaines optimaux pour divers paramètres dans le cas de conditions au bord de Neumann dans $\Omega = (0, 1)^2$.

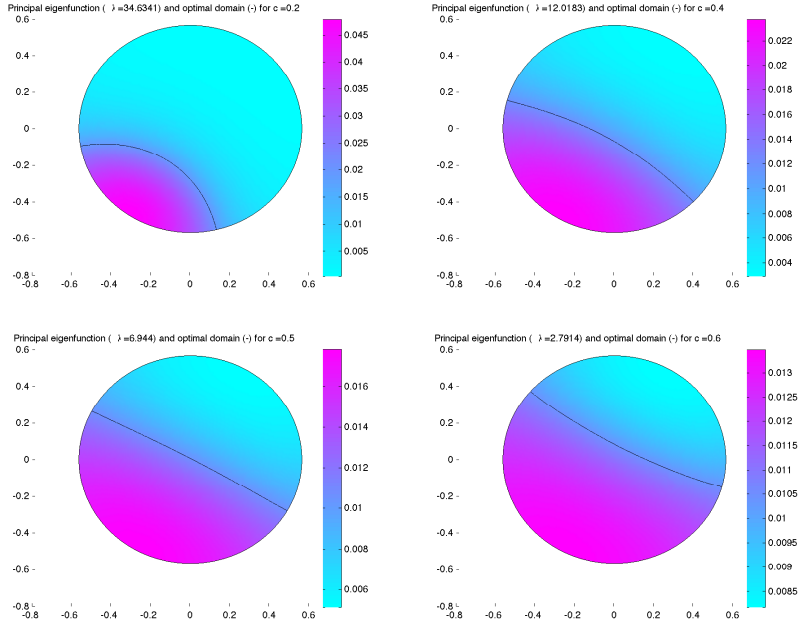


FIGURE 4.5 – Domaines optimaux pour divers paramètres dans le cas de conditions au bord de Neumann dans $\Omega = B(0, 1/\sqrt{\pi})$.

4.3 Autres résultats de dépendance

4.3.1 Limite de la vitesse pour de grandes périodes

La formule (4.5) est extrêmement utile pour étudier l'optimisation des valeurs propres $k_p(A, q, r)$. Nous l'avons utilisée avec F. Hamel et L. Roques [HNR11] pour calculer la limite de la vitesse $w_e^*(A_L, q_L, r_L)$ quand $L \rightarrow +\infty$. Nous avons pu caractériser cette limite via des méthodes de solutions de viscosité, à l'aide de correcteurs associés à une équation de Hamilton-Jacobi quadratique d'ordre 1. Dans le cas où $N = 1$, $A = 1$ et $q \equiv 0$, on peut alors caractériser la limite par

$$w_\infty^* = \min_{k \geq \|r\|_\infty} k/j(k), \quad \text{avec} \quad j(k) := \int_0^1 \sqrt{k - r(x)} dx, \quad (4.6)$$

cette caractérisation étend un travail préliminaire de F. Hamel et L. Roques avec J. Fayard [51] dans le cas d'un terme r ne prenant que deux valeurs.

4.3.2 Petits résultats de dépendance

J'ai également utilisé la formule (4.5) dans un article [N11] résolvant plusieurs questions laissées en suspens sur l'optimisation de la vitesse de propagation. J'ai notamment montré les résultats suivants :

- pour $N = 1$, la vitesse $w^*(d, 0, r)$ n'est pas nécessairement croissante par rapport au coefficient de diffusion d si r n'est pas constant en x ,
- si $q = \nabla Q$ est un champ de vecteur gradient, alors la vitesse est plus petite qu'en l'absence de terme d'advection : $w_e^*(I_N, \nabla Q, r_0) \leq w_e^*(I_N, 0, r_0) = 2\sqrt{r_0}$,
- prendre la moyenne de r en t ou en x décroît la vitesse $w_e^*(I_N, 0, r)$.

Berestycki, Hamel et Nadirashvili [16] avait montré la croissante de l'application $\kappa \mapsto w_e^*(\kappa A, 0, r_0)$ en dimension arbitraire, pour une matrice de diffusion A dépendant de x et un taux de croissance r_0

