

GGTM

Hammamet, Décembre 2014

Marches aléatoires dans les cônes et théorèmes limite locaux : une approche "trajectorielle"

Marc Peigné, Université F. Rabelais Tours (France)

d'après les travaux de D. Denisov & V. Wachtel

1. INTRODUCTION

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d) de loi μ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans \mathbb{Z} . On suppose dans cette introduction que $\mathbb{E}[|Y_n|] < +\infty$ et on pose $m := \mathbb{E}[Y_n]$. La *marche aléatoire* (m.a.) de loi μ sur \mathbb{Z} est la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires définie par $S_0 = 0$ et $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$ pour $n \geq 1$.

D'après la loi forte des grands nombres, on a $\frac{S_n}{n} \rightarrow m$ \mathbb{P} -presque sûrement ; ceci entraîne $S_n \rightarrow +\infty$ \mathbb{P} -presque sûrement lorsque $m > 0$ et $S_n \rightarrow -\infty$ \mathbb{P} -presque sûrement lorsque $m < 0$. Ainsi, lorsque $m \neq 0$, pour tout réel $a > 0$, le nombre de visites $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[-a, a]}(S_n)$ dans l'intervalle $[-a, a]$ de la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est finie \mathbb{P} -presque sûrement. En fait, on a aussi dans ce cas

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[-a, a]}(S_n)\right] < +\infty,$$

ce qui est une propriété plus forte, qui découle ici d'un résultat général relatif aux chaînes de Markov sur un espace dénombrable.

Si $m = 0$ et si l'on suppose pour simplifier que $\mathbb{E}[Y_n^2] < +\infty$, on peut montrer à l'aide du théorème central limite et de la loi du 0 – 1 de Kolmogorov que

$$\liminf_{+\infty} S_n = -\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{+\infty} S_n = +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}^{(1)}$$

En particulier, lorsque la loi des Y_i est à support dans $[-a, a]$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{[-a, a]}(S_n) = +\infty$ \mathbb{P} -presque sûrement.

Dans ce cours, nous allons tout d'abord préciser et quantifier cette notion de "visite" des ensembles finis d'entiers. Cette question s'étend de façon très naturelle en dimension supérieure. Dans un second temps, nous nous intéresserons au temps de sortie d'un cône de l'espace euclidien par la m. a. $(S_n)_{n \geq 0}$.

1. Plus précisément, on a $\liminf_{+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ et $\limsup_{+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ \mathbb{P} -presque sûrement, et les grandes lignes de la démonstration sont les suivantes : d'après la loi forte des grands nombres, pour tout $c > 0$, on a $\lim_{+\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c}{\sigma}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$, d'où $\mathbb{P}\left[\limsup_n \left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\right]\right] > 0$. L'évènement $\limsup_{+\infty} \left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\right]$ étant mesurable par rapport à la tribu asymptotique associée à la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$, et celle-ci étant réduite à $\{\emptyset, \Omega\}$ aux ensembles négligeables près, il vient $\mathbb{P}\left[\limsup_n \left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\right]\right] = 1$ d'où $\mathbb{P}\left[\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\right] = 1$; le choix de c étant arbitraire on a $\mathbb{P}\left[\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty\right] = 1$. De la même façon, on montre que l'évènement $\left[\liminf_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty\right]$ est de mesure pleine.

2. MARCHES ALÉATOIRES SUR \mathbb{Z}^d

Dans la suite de ce chapitre, $(Y_n)_{n \geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ , à valeurs dans \mathbb{Z}^d ; on pose $S_0 = 0$ et $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$, $S_m^n := Y_{m+1} + \dots + Y_n$, pour tous entiers $n > m \geq 1$. Par convention, $S_m^n = 0$ lorsque $m \geq n$.

La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est un exemple fondamental de chaîne de Markov sur \mathbb{Z}^d ; sa matrice de transition $(P(x, x'))_{x, x' \in \mathbb{Z}^d}$ est définie par

$$\forall x, x' \in \mathbb{Z}^d \quad P(x, x') := \mu(x' - x).$$

On peut aussi définir P comme opérateur de l'espace des fonctions boréliennes bornées de \mathbb{Z}^d dans \mathbb{R} : pour tout fonction bornée $\Phi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$P\Phi(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \Phi(x + y)\mu(y).$$

Pour tout $n \geq 1$, la loi de la variable S_n est égale à la $n^{\text{ième}}$ puissance de convolution μ^{*n} de la mesure μ ; par convention, on pose $\mu^{*0} = \delta_0$.

On introduit les

Définition 2.1. Soit S_μ le support de la mesure μ , c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble de \mathbb{Z}^d de μ -mesure 1. On note T_μ le semi-groupe engendré par S_μ et G_μ le groupe engendré par S_μ . On dit que μ est **adaptée** sur \mathbb{Z}^d lorsque $G_\mu = \mathbb{Z}^d$.

Exemples

- (1) $\mu = q\delta_{-1} + p\delta_1$, on a $T_\mu = G_\mu = \mathbb{Z}$.
- (2) $\mu = q\delta_0 + p\delta_1$, on a $T_\mu = \mathbb{N}$ et $G_\mu = \mathbb{Z}$.

2.1. **Propriétés de récurrence.** Nous avons tout d'abord la

Définition 2.2. L'entier x est une **valeur possible** de $(S_n)_{n \geq 0}$ s'il existe $n \geq 1$ tel que $\mathbb{P}[S_n = x] > 0$. L'entier x est une **valeur de récurrence** de $(S_n)_{n \geq 0}$ si

$$\mathbb{P} \left[\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} [S_k = x] \right] = 1. \quad (2)$$

On note \mathcal{P} (respectivement \mathcal{R}) l'ensemble des valeurs possibles (resp. de récurrence) de la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$. On voit de façon immédiate que l'ensemble \mathcal{P} coïncide avec le semi-groupe fermé T_μ engendré par le support de μ . On a de plus le

Théorème 2.3. L'ensemble \mathcal{R} des valeurs de récurrence de $(S_n)_{n \geq 0}$ est soit vide soit un sous-groupe de \mathbb{Z}^d . Lorsqu'il est non vide, l'ensemble \mathcal{R} est aussi égal à l'ensemble \mathcal{P} des valeurs possibles de $(S_n)_{n \geq 0}$.

Attention ! Quand $\mathcal{R} = \emptyset$, ce n'est plus vrai; par exemple, si $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, on a $\mathcal{P} = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R} = \emptyset$. De plus, quand $\mathcal{R} \neq \emptyset$, l'ensemble $\mathcal{R} = \mathcal{P} = T_\mu$ est un groupe, d'où $\mathcal{R} = G_\mu$.

Démonstration. Supposons $\mathcal{R} \neq \emptyset$; nous avons le

Fait 2.4. Si $x \in \mathcal{R}$ et $y \in \mathcal{P}$ alors $x - y \in \mathcal{R}$.

Démonstration du Fait. Supposons $x - y \notin \mathcal{R}$, la m.a. visite le site $x - y$ un nombre fini de fois avec probabilité positive, i.e.

$$\mathbb{P} \left[\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} [S_n \neq x - y] \right] > 0$$

2. l'événement $\left[\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} [S_k = x] \right]$ correspond aux alsas $\omega \in \Omega$ tels que $S_n(\omega) = x$ pour une infinité d'entiers n , on le note aussi $[S_n = x \text{ i.s.}]$. On peut de façon équivalente dire que x est une valeur de récurrence de $(S_n)_{n \geq 0}$ lorsque $\mathbb{P}[S_n = x \text{ i.s.}] > 0$; l'événement $[S_n = x \text{ i.s.}]$ étant un événement de la tribu asymptotique associée à la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$, la loi du 0-1 de Kolmogorov entraîne qu'il est alors de mesure pleine.

si bien qu'il existe $m \geq 1$ tel que $\mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq m} [S_n \neq x - y]\right] > 0$. Puisque $y \in \mathcal{P}$, il existe $k \geq 1$ tel que $\mathbb{P}[S_k = y] > 0$. Pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq m} [S_n \neq x - y]\right] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq m} [S_k^{k+n} \neq x - y]\right]$ car les suites $(Y_i)_{i \geq 1}$ et $(Y_i)_{i \geq k+1}$ ont la même loi. Les variables S_k et S_k^{k+n} , $n \geq 1$, étant indépendantes, il vient

$$\mathbb{P}\left[[S_k = y] \cap \left[\bigcap_{n \geq m} [S_k^{k+n} \neq x - y]\right]\right] = \mathbb{P}[S_k = y] \times \mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq m} [S_k^{k+n} \neq x - y]\right] > 0$$

et on en déduit que $x \notin \mathcal{R}$ en notant que

$$[S_k = y] \cap \bigcap_{n \geq m} [S_k^{k+n} \neq x - y] \subset \bigcap_{n \geq m} [S_{k+n} \neq x] = \bigcap_{n \geq m+k} [S_n \neq x].$$

Contradiction. □

Démontrons à présent le Théorème 2.3. D'après le fait on a

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{R} &\Rightarrow 0 = x - x \in \mathcal{R} \\ x \in \mathcal{R} &\Rightarrow -x = 0 - x \in \mathcal{R} \\ x, y \in \mathcal{R} &\Rightarrow x + y = y - (-x) \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

si bien que \mathcal{R} est un groupe.