4.3. Autres résultats de dépendance

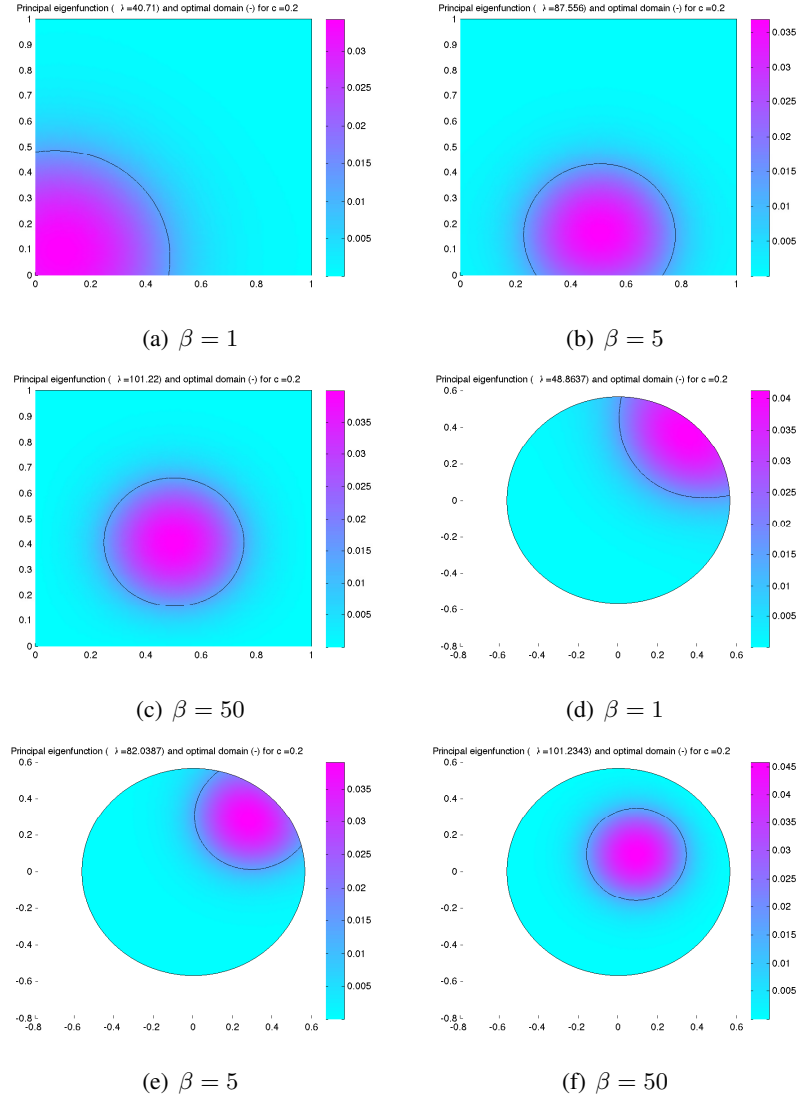


FIGURE 4.6 – Domaines optimaux pour $\Omega = B(0, 1)$ et $\Omega = (0, 1)^2$, pour différents paramètres, avec conditions au bord de Robin : $\partial_n \varphi + \beta \varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. Les résultats de [LLNP] montrent que les domaines en (c) et (f) ne sont pas des boules.

constant. El Smaily [36] avait exhibé deux matrices A et B telles que $A \geq B$ au sens des matrices symétriques positives, mais $w_e^*(A, 0, r_0) < w_e^*(B, 0, r_0)$, montrant que l'inégalité obtenue dans [16] ne pouvait être valable que pour des matrices de diffusion proportionnelles. Le premier résultat énoncé ci-dessus montre qu'un tel résultat de croissance par rapport à la diffusion ne peut pas être vrai si le taux de croissance r dépend de x .

Il est connu qu'un terme d'advection de divergence nul accélère la propagation [16] (voir aussi [62] et les nombreuses références qui ont suivies concernant la quantification de cette accélération). Nous montrons ici l'effet inverse pour des termes d'advection gradient, qui sont en un certain sens dans le supplémentaire des fonctions de divergence nulle.

Il est aisé de montrer que la moyenne de r en t et en x décroît la vitesse. Le dernier résultat énoncé est plus précis : on peut séparer l'effet des moyennes temporelles et spatiales.

Par ailleurs, sur le même sujet, la formule (4.5) a également été utilisée par Liang, Lin et Matano [69] pour étudier la maximisation de la vitesse en fonction de la direction de propagation pour un taux de croissance ne dépendant que de x_1 en dimension N .

4.3.3 Dépendance aléatoire stationnaire ergodique

La caractérisation à l'aide de valeurs propres généralisées de la vitesse de propagation pour le problème de Cauchy associé à l'équation de Fisher-KPP unidimensionnelle avec des coefficients aléatoires, stationnaires et ergodiques décrits dans la Section 1.1.4 permet d'utiliser les méthodes développées plus haut pour étudier la dépendance de cette vitesse en fonction des coefficients de l'équation. On peut ainsi étendre plusieurs résultats du cas périodique au cas aléatoire. Ainsi, j'ai montré [N15-2] que l'augmentation de l'amplitude du terme de réaction r ou bien le rescaling $x \rightarrow x/L$, avec $L > 1$, des coefficients, accélèrent la propagation de la population. Reste maintenant à obtenir des résultats similaires pour des problèmes n'ayant aucune équivalence dans le cas déterministe (périodique) : par exemple, des simulations numériques [96] semblent montrer qu'augmenter la variance de l'hétérogénéité (c'est-à-dire le degré de stochasticité) va accélérer la propagation.

Liste des publications

- [BCGN] E. Bouin, V. Calvez, E. Grenier, G. Nadin. Large deviations for velocity- jump processes and non-local Hamilton-Jacobi equations *Soumis*.
- [BNsoumis] H. Berestycki, G. Nadin. Asymptotic spreading for general heterogeneous Fisher-KPP type equations. *Soumis*.
- [NR16] G. Nadin, L. Rossi. Generalized transition fronts for one-dimensional almost periodic Fisher-KPP equations. *Arch. Rat. Mec. Anal.*, 223(3) :1239–1267, 2017.
- [LLNP] A. Laurain, J. Lamboley, G. Nadin, et Y. Privat. Properties of minimizers of the principal eigenvalue with indefinite weight and robin conditions, *Calc. Var and PDE*, 55(6), 2016.
- [Nchapitre] G. Nadin. Hyperbolic traveling waves in neolithic populations modelling. *Accepté pour publication dans le livre “Interactions in Complex Systems”*.
- [BoN15] J. Bouhours, G. Nadin. A variational approach to reaction-diffusion equations with forced speed in dimension 1. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 35(5) : 1843–1872, 2015.
- [NR15] G. Nadin, L. Rossi. Transition waves for Fisher-KPP equations with general time-heterogeneous et space-periodic coefficients. *Analysis and PDE*, 8(6) :1351 ?1377, 2015.
- [GN15] L. Girardin, G. Nadin. traveling waves for diffusive et strongly competitive systems : relative motility et invasion speed. *Eur. J. Appl. Math.*, 26(4) :521–534, 2015.
- [BCN15] E. Bouin, V. Calvez, et G. Nadin. Propagation in a kinetic reaction-transport equation : traveling waves et accelerating fronts. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 217(2) : 571–617, 2015.
- [N15-1] G. Nadin. Critical traveling waves for general heterogeneous one-dimensional reaction-diffusion equations. *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 32(4) :841–873, 2015.
- [N15-2] G. Nadin. How does the spreading speed associated with the Fisher-KPP equation depend on random stationary diffusion et reaction terms ? *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 20(6) :1785–1803, 2015.
- [BCN14] E. Bouin, V. Calvez, et G. Nadin. Hyperbolic traveling waves driven by growth. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 24(6) :1165–1195, 2014.
- [DN14] A. Ducrot, G. Nadin, Asymptotic behaviour of traveling waves for the delayed Fisher-KPP equation. *Journal of differential equations*, 256(9) :3115–3140, 2014.
- [NRRP13] G. Nadin, L. Rossi, L. Ryzhik et B. Perthame. Wave-like solutions for non-local reaction-diffusion equations : a toy model. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 8(2) :33–41, 2013.
- [BN12] H. Berestycki et G. Nadin. Spreading speeds for one-dimensional monostable reaction-diffusion equations. *J. Math. Phys.*, 53(11), 2012.
- [NR12] G. Nadin et L. Rossi. Propagation phenomena for time heterogeneous KPP reaction diffusion equations. *J. Math. Pures Appl.*, 98(9) :633–653, 2012.

Liste des publications

- [GGN12] J. Garnier, T. Giletti et G. Nadin. Maximal et minimal spreading speeds for reaction diffusion equations in nonperiodic slowly varying media. *J. Dynam. Differential Equations*, 24(3) :521–538, 2012.
- [N11] G. Nadin. Some dependence results between the spreading speed et the coefficients of the space-time periodic Fisher-KPP equation. *Eur. J. Appl. Math.*, 22 :169–185, 2011.
- [NPT11] G. Nadin, B. Perthame et M. Tang. Can a traveling wave connect two unstable states ? The case of the non-local Fisher equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(9-10) :553–557, 2011.
- [HN11] F. Hamel et G. Nadin. Spreading properties et complex dynamics for monostable reaction-diffusion equations. *Comm. Part. Diff. Equations*, 37 :511–537, 2012.
- [HNR11] F. Hamel, G. Nadin, et L. Roques. A viscosity solution method for the spreading speed formula in slowly varying media. *Indiana Univ. Math. J.*, 60 :1229–1248, 2011.

Autres articles, non présentés dans ce manuscrit

- [NSVsoumis] G. Nadin, M. Strugarek, N. Vauchelet. Hindrances to bistable front propagation : application to Wolbachia invasion, *soumis*.
- [GNsoumis] L. Girardin, G. Nadin. Competition in periodic media : II – Segregative limit of pulsating fronts and "Unity is not Strength"-type result, *soumis*.
- [NPsoumis] G. Nadin, Y. Privat. An extremal eigenvalue problem arising in heat conduction. *J. Math. Pures et Appl.*, 105(6) :845–872, 2016.
- [CKNR14] M. Cristofol, I. Kaddouri , G. Nadin et L. Roques. Coefficient determination via asymptotic spreading speeds. *Inverse problems*, 30, 2014.
- [MNP14] G. Marck, G. Nadin, et Y. Privat. What is the optimal shape of a fin for one-dimensional heat conduction ? *SIAM J. Appl. Math.* 74 (2014), no. 4, 1194–1218.
- [Het13] C. Hauzy, G. Nadin, E. Canard, I. Gounet, N. Mouquand et B. Ebenman. Confronting the Paradox of Enrichment to the Metacommunity Perspective *PLoS ONE*, 8(12), 2013.