On a $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$. Pour établir l'inclusion inverse, quand $\mathcal{R} \neq \emptyset$, on note tout d'abord que dans ce cas on a $0 \in \mathcal{R}$; en effet, \mathcal{R} contient au moins un point y_0 , d'où $0 = y_0 - y_0 \in \mathcal{R}$. On choisit ensuite $y \in \mathcal{P}$; d'après le Fait ci-dessus, on a $-y = 0 - y \in \mathcal{R}$ et donc $y \in \mathcal{R}$. □

Rappelons qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite **irréductible** sur \mathbb{Z}^d si pour tous points $x, y \in \mathbb{Z}^d$, la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ issue de x (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$) visite y avec probabilité > 0 . De la discussion qui précède, on déduit la

Proposition 2.5. *La marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 0}$ est irréductible sur \mathbb{Z}^d si et seulement si $T_\mu = G_\mu = \mathbb{Z}^d$.*

Définition 2.6. *Si $\mathcal{R} = \emptyset$, on dit que la m.a. est **transiente**; lorsque $\mathcal{R} \neq \emptyset$, on dit que la m.a. est **récurrente**.*

Insistons sur le fait que lorsque la m.a. est récurrente, elle visite infiniment souvent **tous** les points de G_μ .

Introduisons à présent la suite de temps d'arrêt $(t_n)_{n \geq 0}$ définie par $t_0 = 0$ et $t_n := \inf\{k > t_{n-1} : S_k = 0\}$; cette suite est égale à la suite des instants successifs auxquels la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ visite 0. Nous avons le

Théorème 2.7. *Pour toute marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{Z}^d , les assertions suivantes sont équivalentes*

$$(1) \mathbb{P}[t_1 < +\infty] = 1 \quad (2) \mathbb{P}[S_n = 0 \text{ i.s.}] = 1 \quad (3) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[S_n = 0] = +\infty.$$

Démonstration. Si $\mathbb{P}[t_1 < +\infty] = 1$, alors, pour tout $n \geq 1$ on a aussi $\mathbb{P}[t_n < +\infty] = 1$: en effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[t_n < +\infty] &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}[t_{n-1} = k, \exists l \geq 1 \text{ t.q. } S_{k+l} = 0] \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}[t_{n-1} = k, \exists l \geq 1 \text{ t.q. } S_{k+l} - S_k = 0] \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}[t_{n-1} = k] \mathbb{P}[\exists l \geq 1 \text{ t.q. } S_l = 0] \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}[t_{n-1} = k] \mathbb{P}[t_1 < +\infty] \\
&= \mathbb{P}[t_{n-1} < +\infty] \times \mathbb{P}[t_1 < +\infty].
\end{aligned}$$

Il vient $\mathbb{P}[t_n < +\infty] = \mathbb{P}[t_1 < +\infty]^n$. Notons alors N le nombre de visite en 0 de la m.a.

$(S_n)_{n \geq 0}$; on a $N := \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[S_n=0]} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[t_n < +\infty]}$ si bien que

$$\mathbb{E}_0[N] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[t_n < +\infty] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[t_1 < +\infty]^n = \frac{1}{1 - \mathbb{P}[t_1 < +\infty]}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] = +\infty &\Leftrightarrow \mathbb{P}[t_1 < +\infty] = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall n \geq 0 \quad \mathbb{P}[t_n < +\infty] = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq 0} [t_n < +\infty]\right] = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}[N = +\infty] = 1.
\end{aligned}$$

□

Ce résultat (et sa démonstration) est en fait valide pour une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable.

3. CRITÈRE DE RÉCURRENCE ET EXEMPLES

Pour toute fonction borélienne positive Φ définie sur \mathbb{Z}^d et tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[\Phi(x + S_n)] = \sum_{n \geq 0} \delta_x * \mu^{*n}(\Phi) =: G\Phi(x),$$

où $G(x, \cdot) := \delta_x * \sum_{n \geq 0} \mu^{*n}$ est le noyau de Green associé à la mesure μ . Au cours de la démonstration précédente nous avons montré l'égalité suivante

$$G(0, 0) := G1_{\{0\}}(0) = \mathbb{E}[N] = \frac{1}{1 - \mathbb{P}[t_1 < +\infty]}.$$

3.1. Un critère de récurrence. Nous énonçons ici un critère général permettant de décider si une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d est récurrente ou transiente ; nous avons le

Théorème 3.1. (*Kesten, Spitzer (1957)*) Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une m.a. adaptée sur \mathbb{Z}^d de loi μ ; on note $\hat{\mu}$ sa transformée de Fourier. La m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est récurrente si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\int_{B(0, \epsilon)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \hat{\mu}(t)} \right) dt = +\infty.$$

La démonstration de ce théorème est difficile, nous renvoyons le lecteur au livre [6] pour un argument complet. Nous nous contenterons de démontrer la version plus faible suivante, qui sera suffisante dans ce qui suit :

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.1, la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est récurrente si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\lim_{\substack{r \nearrow 1 \\ r < 1}} \int_{B(0, \epsilon)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt = +\infty.$$

Remarquons que si un des critères ci-dessus est satisfait pour $\epsilon_0 > 0$ donné, il l'est a fortiori pour tout $\epsilon < \epsilon_0$. Cette version “faible” du Théorème de Kesten-Spitzer admet de façon immédiate le

Corollaire 3.3. *Si la fonction $t \mapsto \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \hat{\mu}(t)} \right)$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 alors la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est récurrente.*

Démonstration du Corollaire 3.3. On a $\lim_{r \nearrow 1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \hat{\mu}(t)} \right)$; d'après le lemme de Fatou, il vient

$$\forall \epsilon > 0 \quad \liminf_{r \nearrow 1} \int_{B(0, \epsilon)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt \geq \int_{[-\epsilon, \epsilon]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \hat{\mu}(t)} \right) dt,$$

d'où le résultat en appliquant le Théorème 3.2. □

L'implication dans l'autre sens, qui donne lieu à l'énoncé du Théorème 3.1 est beaucoup plus délicate à établir. Pour démontrer le Théorème 3.2, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.4. (1) *Si la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est adaptée sur \mathbb{Z}^d on a*

$$\hat{\mu}(t) = 1 \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}^d.$$

(2) *Pour tout $r \in [0, 1[$, la fonction $t \mapsto \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right)$ est positive sur \mathbb{R}^d .*

(3) *Pour tout $\epsilon \in]-\pi, \pi[$, on a*

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_{[-\pi, \pi]^d \setminus [-\epsilon, \epsilon]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) < +\infty.$$

Démonstration du lemme 3.4.

(1) Si μ est adaptée sur \mathbb{Z}^d et $t \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ alors $\hat{\mu}(t) = 1$. Réciproquement, si $\langle t, Y_1 \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}$ \mathbb{P} -presque sûrement, alors pour tout $x \in G_\mu = \mathbb{Z}^d$ on aura $\langle t, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}$ i.e. $\langle \frac{t}{2\pi}, x \rangle \in \mathbb{Z}$. Si l'une des coordonnées de $\frac{t}{2\pi}$ n'est pas entière, cette propriété n'est plus satisfaite pour un choix judicieux de x . Contradiction.

(2) $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) = \frac{\operatorname{Re} (1 - r\hat{\mu}(-t))}{|1 - r\hat{\mu}(t)|^2} = \frac{1 - r\mathbb{E}[\cos \langle t, Y_1 \rangle]}{|1 - r\hat{\mu}(t)|^2} \geq 0.$

(3) On a $||1 - r\hat{\mu}(t)| - |1 - \hat{\mu}(t)|| \leq 1 - r$ si bien que $|1 - r\hat{\mu}(t)|$ converge uniformément vers $|1 - \hat{\mu}(t)|$ lorsque $r \nearrow 1$; comme $t \mapsto |1 - \hat{\mu}(t)|$ est continue et ne s'annule pas sur $[-\pi, \pi]^d \setminus [-\epsilon, \epsilon]^d$, il existe $c_\epsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\pi, \pi]^d \setminus [-\epsilon, \epsilon]^d \quad \liminf_{r \nearrow 1} |1 - r\hat{\mu}(t)| \geq c_\epsilon$$

d'où

$$\limsup_{r \nearrow 1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) \leq \limsup_{r \nearrow 1} \frac{1 - r\mathbb{E}[\cos \langle t, Y_1 \rangle]}{|1 - r\hat{\mu}(t)|^2} \leq \frac{2}{c_\epsilon} < +\infty.$$

□

Démonstration du Théorème 3.2. Pour tout $r \in [0, 1[$ et tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$G_r(x, y) := \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_x[1_{\{y\}}(S_n)].$$

L'égalité $1_{\{x\}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle y-x, t \rangle} dt$ entraîne

$$\begin{aligned} G_r(0, 0) &= \sum_{n \geq 0} r^n \mathbb{E}_0[1_{\{0\}}(S_n)] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n \geq 0} r^n \mathbb{E}[e^{i\langle S_n, t \rangle}] dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n \geq 0} r^n \hat{\mu}(t)^n dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{dt}{1 - r\hat{\mu}(t)}. \end{aligned}$$

Puisque $G_r(0, 0)$ est réel, on a en fait

$$G_r(0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt.$$

D'après le lemme 3.4, on a $\sup_{r \in]0, 1[} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d \setminus [-\epsilon, \epsilon]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt < +\infty$. Ainsi, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sup_{r \in]0, 1[} \int_{[-\epsilon, \epsilon]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt < +\infty$, on a $G(0, 0) < +\infty$ et la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est transiente. À contrario, dès que $\sup_{r \in]0, 1[} \int_{[-\epsilon, \epsilon]^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt = +\infty$, on a $G(0, 0) = +\infty$ et la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est récurrente. \square

3.2. Exemples.

- (1) **Toute marche aléatoire sur \mathbb{Z} admettant des moments d'ordre 1 et centrée est récurrente.**

L'argument se simplifie singulièrement s'il existe des moments d'ordre 2. En effet, dans ce cas on a $\hat{\mu}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}(1 + \epsilon(t))$, d'où, pour t assez petit

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \hat{\mu}(t)} \right) = \frac{1}{\sigma^2 t^2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 + \epsilon(t)} \right) \geq \frac{1}{\sigma^2 t^2}.$$

Cette dernière fonction n'est pas intégrable au voisinage de 0, la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est donc récurrente.