Articles de thèse

- [N10] G. Nadin. Existence et uniqueness of the solutions of a space-time periodic reaction-diffusion equation, *J. Diff. Eq.*, 249(6) :1288–1304, 2010.
- [N09-1] G. Nadin. The principal eigenvalue of a space-time periodic parabolic operator. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4 :269–295, 2009.
- [N09-2] G. Nadin. Traveling fronts in space-time periodic media. *J. Math. Pures Appl.*, 92 :232–262, 2009.
- [N09-3] G. Nadin. The effect of the Schwarz rearrangement on the periodic principal eigenvalue of a nonsymmetric operator. *SIAM J. Math. Anal.*, 4 :2388–2406, 2009.
- [BNPR09] H. Berestycki, G. Nadin, B. Perthame et L. Ryzhik, The non-local Fisher-KPP equation : traveling waves et steady states. *Nonlinearity*, 22 :2813–2844, 2009.
- [BHN08] H. Berestycki, F. Hamel, et G. Nadin. Asymptotic spreading in heterogeneous diffusive excitable media. *J. Func. Anal.*, 255(9) :2146–2189, 2008.
- [NPR08] G. Nadin, B. Perthame, et L. Ryzhik. Traveling waves for the Keller-Segel system with Fisher birth term. *Interface free bound.*, 10 :517–538, 2008.

Bibliographie

- [1] M. Alfaro, J. Coville. Rapid traveling waves in the non-local Fisher equation connect two unstable states. *Appl. Math. Lett.*, 25 :2095–2099, 2012.
- [2] O. Alvarez, J.-M. Lasry, P.-L. Lions. Convex viscosity solutions and state constraints. *J. Math. Pures Appl.*, 76(3) :265–288, 1997.
- [3] A. Alvino, G. Trombetti, P.-L. Lions. Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization *Ann I.H.P. Anal non lin.*, 7(2) :37–65, 1990.
- [4] A.J. Ammerman, L.L. Cavalli-Sforza. The Neolithic Transition et the Genetics of Populations in Europe. *Princeton University Press*, 1984.
- [5] S. Angenent. The zero set of a solution of a parabolic equation. *J. Reine Angew. Math.*, 390 :79–96, 1988.
- [6] D.G. Aronson, H.F. Weinberger. Multidimensional nonlinear diffusions arising in population genetics. *Adv. Math.*, 30 :33–76, 1978.
- [7] G. Barles, and B. Perthame. Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J. Control Optim.*, 26(5) :1133–1148, 1988.
- [8] G. Barles, and B. Perthame. Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 21(4) :557–579, 1987.
- [9] N. Barton, M. Turelli. Spatial waves of advances with bistable dynamics : cytoplasmic and genetic analogues of Allee effects. *The Am. Nat.*, 78(3), 2011.
- [10] H. Berestycki, J. Bouhours et G. Chapuisat Front propagation and blocking phenomena in cylinder with varying cross section. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 55(3), 2016.
- [11] H. Berestycki et G. Chapuisat. Traveling fronts guided by the environment for reaction-diffusion equations. *Netw. Heterog. Media* 8(1) :79–114, 2013.
- [12] H. Berestycki, O. Diekmann, K. Nagelkerke, P. Zegeling Can a species face a climate change ?. *Bull. Mathematical Biology*, 71(2), 2008.
- [13] H. Berestycki, et F. Hamel. Generalized traveling waves for reaction-diffusion equations. *Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations. In honor of H. Brezis, Contemp. Math.*, 446 :101–123, 2007.
- [14] H. Berestycki, et F. Hamel. Front propagation in periodic excitable media. *Comm. Pure Appl. Math.*, 55 :949–1032, 2002.
- [15] H. Berestycki, F. Hamel, et H. Matano. Bistable traveling waves around an obstacle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 62(6) :729–788, 2009.
- [16] H. Berestycki, F. Hamel, et N. Nadirashvili. The speed of propagation for kpp type problems. I - periodic framework. *J. Europ. Math. Soc.*, 7 :173–213, 2005.