La démonstration est plus délicate quand on suppose seulement l'existence de moments d'ordre 1, nous la détaillons à présent. Nous avons

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}} \right) \geq \frac{1 - r}{(\operatorname{Re}(1 - r\hat{\mu})^2 + t^2(\operatorname{Im} \hat{\mu})^2)}$$

avec $(\operatorname{Re}(1 - r\hat{\mu}))^2 = \left((1 - r) + \operatorname{Re} r(1 - \hat{\mu}) \right)^2 \leq 2(1 - r)^2 + 2r^2(\operatorname{Re}(1 - \hat{\mu}))^2$. Sous les hypothèses $\mathbb{E}[|Y_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_1] = 0$, la fonction $\hat{\mu}$ vérifie $\hat{\mu}(t) = 1 + t\epsilon(t)$, si bien que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|t| < \eta$, on ait

$$|\operatorname{Im} \hat{\mu}| \leq \epsilon|t| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Re}(1 - \hat{\mu})| \leq \epsilon|t|.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_{-\eta}^{\eta} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt &\geq (1 - r) \int_{-\eta}^{\eta} \frac{dt}{2(1 - r)^2 + 3r^2\epsilon^2 t^2} \\ &\geq \frac{1}{3(1 - r)} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{dt}{1 + \left(\frac{r}{1-r}\epsilon t\right)^2} \\ &\geq \frac{1}{3r} \int_{-\frac{r}{1-r}\eta}^{\frac{r}{1-r}\eta} \frac{du}{1 + \epsilon^2 u^2} \quad \text{en posant} \quad u = \frac{r}{1-r}t, \end{aligned}$$

d'où $\sup_{r < 1} \int_{-\eta}^{\eta} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt \geq \frac{\pi}{3\epsilon}$. Le paramètre ϵ étant arbitraire, on a finalement $\sup_{r < 1} \int_{-\eta}^{\eta} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt = +\infty$, ce qui prouve que la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est récurrente.

Citons aussi le théorème de Chung-Fuchs qui stipule que si la suite $(S_n/n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 en probabilité, alors la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est récurrente.

(2) **Toute marche aléatoire sur \mathbb{Z}^2 de carré intégrable et centrée est récurrente.**

En effet, on a dans ce cas $\hat{\mu}(t) = 1 - \frac{Q(t)}{2}(1 + \epsilon(t))$ où $Q(t) = \mathbb{E}(\langle Y_1, t \rangle^2)$ est une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{R}^2 . On a, pour $\epsilon > 0$ assez petit

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\epsilon)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \hat{\mu}(t)} \right) dt &= \int_{B(0,\epsilon)} \frac{2}{Q(t)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 + \epsilon(t)} \right) dt \\ &\geq \int_{B(0,\epsilon)} \frac{dt}{Q(t)} \\ &= \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{r^2 Q(u_\theta)} \text{ avec } u_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(3) **Toute marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$, de carré intégrable est transiente**

Il suffit de se concentrer sur le cas où la marche est centrée ; pour $0 \leq r < 1$ et $|t|$ assez petit (afin d'avoir $\operatorname{Re}(1 + \epsilon(t)) \geq 1/2$), on a

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) \leq \frac{1}{1 - r + r \frac{Q(t)}{2} \operatorname{Re}(1 + \epsilon(t))} \leq \frac{4}{rQ(t)}.$$

(on utilise le fait que, pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \leq 1$, on a $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - z} \right) = \frac{1 - a}{(1 - a)^2 + b^2} \leq \frac{1}{1 - a}$). Le changement de variable en coordonnées polaires $t \mapsto (t/\|t\|, \|t\|)$ donne alors

$$\begin{aligned} \int_{\|t\| \leq \epsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)} \right) dt &\leq \frac{4}{r} \int_{\|t\| < \epsilon} \frac{dt}{Q(t)} \\ &\leq \frac{4}{r} \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{\rho^{d-1} d\rho}{\rho^2} \frac{du}{Q(u)} \\ &= \frac{4}{r} \left(\int_0^\epsilon \rho^{d-3} d\rho \right) \times \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{du}{Q(u)} \right) < +\infty. \end{aligned}$$

3.3. Théorème limite local sur \mathbb{Z}^d . Nous précisons ici le comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$ de la probabilité $\mathbb{P}[S_n = x]$ pour tout point $x \in \mathbb{Z}^d$. Dans le cas de la marche au plus proche voisin sur \mathbb{Z} , c'est-à-dire $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$, apparaît un phénomène de périodicité : la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ ne peut revenir en 0 qu'à un instant pair (de façon plus générale, elle ne visite des sites pairs qu'à des instants pairs et des sites impairs qu'à des instants impairs). Notons que dans cet exemple, le support S_μ de μ est $\{-1, 1\}$ et est inclus dans $1 + 2\mathbb{Z}$; on peut aussi remarquer que dans ce cas on a $S_\mu - S_\mu := \{x - y/x, y \in S_\mu\} = \{-2, 0, 2\}$ et le groupe engendré par $S_\mu - S_\mu$ est égal à $2\mathbb{Z}$.

Nous introduisons ainsi la

Définition 3.5. Soit μ une mesure adaptée sur \mathbb{Z}^d . On dit que μ est **apériodique** si et seulement si il n'existe pas d'élément $a \in \mathbb{Z}^d$ et de sous-groupe propre $H \subset \mathbb{Z}^d$ tels que $S_\mu \subset a + H$. De façon équivalente, la mesure μ est apériodique sur \mathbb{Z}^d lorsque le sous-groupe $\langle S_\mu - S_\mu \rangle$ de \mathbb{Z}^d engendré par $S_\mu - S_\mu$ est égal à \mathbb{Z}^d ⁽³⁾.

3. en effet, si $S_\mu \subset a + H$, on a $S_\mu - S_\mu \subset H$ et donc aussi $\langle S_\mu - S_\mu \rangle \subset H$; réciproquement si $S_\mu - S_\mu \subset H$ alors $S_\mu \subset a + H$ pour tout point a de S_μ .

Dans le livre de F. Spitzer [8], on trouvera une démonstration détaillée du fait que la mesure adaptée μ est apériodique sur \mathbb{Z}^d si et seulement si la chaîne de Markov $(S_n)_{n \geq 0}$ est apériodique, c'est-à-dire ne possède pas de classes cycliques.

Exemples

- (1) Les mesures $\mu_1 := p\delta_1 + q\delta_{-1}$ (avec $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$) et $\mu_2 := p\delta_1 + q\delta_{-1} + r\delta_0$ (avec $0 < p, q, r < 1$ et $p + q + r = 1$) sont adaptées sur \mathbb{Z} ; la mesure μ_1 n'est pas apériodique, mais μ_2 l'est.
- (2) Notons $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Les mesures $\mu_3 := \frac{1}{4}(\delta_{\vec{i}} + \delta_{-\vec{i}} + \delta_{\vec{j}} + \delta_{-\vec{j}})$, $\mu_4 := \frac{1}{5}(\delta_{\vec{i}} + \delta_{-\vec{i}} + \delta_{\vec{j}} + \delta_{-\vec{j}} + \delta_0)$ et $\mu_5 := \frac{1}{2}(\delta_{\vec{i}} + \delta_{\vec{j}})$ sont toutes les trois adaptées sur \mathbb{Z}^2 mais seule μ_4 est apériodique; en effet
 - (a) $S_{\mu_3} \subset \vec{i} + H$ où $H = \langle S_{\mu_3} - S_{\mu_3} \rangle = \{x\vec{i} + y\vec{j} / x, y \in \mathbb{Z} \text{ et } x + y \in 2\mathbb{Z}\}$.
 - (b) $S_{\mu_5} \subset \vec{i} + \mathbb{Z}(\vec{i} - \vec{j})$ ce qui signifie qu'en quelque sorte μ_5 est en fait 1 dimensionnelle!

Nous avons la

Propriétés 3.6. *Supposons que la mesure μ est adaptée sur \mathbb{Z}^d ; elle est apériodique si et seulement si $(|\hat{\mu}(t)| = 1 \Leftrightarrow t \in 2\pi\mathbb{Z}^d)$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(t)| = 1 &\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \forall x \in S_\mu \quad \langle t, x \rangle \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in S_\mu - S_\mu \quad \langle t, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \langle S_\mu - S_\mu \rangle \quad \langle t, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Si μ est apériodique, $\langle S_\mu - S_\mu \rangle = \mathbb{Z}^d$ et la dernière assertion ci-dessus équivaut au fait que $t \in 2\pi\mathbb{Z}^d$. Réciproquement, si $S_\mu - S_\mu$ engendre un sous-groupe propre de \mathbb{Z}^d , il existe $t \notin 2\pi\mathbb{Z}^d$ tel que $\langle t, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout élément x de ce sous-groupe. \square

La démonstration rigoureuse du théorème limite local que nous énonçons à présent nécessite un contrôle précis de la fonction caractéristique $\hat{\mu}$ de μ . Nous avons le

Théorème 3.7. *Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d de loi μ admettant des moments d'ordre 2. On suppose que μ est centrée, adaptée et apériodique sur \mathbb{Z}^d . Alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi n)^{d/2} \mathbb{P}[S_n = x] = \frac{1}{\sqrt{\det Q}}$$

où $\det Q$ est le déterminant de la forme quadratique Q définie sur \mathbb{R}^d par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \quad Q(\lambda) = \mathbb{E}[\langle Y_1, \lambda \rangle^2].$$

Les marches aléatoires ayant des moments d'ordre 2 et centrées sont donc récurrentes en dimension 1 ou 2 et transientes en dimension ≥ 3 ; on retrouve les énoncés proposés plus tôt, mais via un contrôle précis de chacun des termes de la série $G(0, x) := G1_{\{x\}}(0)$, $x \in \mathbb{Z}^d$.

Nous trouvons dans [1] l'heuristique suivante qui explique le pourquoi de ce comportement asymptotique : d'après le TCL, on a, pour tout ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^d$ de frontière négligeable

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n / \sigma\sqrt{n} \in K) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_K e^{-t^2/2} dt.$$

Il est alors assez naturel de développer l'estimation suivante, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\mathbb{P}(S_n \in B(0, 1)) \sim \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in B\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{B(0, \frac{1}{\sqrt{n}})} e^{-t^2/2} dt \sim \frac{C}{n^{d/2}}.$$

Mais l'argument est grossièrement faux! Cependant, l'utilisation plus fine du théorème central limite nous permettra un peu plus loin "d'appliquer" cette heuristique pour des estimations de la marche $(x + S_n)_{n \geq 0}$ conditionnée à rester dans un cône!

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n = x] &= \mathbb{E}[1_0(S_n - x)] = \mathbb{E}\left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle t, S_n - x \rangle} dt\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{-i\langle t, x \rangle} \hat{\mu}(t)^n dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d n^{d/2}} \int_{[-\pi\sqrt{n}, \pi\sqrt{n}]^d} e^{-\frac{i}{\sqrt{n}}\langle u, x \rangle} \hat{\mu}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n du \end{aligned}$$

avec $\hat{\mu}(t) = 1 - \frac{1}{2}Q(t)(1 + o(t))$ si bien que

$$\hat{\mu}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}Q(u)(1 + o(n))\right)\right)\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{Q(u)}{2}\right).$$

On doit utiliser le théorème de convergence dominée pour pouvoir passer à la limite sous le signe \int ; ceci n'est possible qu'avec un minimum de précautions, nous en donnons les détails à présent. Pour tout $\delta \in]0, \pi[$, on pose

$$(2\pi n)^{d/2} \mathbb{P}[S_n = x] = I_n(\delta) + J_n(\delta)$$

avec

$$I_n(\delta) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{[-\delta\sqrt{n}, \delta\sqrt{n}]^d} e^{-\frac{i}{\sqrt{n}}\langle u, x \rangle} \hat{\mu}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n du$$

et

$$J_n(\delta) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{[-\pi\sqrt{n}, \pi\sqrt{n}]^d \setminus [-\delta\sqrt{n}, \delta\sqrt{n}]^d} e^{-\frac{i}{\sqrt{n}}\langle u, x \rangle} \hat{\mu}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n du.$$

On choisit $\delta > 0$ assez petit pour que $|o(t)| \leq 1/2$ lorsque $t \in [-\delta, \delta]^d$, si bien que

$$\forall u \in [-\delta\sqrt{n}, \delta\sqrt{n}]^d \quad \left|\hat{\mu}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right|^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}Q(u)(1 + o\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right))\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{Q(u)}{4}\right).$$

On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée et "passer à la limite" sous le signe \int dans $I_n(\delta)$; on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\delta) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{Q(u)}{4}\right) du = \sqrt{\det Q}.$$

Par ailleurs, il existe $\rho_\delta \in]0, 1[$ tel que $|\hat{\mu}(t)| \leq \rho_\delta < 1$ lorsque $t \in [-\pi, \pi]^d \setminus [-\delta, \delta]^d$ si bien que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |J_n(\delta)| \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{[-\pi, \pi]^d \setminus [-\delta, \delta]^d} |\hat{\mu}(t)|^n dt \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n}^d \rho_\delta^n = 0.$$

□

Le cas où la m.a. $(S_n)_{n \geq 0}$ est décentrée se déduit du cas centré via un argument classique de "relativisation", que l'on peut développer sous une hypothèse forte de moments :

Corollaire 3.8. *Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d de loi μ admettant des moments d'ordre exponentiels de tout ordre. On suppose que μ est décentrée, adaptée et apériodique sur \mathbb{Z}^d et que son support n'est porté par aucun demi-espace de \mathbb{R}^d . Il existe alors une constante $\rho = \rho(\mu) \in]0, 1[$ et, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, une constante $c_x > 0$ telles que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^{d/2} \rho^n \mathbb{P}[S_n = x] = c_x.$$

Démonstration. Sous les hypothèses de ce corollaire la fonction de Laplace

$$L : \lambda \mapsto L(\lambda) := \mathbb{E}(e^{\langle \lambda, Y_i \rangle})$$

est définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Comme S_μ n'est inclu dans aucun demi-espace de \mathbb{R}^d , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on a $P(\langle \lambda, Y_i \rangle > 0) > 0$ et $\mathbb{P}(\langle \lambda, Y_i \rangle < 0) > 0$. Plus précisément on a la

Proposition 3.9. *On suppose que μ admet des moments exponentiels de tout ordre et que son support n'est pas réduit à un point. La fonction L est alors analytique sur \mathbb{R}^d et strictement convexe. Si de plus son support n'est porté par aucun demi-espace de \mathbb{R}^d , on a*

$$\lim_{\|\lambda\| \rightarrow +\infty} L(\lambda) = +\infty.$$

En particulier, L admet dans ce cas un unique minimum en un point $\lambda_0 \in \mathbb{R}^d$ et l'on a $L(\lambda_0) \leq 1$ avec égalité si et seulement si μ est centrée.

Démonstration de la Proposition. La fonction L est analytique puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, on a

$$L(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\langle \lambda, X \rangle^n}{n!}$$

$$\text{avec } \sum_{n \geq 0} \frac{|\langle \lambda, X \rangle|^n}{n!} < +\infty.$$

Nous détaillons la suite de la démonstration un dimension 1 dans un premier temps.

En dimension 1. On a $L''(\lambda) = \mathbb{E}(X^2 e^{\lambda X}) > 0$ ce qui montre que L est strictement convexe. De plus $\mathbb{P}(X \geq 1] > 0$ si bien que $L(\lambda) \geq e^\lambda \mathbb{P}(X \geq 1) \rightarrow +\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$; de même, $\mathbb{P}(X \leq -1] > 0$ si bien que $L(\lambda) \geq e^{-\lambda} \mathbb{P}(X \leq -1) \rightarrow +\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow -\infty$. La fonction L admet donc un unique minimum λ_0 et l'on a $L(\lambda_0) \leq L(0) = 1$, avec égalité si et seulement si $\lambda_0 = 0$, auquel cas μ est centrée.

En dimension supérieure. Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ on a

$$D_\lambda^{(2)} L(h) = \mathbb{E}(\langle h, X \rangle^2 e^{\langle \lambda, X \rangle}) \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $h = 0$. La fonction L est donc strictement convexe.

Fixons $\lambda \neq 0$; comme $\mathbb{P}(\langle \lambda, X \rangle > 0) > 0$, il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(\langle \lambda, X \rangle \geq a) > 0$ et l'on a donc $L(t\lambda) \geq e^{at} \mathbb{P}(\langle \lambda, X \rangle \geq a) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Par stricte convexité, la fonction L admet donc un unique minimum en $\lambda_0 \in \mathbb{R}^d$, qui est aussi l'unique point où son gradient est nul, ce qui s'écrit $\mathbb{E}(\langle \lambda_0, X \rangle e^{\langle \lambda_0, X \rangle}) = 0$. On conclut que $\lambda_0 = 0$ si et seulement si X est centrée. □

On note alors μ_0 la mesure de probabilité sur \mathbb{Z}^d définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d \quad \mu_0(x) = \frac{1}{L(\lambda_0)} e^{\langle \lambda_0, x \rangle} \mu(x).$$

Pour tout $n \geq 0$, on a $\mu_0^{*n}(x) = \frac{1}{L(\lambda_0)^n} e^{\langle \lambda_0, x \rangle} \mu^{*n}(x)$ ⁽⁴⁾ et cette mesure est centrée.