Bibliographie

- [17] H. Berestycki, F. Hamel, et L. Roques. Analysis of the periodically fragmented environment model. I. Species persistence. *J. Math. Biol.*, 51 :75–113, 2005.
- [18] H. Berestycki, F. Hamel, et L. Roques. Analysis of the periodically fragmented environment model : II. Biological invasions et pulsating traveling fronts, *J. Math. Pures Appl.*, 84 :1101–1146, 2005.
- [19] H. Berestycki, F. Hamel et L. Rossi. Liouville-type results for semilinear elliptic equations in unbounded domains. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 186(4) :469–507, 2007.
- [20] H. Berestycki, A. Kretzschmar, L. Roques, et A. Roques. A population facing climate change : joint influences of Allee effects et environmental boundary geometry. *Population Ecology*, 50(2) :215–225, 2008.
- [21] H. Berestycki, L. Nirenberg. traveling fronts in cylinders. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 9(5) :497–572, 1992.
- [22] H. Berestycki, L. Nirenberg, et S. R. S. Varadhan. The principal eigenvalue et maximum principle for second order elliptic operators in general domains. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47 :47–92, 1994.
- [23] H. Berestycki, L. Rossi. Reaction-diffusion equations for population dynamics with forced speed, I - The case of the whole space. *Discrete et Continuous Dynamical System Series B*, 21(1) :41–67, 2008.
- [24] H. Berestycki, et L. Rossi. Generalizations et properties of the principal eigenvalue of elliptic operators in unbounded domains *Comm. Pure Appl. Math.*, 68(6) :1014–1065, 2015.
- [25] M. Bisi et L. Desvillettes. From reactive Boltzmann equations to reaction-diffusion systems. *J. Stat. Phys.*, 125(1) :249–280, 2006.
- [26] K. Bjerklov. Positive Lyapunov exponents for continuous quasi-periodic Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, 47(2), 2006.
- [27] S. Bochner. Beitrage zur theorie der fastperiodischen funktionen. *Math. Ann.*, 96 :119–147, 1926.
- [28] E. Bouin, V. Calvez, N. Meunier, S. Mirrahimi, B. Perthame, G. Raoul, R. Voituriez, Invasion fronts with variable motility : phenotype selection, spatial sorting et wave acceleration. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(15-16) : 761–766, 2012.
- [29] M.D. Bramson, Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 44 (1983).
- [30] X. Cabré et J.-M. Roquejoffre. Front propagation in Fisher-KPP equations with fractional diffusion. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347 :1361–1366, 2009.
- [31] R.S. Cantrell et C. Cosner, Diffusive logistic equations with indefinite weights : population models in disrupted environments. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 112 :293–318, 1989.
- [32] R. S. Cantrell, C. Cosner. Spatial ecology via reaction-diffusion equations. John Wiley et Sons Ltd., Chichester, UK, 2003, 428 pp.
- [33] G. Chapuisat, E. Grenier. Existence et nonexistence of traveling wave solutions for a bistable reaction-diffusion equation in an infinite cylinder whose diameter is suddenly increased. *Commun. Partial Differ. Equations*, 30(10-12) :1805–1816, 2005.
- [34] C. Cuesta, S. Hittmeir et C. Schmeiser. Traveling waves of a kinetic transport model for the KPP-Fisher equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 44, 4128–4146.
- [35] A. Ducrot, T. Giletti, et H. Matano. Existence et convergence to a propagating terrace in one-dimensional reaction-diffusion equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366 :5541–5566, 2014.
- [36] M. ElSmaily. PhD thesis, Section 2.7, “Équations de réaction-diffusion dans des milieux hétérogènes non-bornés”, 2008.

- [37] L. C. Evans, et P. E. Souganidis. A PDE approach to geometric optics for certain semilinear parabolic equations. *Indiana Univ. Math.*, 38(1) :141–172, 1989.
- [38] G. Faye, et M. Holzer. Modulated traveling fronts for a non-local Fisher-KPP equation : a dynamical system approach. *J. of Differential Equations*, 258(7) :2257–2289, 2015.
- [39] R. A. Fisher. The advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, 7 :335–369, 1937.
- [40] J. Fort, et V. Méndez. Time-Delayed Theory of the Neolithic Transition in Europe. *Phys. Rev. Let.*, 82(4), 1999.
- [41] J. Fang et X.-Q. Zhao, Monotone wavefronts of the non-local Fisher-KPP equation. *2011 Nonlinearity*, 24(11) :3043–3054, 2011.
- [42] M. Freidlin. Functional Integration et Partial Differential Equations. *Ann. Math. Stud.*, 109, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.
- [43] M. Freidlin et J. Gärtner. On the propagation of concentration waves in periodic et random media. *Sov. Math. Dokl.*, 20 :1282–1286, 1979.
- [44] J. Garnier, Accelerating solutions in integro-differential equations *SIAM J. Math. Anal.*, 43(4)1955–1974, 2011.
- [45] S. Genieys, V. Volpert et P. Auger. Pattern et Waves for a Model in Population Dynamics with non-local Consumption of Resources. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 1(1) :65–82, 2006.
- [46] A. Gomez, S. Trofimchuk. Monotone traveling wavefronts of the KPP-Fisher delayed equation. *J. Diff. Eqs.*, 250 : 1767–1787, 2011.
- [47] K.P. Hadeler. Hyperbolic traveling fronts. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 31 :89–97, 1988.
- [48] F. Hamel, N. Nadirashvili, and E. Russ. Rearrangement inequalities and applications to isoperimetric problems for eigenvalues. *Annals of Math.*, 174 :647–755, 2011.
- [49] F. Hamel, J. Nolen, J.-M. Roquejoffre et L. Ryzhik. A short proof of the logarithmic Bramson correction in Fisher-KPP equations. *Netw. Heterog. Media*, 8(1) :275–289, 2013.
- [50] F. Hamel, J. Nolen, J.-M. Roquejoffre et L. Ryzhik. The logarithmic time delay of KPP fronts in a periodic medium. *J. European Math. Society*, à paraître.
- [51] F. Hamel et L. Roques et J. Fayard. Spreading speeds in slowly oscillating environments. *Bull. Math. Biol.*, 72(5) :1166–1191, 2010.
- [52] F. Hamel et L. Rossi. Admissible speeds of transition fronts for non-autonomous monostable equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 47(5) :3342–3392, 2015.
- [53] F. Hamel and L. Ryzhik. On the non-local fisher-KPP equation : steady states, spreading speeds, and global bounds. *Nonlinearity*, 27, 2014.
- [54] F. Hamel et Y. Sire. Spreading speeds for some reaction-diffusion equations with general initial conditions. *SIAM J. Math. Anal.*, 42 :2872–2911, 2010.
- [55] K. Hasik et S. Trofimchuk. Slowly oscillating wavefronts of the KPP-Fisher delayed equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34(9) :3511–3533, 2014.
- [56] K. Hasik ; S. Trofimchuk. An extension of the Wright’s $3/2$ -theorem for the KPP-Fisher delayed equation. *Proc. AMS*, 143(7) :3019–3027, 2015.
- [57] M. Hintermüller, C.-Y. Kao, et A. Laurain. Principal eigenvalue minimization for an elliptic problem with indefinite weight et Robin boundary conditions. *Appl. Math. Optim.*, 65(1) :111–146, 2012.
- [58] H. Ishii. A boundary value problem of the Dirichlet type for Hamilton-Jacobi equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 16(1) :105–135, 1989.