D'après le Théorème 3.7, il vient, en posant $\rho = L(\lambda_0)$ et $c_x = \frac{e^{-\langle \lambda_0, x \rangle}}{\sqrt{\det Q}}$,

$$\mu^{*n}(x) = \rho^n \mu_0^{*n}(1_x e^{-\langle \lambda_0, x \rangle}) \sim c_x \frac{\rho^n}{(2\pi n)^{d/2}} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

□

Le fait que le support de μ n'est inclus dans aucun demi-espace de \mathbb{R}^d peut sembler une hypothèse artificielle mais il est essentiel dans le raisonnement précédent. Lorsqu'elle n'est pas satisfaite, la conclusion du théorème n'est plus vraie. Ainsi, si l'on considère la marche sur \mathbb{Z} de loi $\mu = q\delta_0 + p\delta_1$ avec $0 < p, q < 1$ et $p + q = 1$, on aura

$$\forall k \geq 0 \quad \mu^{*n}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k n^k q^n \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

4. en effet $\mu_0^{*n}(x) = \sum_{\substack{y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}^d \\ y_1 + \dots + y_n = x}} \mu_0(y_1) \cdots \mu_0(y_n) = \frac{1}{L(\lambda_0)^n} \sum_{\substack{y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}^d \\ y_1 + \dots + y_n = x}} \mu(y_1) \cdots \mu(y_n) e^{\langle \lambda_0, x \rangle}$ avec $\sum_{\substack{y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}^d \\ y_1 + \dots + y_n = x}} \mu(y_1) \cdots \mu(y_n) = \mu^{*n}(x)$, d'où le résultat.

4. MARCHES ALÉATOIRES DANS UN CÔNE

Nous fixons à présent un cône ouvert $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ de sommet 0. Le cône \mathcal{C} est la réunion des demi-droites issues de 0 et traversant l'ouvert $\Sigma := \mathcal{C} \cap \mathbb{S}^{d-1}$. Nous supposons pour simplifier que le bord $\partial\Sigma$ est analytique lorsque $d \geq 2$.

4.1. Présentation du problème et généralités. Nous nous intéressons tout d'abord au temps de sortie du cône \mathcal{C} , défini par : pour tout $x \in \mathcal{C}$

$$(1) \quad \tau_x := \inf\{n \geq 1 : x + S_n \notin \mathcal{C}\}.$$

Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la suite $(\mathbb{P}(\tau_x > n))_{n \geq 1}$. Il est donc naturel d'imposer que la probabilité partant d'un point de \mathcal{C} de rester dans le cône est positive; en d'autres termes on supposera que μ est adaptée au cône \mathcal{C} c'est-à-dire qu'il existe $y_0 \in \mathcal{C}$ tel que $\mu\{y_0\} > 0$.

En utilisant, non le TCL mais le principe d'invariance de Donsker, R. Garbit a montré dans [4] que pour tout $x \in \mathcal{C}$, tout $y \in \mathcal{C}$ de norme suffisamment grande et toute suite $(\theta_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau_x > n)^{\frac{\theta_n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau_x > n, S_n = y)^{\frac{\theta_n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

En prenant $\theta_n = 1/\sqrt{n}$, on voit que les quantités $\mathbb{P}(\tau_x > n)$ et $\mathbb{P}(\tau_x > n, S_n \in K)$ ne convergent pas exponentiellement vite vers 0.

Expliquons en quelques mots l'argument de R. Garbit; rappelons tout d'abord l'énoncé du principe de Donsker. Pour tout $n \geq 1$, on note $W_n = (W_n(s))_{0 \leq s \leq 1}$ la variable aléatoire à valeurs dans l'espace des fonctions continues égale à $\frac{S_k}{\sqrt{n}}$ en $s = \frac{k}{n}$ et obtenue par interpolation affine entre deux instants consécutifs $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, $0 \leq k \leq n-1$; le principe d'invariance de Donsker précise que la suite de fonctions aléatoires $(W_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers le mouvement brownien $(B_s)_{0 \leq s \leq 1}$.

Soit $\omega \in [\tau_x > n]$; les points $x + S_1(\omega), \dots, x + S_n(\omega)$ sont donc tous dans \mathcal{C} . Le problème est qu'en appliquant le principe d'invariance de Donsker, on réalise une homothétie de rapport $1/\sqrt{n}$, la trajectoire brownienne approximante s'accumule donc vers l'origine de \mathbb{Z}^d et vit dans un ensemble de mesure proche de 0. Pour remédier à cette obstruction, on ne considère que les trajectoires de longueur n dont les $[\sqrt{n}]$ premiers pas sont y_0 ; la trajectoire $(W_n(s))_{\frac{\sqrt{n}}{n} \leq s \leq 1}$ correspond alors à une trajectoire partant de y_0 et est approximée par une trajectoire brownienne issue de y_0 . La probabilité de choisir une trajectoire brownienne issue de y_0 et qui reste pendant une unité de temps dans le cône est $\geq 2\epsilon_0 > 0$, si bien que, pour n assez grand, on peut minorer $\mathbb{P}(\tau_x > n)$ par $\epsilon_0 \mu\{y_0\}^{[\sqrt{n}]}$. On obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau_x > n)^{\frac{\theta_n}{\sqrt{n}}} = 1. \quad (5)$$

En dimension $d = 1$, on sait que ces quantités tendent vers 0 en $1/\sqrt{n}$ et $1/n^{3/2}$ respectivement et l'on s'attend aussi à une vitesse polynomiale en dimension supérieure (voir par ex. [9]). D. Denisov et V. Wachtel ont établi le théorème suivant [2] (en dimension $d \geq 2$ mais valable aussi en dimension 1) :

Théorème 4.1. *On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que la loi μ admette des moments d'ordre $2 + \delta$, qu'elle est centrée, apériodique sur \mathbb{Z}^d et adaptée au cône \mathcal{C} . Il existe alors une constante $p > 0$ dépendant seulement du cône \mathcal{C} et une fonction $V(x)$ strictement positive sur \mathcal{C} telles que, pour tout $x \in \mathcal{C}$*

$$\mathbb{P}(\tau_x > n) \sim \frac{V(x)}{n^{p/2}} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

5. Pour démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau_x > n, S_n = y)^{\frac{\theta_n}{\sqrt{n}}} = 1$ lorsque y est suffisamment grand, on reprend le même argument, en imposant que la trajectoire brownienne approximante revient près de y_0 à l'instant 1 tout en restant dans le cône \mathcal{C} (ceci se réalise avec probabilité $\geq 2\epsilon_0 > 0$), et en complétant la trajectoire de la marche aléatoire de façon à revenir en y ; il est facile de voir que le nombre de pas nécessaires pour réaliser cet objectif est de l'ordre de \sqrt{n} [4].

Ce théorème était connu dans le cas de la demi-droite réelle ($d = 1$, $p = 1$ dans ce cas et on retrouve bien les comportements en $1/\sqrt{n}$ et $1/n^{3/2}$ annoncés ci-dessus) ou bien dans celui des demi-espaces de \mathbb{R}^d ; ici le cône \mathcal{C} est vraiment quelconque. Expliquons en quelques mots d'une part d'où vient l'exposant p et à quoi correspond la fonction V .

L'exposant p

Notons $(B_t)_{t>0}$ le mouvement brownien sur \mathbb{R}^d issu de 0 et τ_x^{bm} le temps de sortie du cône \mathcal{C} pour le mouvement brownien $(B_t)_{t>0}$. La fonction harmonique du mouvement brownien tué au moment où il sort du cône est la solution minimale strictement positive sur \mathcal{C} du problème de Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathcal{C} \quad \text{avec la condition au bord} \quad u|_{\partial\mathcal{C}} = 0.$$

Dans la littérature (voir par exemple [7]), on dispose de l'estimation suivante

$$\mathbb{P}(\tau_x^{bm} > t) \sim \frac{u(x)}{t^{p/2}} \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow +\infty.$$

En dimension $d = 1$ on a $p = 1$. Supposons à présent $d \geq 2$. Le générateur infinitésimal du mouvement brownien est le laplacien Δ sur \mathbb{R}^d . Notons $L_{\mathbb{S}^{d-1}}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur \mathbb{S}^{d-1} , cet opérateur est compact : il existe $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ et des fonctions non nulles m_1, m_2, \dots , s'annulant sur $\partial\Sigma$ telles que

$$L_{\mathbb{S}^{d-1}} m_j(x) = -\lambda_j m_j(x) \quad x \in \Sigma.$$

On a $p := \sqrt{\lambda_1 + (d/2 - 1)^2} - (d/2 - 1) > 0$ et la fonction $u(x)$ ci-dessus est radiale puisque $\forall x \in \mathcal{C} \quad u(x) = |x|1(x/|x|)$.