Bibliographie

- [59] Ja. I. Kanel. Stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations encountered in combustion theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, 59(101) : 245–288, 1962.
- [60] C.-Y. Kao, Y. Lou, et E. Yanagida. Principal eigenvalue for an elliptic problem with indefinite weight on cylindrical domains. *Math Biosci Eng*, 5(2) :315–35, 2008.
- [61] B. Kawohl. On the isoperimetric nature of a rearrangement inequality et its consequences for some variational problems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 94 :227–243, 1986.
- [62] A. Kiselev et L. Ryzhik. Enhancement of the traveling front speeds in reaction-diffusion equations with advection. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 18 :309–358, 2001.
- [63] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, et N.S. Piskunov. Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Bulletin Université d'Etat à Moscou (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ.)*, 1–26, 1937.
- [64] Y. Zhou, et M. Kot, Discrete-time growth-dispersal models with shifting species ranges. *Theor Ecol*, 4 :13–25, 2011.
- [65] S. M. Kozlov. Ground states of quasiperiodic operators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 271(3) :532–536, 1983.
- [66] M. K. Kwong, et C. Ou. Existence et nonexistence of monotone traveling waves for the delayed Fisher equation. *J. Diff. Eq.*, 249(3) :728–745, 2010.
- [67] P.-L. Lions, et P. E. Souganidis. Homogenization of “viscous” Hamilton-Jacobi equations in stationary ergodic media. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(1-3) :335–375, 2005.
- [68] B. Lou, H. Matano, et K.-I. Nakamura. Recurrent traveling waves in a two-dimensional saw-toothed cylinder et their average speed. *J. Differential Equations*, 255(10) :3357–3411, 2013.
- [69] X. Liang, X. Lin, et H. Matano. Maximizing the spreading speed of KPP fronts in two-dimensional stratified media. *Proc. London Math. Soc.* 109(5) :1137–1174, 2014.
- [70] A. J. Majda, and P. E. Souganidis. Large-scale front dynamics for turbulent reaction-diffusion equations with separated velocity scales. *Nonlinearity*, 7(1) :1–30, 1994.
- [71] J. Mallet-Paret et G. Sell. Systems of differential delay equations : Floquet multipliers et discrete Lyapunov functions. *J. Diff. Eq.*, 125 :385–440, 1996.
- [72] J. Mallet-Paret et G. Sell. The Poincaré-Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay *J. Diff. Eq.*, 125 (1996), pp 441–489.
- [73] H. Matano. Traveling waves in spatially random media. *RIMS Kokyuroku*, 1337 :1–9, 2003.
- [74] H. Matano, et M. Nara. Large time behavior of disturbed planar fronts in the Allen-Cahn equation. *J. Differential Equations*, 251(12) : 3522–3557, 2011.
- [75] A. Mellet, J. Nolen, J.-M. Roquejoffre, L. Ryzhik, Stability of Generalized Transition Fronts. *Comm. Partial Diff. Eq.*, 34 :521–552, 2009.
- [76] A. Mellet, J.-M. Roquejoffre, et Y. Sire. Generalized fronts for one-dimensionnal reaction-diffusion equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 26(1) :303–312, 2009.
- [77] J. Nolen, J.-M. Roquejoffre, L., Ryzhik, A. Zlatos. Existence et Non-existence of Fisher-KPP Transition Fronts. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 203 :217–246, 2012.
- [78] J. Nolen, M. Rudd, et J. Xin. Existence of KPP fronts in spatially-temporally periodic advection et variational principle for propagation speeds. *Dynamics of PDE*, 2(1) :1–24, 2005.
- [79] Nolen J., Ryzhik L.. Traveling waves in a one-dimensional random medium. *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré, C. Analyse non lineaire*, 26 :1021–1047, 2009.

- [80] J. Nolen, et J. Xin. Asymptotic Spreading of KPP Reactive Fronts in Incompressible Space-Time random Flows. *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré – Analyse Non Lineaire*, 26(3) :815–839, 2008.
- [81] J. Nolen, and J. Xin. KPP Fronts in 1D Random Drift. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, 11(2), 2009
- [82] J. Nolen, and J. Xin. Variational Principle of KPP Front Speeds in Temporally Random Shear Flows with Applications. *Communications in Mathematical Physics*, 269 :493–532, 2007.
- [83] P. Polacik. Propagating terraces and the dynamics of front-like solutions of reaction-diffusion equations on \mathbb{R} *Mem. Amer. Math. Soc.*, à paraître.
- [84] A. B. Popatov, et M. Lewis, Climate et competition : the effect of moving range boundaries on habitat invasibility. *Bull. Math. Biol.*, 6(5) :975–1008, 2004.
- [85] E. A. Robinson. The dynamical properties of Penrose tilings. *Trans AMS*, 348 :4447–4464, 1996.
- [86] L. Roques et F. Hamel. Mathematical analysis of the optimal habitat configurations for species persistence. *Math. Biosciences*, 210 :34–59, 2007.
- [87] L. Rossi, et L. Ryzhik. Transition waves for a class of space-time dependent monostable equations. *Commun. Math. Sci.*, 12(5) :879–900, 2014.
- [88] L. Roques. Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale. Editions Quae, 2013.
- [89] L. Roques, A. Roques, H. Berestycki et A. Kretschmar. A population facing climate change : joint influences of Allee effects et environmental boundary geometry. *Population Ecology*, 50(2) :215–225, 2008.
- [90] H.R. Schwetlick. traveling fronts for multidimensional nonlinear transport equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 17 :523–550, 2000.
- [91] H.R. Schwetlick. Limit sets for multidimensional nonlinear transport equations. *J. Differential Equations*, 179 :356–368, 2002.
- [92] W. Shen. Traveling waves in diffusive random media. *J. Dynam. Differential Equations*, 16(4) :1011–1060, 2004.
- [93] W. Shen. Existence, uniqueness, et stability of generalized traveling waves in time dependent monostable equations. *J. Dynam. Differential Equations*, 23(1) :1–44, 2011.
- [94] W. Shen. Existence of Generalized Traveling Waves in Time Recurrent et Space Periodic Monostable Equations. *Journal of Applied Mathematics et Computation*, 1 :69–94, 2011.
- [95] N. Shigesada, K. Kawasaki, et E. Teramoto. Traveling periodic waves in heterogeneous environments. *Theoretical Population Biology*, 30(1) :143–160, 1986.
- [96] N. Shigesada et K. Kawasaki. Biological invasions : theory et practice. *Oxford Series in Ecology et Evolution*, Oxford : Oxford University Press, 1997.
- [97] J. G. Skellam. Random Dispersal in Theoretical Populations. *Biometrika*, 38(1-2) :196–218, 1951.
- [98] E. Sorets, et T. Spencer. Positive Lyapunov Exponents for Schrodinger Operators with Quasi-Periodic Potentials *Commun. Math. Phys.*, 142 :543–566, 1991.
- [99] M. Tang. A relaxation method for the pulsating front simulation of the periodic advection diffusion reaction equation. *Commun. Math. Sciences*, 11(3) :651–678, 2013.
- [100] A. M. Turing. The Chemical Basis of Morphogenesis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, 237(641) (1952), pp. 37-72.
- [101] H. Weinberger. On spreading speed et traveling waves for growth et migration models in a periodic habitat. *J. Math. Biol.*, 45 :511–548, 2002.

Bibliographie

- [102] G. Wulff. Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflagen. *Z. Kryst. Mineral*, 34 :449, 1901.
- [103] X. Xin. Existence et stability of traveling waves in periodic media governed by a bistable nonlinearity. *J. Dyn. et Diff. Eq.*, 3(4) :541–573, 1991.
- [104] Y.B. Zeldovich, G.I. Barenblatt, V.B. Libovich, G.M. Mackviladze. The mathematical theory of combustion and explosions. *Cons. Bureau*, New York, 1985.
- [105] A. Zlatoš. Generalized traveling waves in disordered media : existence, uniqueness, et stability. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 208(2) :447–480, 2013.
- [106] A. Zlatoš. Transition fronts in inhomogeneous Fisher-KPP reaction-diffusion equations. *J. Math. Pures Appl.*, 98 :89–102, 2012.