La fonction V

Notons P le noyau de transition de la marche aléatoire $(x + S_n)_{n \geq 0}$ et $P_{\mathcal{C}}$ sa restriction au cône \mathcal{C} . Pour tout point $x \in \mathbb{Z}^d$ et tout sous-ensemble $B \subset \mathbb{Z}^d$, on a

$$P_{\mathcal{C}}(x, B) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} 1_{B \cap \mathcal{C}}(x + y) \mu(y).$$

La fonction V qui apparaît dans l'énoncé ci-dessus est $P_{\mathcal{C}}$ -harmonique; en d'autres termes, pour tout $x \in \mathcal{C}$

$$V(x) = P_{\mathcal{C}}V(x) = \mathbb{E}(V(x + S_1), \tau_x > 1).$$

Cette fonction est délicate à expliciter, on connaît son comportement lorsque $|x| \rightarrow +\infty$, sa forme explicite en dimension 1 est donnée un peu plus loin.

D. Denisov et V. Wachtel on précisé l'énoncé du Théorème 4.1 comme suit

Théorème 4.2. *On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que la loi μ admette des moments d'ordre $2 + \delta$, qu'elle est centrée, apériodique sur \mathbb{Z}^d et adaptée au cône \mathcal{C} . Il existe alors une constante $C_{\mathcal{C}}$ (que l'on peut expliciter) telle que pour tous $x, y \in \mathcal{C}$*

$$\mathbb{P}(x + S_n \in K, \tau_x > n) \sim C_{\mathcal{C}} \frac{V(x)V'(y)}{n^{p+d/2}}$$

où $p > 0$ est la constante qui apparaît dans le théorème précédent et V' la fonction harmonique associée au cône \mathcal{C} et à la marche aléatoire $(-S_n)_{n \geq 1}$.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au cas où $d = 1$ et $\mathcal{C} :=]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$ nous notons τ_x le premier instant où le processus $(x + S_n)_{n \geq 0}$ atteint la demi-droite $] -\infty, 0]$ et nous nous intéressons au comportement asymptotique de la suite $(\mathbb{P}(\tau_x > n))_{n \geq 1}$. Afin d'alléger les formules dans les lignes qui suivent, on note $\tau := \tau_0$. Nous allons démontrer le

Théorème 4.3. *On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que la loi μ admette des moments d'ordre $2 + \delta$, qu'elle est centrée et apériodique sur \mathbb{Z} . Il existe alors une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $x > 0$, on ait*

$$(2) \quad \mathbb{P}(\tau_x > n) \sim \kappa \frac{-\mathbb{E}(S_{\tau_x})}{\sqrt{n}} \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Remarquons que l'hypothèse de centrage combinée avec celle d'apériodicité entraîne $\mu(\mathbb{N}) > 0$; la loi μ est donc adaptée au cône $]0, +\infty[$.

4.2. La factorisation de Wiener-Hopf. L'approche classiquement développée depuis une cinquantaine d'année pour étudier ces probabilités tabous repose sur la factorisation de Wiener-Hopf; celle-ci permet d'exprimer la fonction génératrice du couple (τ, S_τ) en terme de quantités reliées à la marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 0}$. Dans cette section, nous allons expliquer comment obtenir l'asymptotique (??) en utilisant cette approche; néanmoins, nous n'explicitons pas la constante $-\mathbb{E}(S_{\tau_x})$ et renvoyons le lecteur à l'article [5] pour une autre expression de cette constante.

On a d'une part (voir par exemple [1] ou [3])

$$(3) \quad \forall s \in [0, 1[\quad \sum_{n \geq 0} s^n \mathbb{P}(\tau > n) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{P}(S_n > 0)\right)$$

et d'autre part

$$(4) \quad \forall s \in [0, 1[, \forall a > 0 \quad \sum_{n \geq 0} s^n \mathbb{E}(e^{-aS_n}; \tau > n) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{s^n}{n} \mathbb{E}(e^{-aS_n}; S_n > 0)\right)$$

Expliquons brièvement comment ces deux identités permettent de décrire finement le comportement asymptotique de la suite $(\mathbb{P}(\tau_x > n))_{n \geq 1}$. L'étude se mène en 3 étapes :

Étape 1- Obtenir l'estimation voulu pour la suite $(\mathbb{P}(\tau > n))_{n \geq 1}$.

Il est tout d'abord assez facile de montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\mathbb{P}(S_n > 0) - \frac{1}{2} \right)$ est convergente, notons c sa limite; l'identité (3) entraîne alors

$$\sum_{n \geq 0} s^n \mathbb{P}(\tau > n) = \frac{e^c}{\sqrt{1-s}} (1 + o(s))$$

et via un théorème taubérien classique [3] on obtient, lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$(5) \quad \mathbb{P}(\tau > n) \sim \frac{e^c}{\sqrt{\pi n}}.$$

Étape 2- Elle consiste à montrer que pour tout $a > 0$, la suite $\left(n^{3/2} \mathbb{E}(e^{-aS_n}; \tau > n)\right)_{n \geq 1}$ converge vers une constante non nulle (qui s'exprime en terme de potentiels de la marche des records descendants).

En dérivant les deux membres de (4) et en multipliant par s , on a, pour tout $|s| < 1$ et $a > 0$

$$\sum_{n \geq 1} s^n n \mathbb{E}(e^{-aS_n}; \tau > n) = \sum_{n \geq 1} s^n \mathbb{E}(e^{-aS_n}; S_n > 0) \times \sum_{n \geq 0} s^n \mathbb{E}(e^{-aS_n}; \tau > n)$$

d'où

$$\mathbb{E}(e^{-aS_n}; \tau > n) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

avec $a_n := \mathbb{E}(e^{-aS_n}; S_n > 0)$ et $b_n := \mathbb{E}(e^{-aS_n}; \tau > n)$ pour tout $n \geq 0$.

On sait que, à une constante multiplicative prêt, on a $a_n \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, où $\sigma^2 = \mathbb{E}(Y_1^2)$; ceci découle du théorème limite local pour une marche aléatoire centrée et apériodique sur \mathbb{Z} .

Pour conclure, on utilise le lemme élémentaire suivant :

Lemme 4.4. *Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels positifs telles que*

- (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} a_n = a > 0$,
- (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B < +\infty$
- (3) *la suite $(nb_n)_n$ est bornée*

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = aB.$$

Il nous faut vérifier que les hypothèses (b) et (c) sont satisfaites. Cela découlera du lemme suivant avec $b_n = \mathbb{E}(e^{-aS_n}; \tau > n)$ et $c_n := \frac{\mathbb{E}(e^{-aS_n}; S_n > 0)}{n}$ et en utilisant l'identité (4).

Lemme 4.5. *Soient $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ deux suites telles que, pour $|s| \leq 1$ on ait*

$$\sum_{n \geq 0} b_n s^n = \exp \left(\sum_{n \geq 1} c_n s^n \right).$$

Si la suite $(n^{3/2}c_n)_{n \geq 0}$ est bornée il en est de même pour la suite $(n^{3/2}c_n)_{n \geq 0}$.

Étape 3- Estimation asymptotique de la suite $(\mathbb{P}(\tau_x > n)_{n \geq 1}$, pour tout $x > 0$.

Pour tout $n \geq 1$, posons $m_n := \min(0, S_1, \dots, S_n)$ et notons T_n la variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} égale au premier instant $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $m_n = S_{T_n}$. Attention T_n n'est pas un temps d'arrêt! On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_x > n) &= \mathbb{P}(m_n \geq -x) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(m_n \geq -x, T_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_1 > S_k, \dots, S_{k-1} > S_k, -x \leq S_k < 0, S_{k+1} \geq S_k, \dots, S_n \geq S_k) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_1 > S_k, \dots, S_{k-1} > S_k, -x \leq S_k < 0) \\ (6) \quad &\quad \times \mathbb{P}(Y_{k+1} \geq 0, \dots, Y_{k+1} + \dots + Y_n \geq 0). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_k) = \mathcal{L}(Y_k, \dots, Y_1)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 > S_k, \dots, S_{k-1} > S_k, -x \leq S_k < 0) &= \mathbb{P}(Y_2 + \dots + Y_k < 0, \dots, Y_k < 0, -x \leq S_k < 0) \\ &= \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{k-1} < 0, -x \leq S_k < 0) \\ &= \mathbb{P}(\tau^+ > k, S_k \in [-x, 0]), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\tau^+ := \inf\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}$. Par un raisonnement analogue à l'étape 1, on voit que le terme $\mathbb{P}(S_1 > S_k, \dots, S_{k-1} > S_k, -x \leq S_k < 0)$ se comporte en $1/k^{3/2}$. D'autre part, en utilisant le fait que $\mathcal{L}(Y_{k+1}, \dots, Y_n) = \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_{n-k})$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{k+1} \geq 0, \dots, Y_{k+1} + \dots + Y_n \geq 0) &= \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{n-k} \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(\tau^{*-} > n - k) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\tau^{*-} := \inf\{n \geq 1 : S_n < 0\}$, si bien que

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} \geq 0, \dots, Y_{k+1} + \dots + Y_n \geq 0) \sim \frac{1}{\sqrt{n-k}} \text{ lorsque } n-k \rightarrow +\infty.$$

On conclut en appliquant de nouveau le Lemme 4.4 à l'identité (6).

4.3. L'approche "trajectorielle" de D. Denisov et V. Wachtel. On note P^+ la restriction à \mathbb{R}^+ du noyau de transition de la marche aléatoire sur \mathbb{Z} de loi μ . C'est un noyau sous-markovien, défini par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}^+$

$$P^+(x, B) = \sum_{y=-x}^{+\infty} 1_B(x+y)\mu(y) = \mathbb{P}(x + Y_1 \in B, \tau_x > 1).$$

On dit qu'une fonction borélienne $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est P^+ -harmonique si elle vérifie l'équation

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ \quad g(x) = P^+g(x) = \mathbb{E}(g(x + S_1), \tau_x > 1).$$

La fonction $u : x \mapsto u(x) = x$ est harmonique sur \mathbb{R} , strictement positive sur \mathbb{R}_+^* et nulle en 0. Elle permet de construire une fonction P^+ -harmonique sur \mathbb{R}^+ .

Lemme 4.6. *La fonction $V : x \mapsto u(x) - \mathbb{E}u(x + S_{\tau_x}) = -\mathbb{E}(S_{\tau_x})$ est P^+ -harmonique.*

Démonstration. On a $V(x) = -\mathbb{E}(S_{\tau_x}, \tau_x = 1) - \mathbb{E}(S_{\tau_x}, \tau_x > 1)$ avec d'une part

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}(S_{\tau_x}, \tau_x = 1) &= -\mathbb{E}(S_1, \tau_x = 1) \\ &= -\mathbb{E}(S_1) + \mathbb{E}(S_1, \tau_x > 1) \\ &= \mathbb{E}(S_1, \tau_x > 1) \end{aligned}$$

et d'autre part, grâce à la propriété de Markov

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}(S_{\tau_x}, \tau_x > 1) &= -\mathbb{E}(S_{\tau_x}, x + Y_1 > 0, \tau_x > 1) \\ &= -\sum_{y=-x}^{+\infty} \mathbb{E}(y + S_{\tau_{x+y}})\mu(y) \\ &= -\sum_{y=-x}^{+\infty} y\mu(y) - \sum_{y=-x}^{+\infty} \mathbb{E}(S_{\tau_{x+y}})\mu(y) \\ &= -\mathbb{E}(S_1, \tau_x > 1) + \mathbb{E}(V(x + S_1), \tau_x > 1). \end{aligned}$$

Ainsi $V(x) = \mathbb{E}(V(x + S_1), \tau_x > 1)$ ce qui montre que la fonction V est P^+ -harmonique. \square

La démonstration du théorème ?? se fait en 4 étapes :

- (1) la première étape consiste à expliciter les estimations connues pour le mouvement brownien $(x + B_t)_{t>0}$ issu de $x > 0$ en précisant leur caractère uniforme par rapport à x
- (2) dans un second temps nous énonçons une version avec vitesse du principe d'invariance de Donsker due à Sakhanenko.
- (3) dans la troisième étape, nous réalisons un couplage entre la marche aléatoire et le mouvement brownien qui nous permet d'obtenir l'asymptotique annoncée pour les points x suffisamment grands ; nous pouvons le faire de façon naturelle pour $x \geq \sqrt{n}$ mais grâce au théorème de Sakhanenko elles deviennent valides pour $s \geq n^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ pour ϵ suffisamment petit.
- (4) la démonstration se termine en introduisant le temps d'arrêt $\nu_n = \nu_{n,\epsilon,x}$ correspondant au premier instant où la marche $(x + S_n)_{n \geq 0}$ atteint l'intervalle $I_{n,\epsilon} := [n^{\frac{1}{2}-\epsilon}, +\infty[$ et en contrôlant sa taille.

Étape 1- Nous renvoyons le lecteur au livre [7] pour énoncer le

Théorème 4.7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout réel $x > 0$*

$$(7) \quad \mathbb{P}(\tau_x^{bm} > n) \leq C \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

De plus, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $x > 0$, on ait

$$(8) \quad \mathbb{P}(\tau_x^{bm} > n) \sim \kappa \frac{x}{\sqrt{n}} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

cette convergence étant uniforme en $x \in [0, \theta_n \sqrt{n}]$, pour toute suite $(\theta_n)_n$ qui tend vers 0.

Étape 2-Le principe d'invariance de Donsker permet d'approcher la trajectoire de la marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 0}$ convenablement normalisée par celle d'un mouvement brownien $(B_t)_{t>0}$, il nécessite des moments d'ordre 2. De ce principe découle le fait que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{t \leq n} |S_{[t]} - B_t| \right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Nous utiliserons une forme améliorée de ce théorème due à Sakhanenko et qui précise la qualité de cette approximation, sous une hypothèse légèrement plus forte.

Théorème 4.8. *Supposons $E(Y_1^{2+\delta}) < +\infty$. Quitte à modifier l'espace Ω , on peut définir sur cet univers un mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ issu de 0 tel que, pour tout $0 < \gamma < \frac{\delta}{2(2+\delta)}$*

$$(9) \quad \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq n} |S_{[t]} - B_t| \geq n^{\frac{1}{2}-\gamma}\right) \leq Cn^{\gamma(2+\delta)-\delta/2}$$

où C est une constante positive.

Ce théorème d'approximation nous permettra de “transférer” à la marche $(x + S_n)_{n \geq 1}$ les résultats connus sur les fluctuations du mouvement brownien sur \mathbb{R} . Le couplage des trajectoires de la marche aléatoire $(x + S_n)_n$ et du mouvement brownien nécessitera de faire partir ces processus de points distincts. Nous introduisons à cet effet les temps d'arrêts $\tau_x^{bm}, x > 0$, définis par $\tau_x^{bm} := \inf\{t > 0 : x + B_t \leq 0\}$.

Étape 3- Choisissons γ suffisamment petit pour que $r := \delta/2 - \gamma(2 + \delta) > 0$ et fixons $0 < \epsilon < \min(\frac{1}{2}, \gamma, r)$. Pour tout $n \geq 1$, notons $I_{n,\epsilon}$ l'intervalle $[n^{\frac{1}{2}-\epsilon}, +\infty[$; le théorème de Sakhanenko va nous permettre d'étendre dans un premier temps les estimations (7) et (8) à la marche aléatoire $(S_n)_n$ lorsque son point de départ vit dans $I_{n,\epsilon}$. Nous avons la

Proposition 4.9. *Il existe $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ tel que, pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$*

$$(10) \quad \mathbb{P}(\tau_x > n) \leq C \frac{x}{\sqrt{n}} \quad \text{uniformément en } x \in I_{n,\epsilon}$$

où C est une constante qui dépend de ϵ et

$$(11) \quad \mathbb{P}(\tau_x > n) \sim \kappa \frac{x}{\sqrt{n}} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

uniformément en $x \in I_{n,\epsilon}$ tel que $x \leq \theta_n \sqrt{n}$, pour toute suite $(\theta_n)_n$ qui tend vers 0.

Démonstration. Fixons $\gamma \in]\epsilon, \frac{1}{2}[$ et posons $x^\pm := x \pm n^{\frac{1}{2}-\gamma}$. Posons

$$A_n := \left(\sup_{t \leq n} |S_{[t]} - B_t| \geq n^{\frac{1}{2}-\gamma}\right).$$

En utilisant (9) et en posant $r = \delta/2 - \gamma(2 + \delta)$, on peut écrire

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_x > n) &= \mathbb{P}(\tau_x > n, A_n) + o(n^{-r}) \\ &= \mathbb{P}(\tau_x > n, \tau_{x^+}^{bm} > n, A_n) + o(n^{-r}) \\ &\leq \mathbb{P}(\tau_{x^+}^{bm} > n) + o(n^{-r}). \end{aligned}$$

En combinant les inégalités (7) et (12), il vient

$$\mathbb{P}(\tau_x > n) \leq C \frac{x^+}{\sqrt{n}} + o(n^{-r}).$$

avec $n^{-r} = o(x/\sqrt{n})$ dès que $\epsilon < \epsilon_0 := r$, ce qui démontre (10).

De façon analogue à (12), on peut écrire

$$(13) \quad \mathbb{P}(\tau_x > n) \geq \mathbb{P}(\tau_{x^-}^{bm} > n) + o(n^{-r}).$$

Or, en combinant l'estimation (8) avec la définition des points x^\pm , on obtient

$$(14) \quad \mathbb{P}(\tau_{x^\pm}^{bm} > n) = \kappa \frac{x^\pm}{\sqrt{n}}(1 + o(n)) = \kappa \frac{x}{\sqrt{n}}(1 + o(n))$$

uniformément en $x \in I_{n,\epsilon}$ tel que $x \leq \theta_n \sqrt{n}$, pour toute suite $(\theta_n)_n$ fixée qui tend vers 0. Pour ces valeurs de x , on obtient donc, en utilisant (12) et (13)

$$(15) \quad \mathbb{P}(\tau_x > n) = \kappa \frac{x}{\sqrt{n}}(1 + o(n)) = \kappa \frac{x}{\sqrt{n}}(1 + o(n)) + o(n^{-r}) = \kappa \frac{x}{\sqrt{n}}(1 + o(n))$$

dès que $\epsilon < \epsilon_0$, comme ci-dessus. L'assertion (11) est démontrée.