Résumé

Phénomènes de propagation pour différents modèles de réaction-diffusion

Les équations de réaction-diffusion engendrent des phénomènes de propagation, qu'on peut quantifier mathématiquement à travers deux notions : en localisant les lignes de niveau des solutions (vitesses d'expansion) ou à l'aide de solutions de type traveling waves. Le but de ce manuscrit est de discuter de ces deux notions pour différentes variantes de l'équation de Fisher-KPP.

Dans un premier chapitre, nous étudierons ces phénomènes pour des équations de Fisher-KPP hétérogènes dépendant de façon générale de t et de x . Des bornes sur les vitesses d'expansion dans chaque direction peuvent être obtenues à l'aide de valeurs propres généralisées, donnant des vitesses d'expansion exactes notamment pour des coefficients presque périodiques, uniquement ergodiques ou encore constant à l'infini dans des secteurs angulaires. Nous discuterons ensuite de la notion de front de transition généralisé pour cette équation, et montrerons leur existence quand les coefficients ne dépendent que de t ou bien sont presque périodiques en x .

Le second chapitre traite des équations de Fisher-KPP non-locales ou à retard. Ces équations n'admettant plus de principe de comparaison, le comportement asymptotique des traveling waves est encore mal compris. Une nouvelle méthode numérique appuie la conjecture de la convergence d'un état homogène vers l'autre pour des noyaux symétriques. Pour des noyaux asymétriques, la convergence des traveling waves dépend de la position de l'asymétrie par rapport à la direction de propagation.

Une équation de réaction-diffusion cinétique, avec un noyau mesurant la probabilité de changer de vitesse, sera étudiée dans le troisième chapitre. Si ce noyau est à support compact, on retrouve l'existence de traveling waves, dont on peut caractériser les vitesses. Dans le cas d'un noyau somme de deux Dirac, on retrouve une équation de Fisher-KPP avec un retard dans la loi de diffusion, dont on discutera une application en archéologie. Dans le cas d'un noyau Gaussien, les lignes de niveau se propagent en $t^{3/2}$, et on cherchera à déterminer ce taux de propagation de deux façons différentes.

Enfin, dans la quatrième partie, nous présenterons plusieurs résultats sur la dépendance entre les coefficients de l'équation et la vitesse de propagation dans le cas d'une équation périodique en espace. On peut en particulier montrer que le réarrangement de Schwarz du terme de croissance accélère la propagation en dimension 1, mais que la situation est beaucoup moins tranchée en dimension supérieure.

Mots-clés: équations de réaction-diffusion, traveling waves, vitesse d'expansion, équations de Hamilton-Jacobi, équations nonlocales et à retard, valeurs propres principales, réarrangement de Schwarz.

Abstract

Propagation phenomena in various reaction-diffusion models

Reaction-diffusion equations generate propagation phenomena, which can be quantified mathematically through two notions : by locating the level lines of the solutions (expansion speeds) or using traveling waves. The purpose of this manuscript is to discuss these two concepts for different variants of the Fisher-KPP equation.

In a first chapter, we will study these phenomena for heterogeneous Fisher-KPP equations depending in a general way on t and x . Bounds on the expansion speeds in each direction can be obtained with the aid of generalized eigenvalues, giving exact expansion speeds in particular for coefficients that are almost periodic, uniquely ergodic or constant at infinity in angular sectors. We will then discuss the notion of generalized transition waves for this equation and show their existence when the coefficients depend only on t or else are almost periodic in x .

The second chapter deals with non-local and delayed Fisher-KPP equations. Since these equations no longer admit a comparison principle, the asymptotic behavior of traveling waves is still poorly understood. A new numerical method supports the conjecture of the convergence of one homogeneous state towards the other for symmetric kernels. For asymmetric kernels, the convergence of the traveling waves depends on the position of the asymmetry with respect to the direction of propagation.

A kinetic reaction-diffusion equation, with a probability kernel measuring the velocity changes, will be studied in the third chapter. If this kernel is compactly supported, the existence of traveling waves can be proved and their velocities can be characterized. In the case where the kernel is a sum of two Dirac masses, we find a Fisher-KPP equation with a delay in the diffusion law, of which an application in archaeology will be discussed. In the case of a Gaussian kernel, the level lines propagate in $t^{3/2}$, and we will seek to determine this propagation rate in two different ways.

Finally, in the fourth part, we present several results on the dependence between the coefficients of the equation and the speed of propagation in the case of a periodic equation in space. In particular, one can show that the Schwarz rearrangement of the growth term accelerates the propagation in dimension 1, but that the situation is much less understood in higher dimensions.

Keywords: reaction-diffusion equations, traveling waves, expansion speeds, Hamilton-Jacobi equations, nonlocal and delayed equations, principal eigenvalues, Schwarz rearrangement.