Étape 4- Nous explicitons à présent le comportement de la suite $(\mathbb{P}(\tau_x > n))_{n \geq 1}$ où cette fois-ci x est un réel strictement positif quelconque. Pour ce faire nous allons utiliser le résultat de la Proposition 4.9 et nous introduisons la suite de temps d'arrêt $(\nu_n)_n$ définie par

$$(16) \quad \nu_n = \nu_{n,\epsilon,x} := \inf\{k \geq 1 : x + S_k \in I_{n,\epsilon}\}.$$

La première chose à faire est de contrôler la "taille" de ces temps d'arrêt, nous avons la

Propriétés 4.10. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$(17) \quad \mathbb{P}(\nu_n > n^{1-\epsilon}, \tau_x > n^{1-\epsilon}) \leq \exp(-cn^\epsilon)$$

$$(18) \quad \mathbb{E}(|x + S_{[n^{1-\epsilon}]}|; \nu_n > n^{1-\epsilon}, \tau_x > n^{1-\epsilon}) \leq C(x) \exp(-cn^\epsilon)$$

Démonstration. On introduit un paramètre $a \gg 1$ dont la valeur sera fixée en fin de démonstration; pour tout $n \geq 1$, on pose $b_n := [an^{\frac{1}{2}-\epsilon}]$. Posons $I'_{n,\epsilon} := \mathbb{R}^+ \setminus I_{n,\epsilon} = [0, n^{\frac{1}{2}-\epsilon}[$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\nu_n > n^{1-\epsilon}, \tau_x > n^{1-\epsilon}) &\leq \mathbb{P}(x + S_{b_n^2} \in I'_{n,\epsilon}, x + S_{2b_n^2} \in I'_{n,\epsilon}, \dots, x + S_{[n^\epsilon/a^2]b_n^2} \in I'_{n,\epsilon}) \\ &\leq \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^+} \mathbb{P}(y + S_{b_n^2} \in I'_{n,\epsilon}) \right)^{n^\epsilon/a^2} \end{aligned}$$

avec $\sup_{y \in \mathbb{R}^+} \mathbb{P}(y + S_{b_n^2} \in I'_{n,\epsilon}) \leq P_1(n) + P_2(n)$, où l'on pose

$$P_1(n) := \sup_{y \in \mathbb{R}^+} \mathbb{P}(|S_{b_n^2}| > b_n) \quad \text{et} \quad P_2(n) := \sup_{y \in \mathbb{R}^+} \mathbb{P}(y + S_{b_n^2} \in I'_{n,\epsilon}, |S_{b_n^2}| \leq b_n).$$

D'après le théorème de la limite centrale, la suite $(P_1(n))_n$ converge vers $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$, elle est donc majorée par un nombre réel $p \in]0, 1[$. Il nous reste à contrôler le terme $P_2(n)$; d'après le théorème limite local, on sait qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(S_{b_n^2} \in y + [0, 1]) \leq \frac{C}{b_n}$$

si bien que

$$\begin{aligned} P_2(n) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^+} \mathbb{P}(y + S_{b_n^2} \in I'_{n,\epsilon}, |S_{b_n^2}| \leq b_n) \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^+} \sum_k \mathbb{P}(k \leq S_{b_n^2} < k+1) \\ &\quad \text{où la somme porte sur les entiers } k \in [-b_n, b_n] \cap [-y, -y + n^{\frac{1}{2}-\epsilon}] \\ &\leq \frac{C}{b_n} \min(2b_n, [n^{\frac{1}{2}-\epsilon}]) \\ &\leq \frac{C}{a}. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\mathbb{P}(\nu_n > n^{1-\epsilon}, \tau_x > n^{1-\epsilon}) \leq \left(p + \frac{C}{a}\right)^{n^\epsilon/a^2}$$

avec $e^{-c} := \left(p + \frac{C}{a}\right)^{1/a^2} < 1$ pourvu que a soit assez grand. L'inégalité (17) est démontrée.

L'inégalité (18) en découle aisément : en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|x + S_{[n^{1-\epsilon}]}|; \nu_n > n^{1-\epsilon}, \tau_x > n^{1-\epsilon}) &\leq (\mathbb{E}(|x + S_{[n^{1-\epsilon}]}|^2))^{\frac{1}{2}} \times \mathbb{P}(\nu_n > n^{1-\epsilon}, \tau_x > n^{1-\epsilon})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (x + n^{(1-\epsilon)/2}) \exp(-cn^\epsilon/2) \\ &\leq C(x) \exp(-cn^\epsilon). \end{aligned}$$

□

Achevons à présent la démonstration du Théorème 4.3. D'après la Propriété 4.10, nous avons

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_x > n) &= \mathbb{P}(\tau_x > n, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) + \mathbb{P}(\tau_x > n, \nu_n > n^{1-\epsilon}) \\ &= \mathbb{P}(\tau_x > n, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) + O(n^{-cn^\epsilon}). \end{aligned}$$

Or, en utilisant la propriété de Markov, on a

$$\sum_{y \in I_{n,\epsilon}} P(\tau_y > n) \mu_n(y) \leq \mathbb{P}(\tau_x > n, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) \leq \sum_{y \in I_{n,\epsilon}} P(\tau_y > n - n^{1-\epsilon}) \mu_n(y)$$

où μ_n désigne la mesure sur \mathbb{R}^+ définie par $\mu_n(dy) := \mathbb{P}(x + S_{\nu_n} \in dy, \tau_x > \nu_n, \nu_n \leq n^{1-\epsilon})$. La Proposition 4.9 nous donne alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_x > n, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) &= \frac{\kappa + o(1)}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(x + S_{\nu_n}; \tau_x > \nu_n, |x + S_{\nu_n}| \leq \theta_n \sqrt{n}, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(x + S_{\nu_n}; \tau_x > \nu_n, |x + S_{\nu_n}| > \theta_n \sqrt{n}, \nu_n \leq n^{1-\epsilon})\right) \\ &= \frac{\kappa + o(1)}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(x + S_{\nu_n}; \tau_x > \nu_n, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(x + S_{\nu_n}; \tau_x > \nu_n, |x + S_{\nu_n}| > \theta_n \sqrt{n}, \nu_n \leq n^{1-\epsilon})\right) \end{aligned}$$

et il suffit de vérifier que dans cette dernière décomposition, la première espérance converge vers $V(x)$ et que la seconde peut être négligée.

Lemme 4.11. *Sous les hypothèses du théorème 4.3, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(x + S_{\nu_n}; \tau_x > \nu_n, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) = -\mathbb{E}(S_{\tau_x}) = V(x).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x + S_{\nu_n}; \tau_x > \nu_n, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) &= \mathbb{E}(x + S_{\nu_n \wedge n^{1-\epsilon}}; \tau_x > \nu_n \wedge n^{1-\epsilon}, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) \\ &= \mathbb{E}(x + S_{\nu_n \wedge n^{1-\epsilon}}; \tau_x > \nu_n \wedge n^{1-\epsilon}) \\ &\quad - \mathbb{E}(x + S_{[n^{1-\epsilon}]}; \tau_x > n^{1-\epsilon}, \nu_n > n^{1-\epsilon}). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (18), on a $\mathbb{E}(x + S_{[n^{1-\epsilon}]}; \tau_x > n^{1-\epsilon}, \nu_n > n^{1-\epsilon}) \leq C(x) \exp(-cn^\epsilon)$; par ailleurs, en utilisant le fait que $(S_n)_n$ est une martingale, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x + S_{\nu_n \wedge n^{1-\epsilon}}; \tau_x > \nu_n \wedge n^{1-\epsilon}) &= \mathbb{E}(x + S_{\nu_n \wedge n^{1-\epsilon}}) - \mathbb{E}(x + S_{\nu_n \wedge n^{1-\epsilon}}; \tau_x \leq \nu_n \wedge n^{1-\epsilon}) \\ &= x - \mathbb{E}(x + S_{\tau_x}; \tau_x \leq \nu_n \wedge n^{1-\epsilon}) \end{aligned}$$

et l'on conclut en remarquant que, puisque $\nu_n \wedge n^{1-\epsilon} \rightarrow +\infty$ \mathbb{P} -p.s et que la variable S_{τ_x} est intégrable, on a $\mathbb{E}(S_{\tau_x}; \tau_x \leq \nu_n \wedge n^{1-\epsilon}) \rightarrow \mathbb{E}(S_{\tau_x})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. \square

Lemme 4.12. *Sous les hypothèses du théorème 4.3, si la suite $(\theta_n)_n$ est telle que $\theta_n \rightarrow 0$ et $n^{\epsilon/4} \theta_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(x + S_{\nu_n}; \tau_x > \nu_n, |x + S_{\nu_n}| > \theta_n \sqrt{n}, \nu_n \leq n^{1-\epsilon}) = 0.$$

Démonstration. Ce point est assez technique, afin d'en simplifier ici la démonstration, nous supposons que la loi de probabilité μ admet des moments polynomiaux de tout ordre; nous renvoyons le lecteur à l'article de D. Denisov & V. Wachtel pour le cas où l'on suppose seulement $\mathbb{E}(|Y_k|^{2+\delta}) < +\infty$ pour un $\delta > 0$. Remarquons que la suite $((x + S_n)1_{\tau_x > n})_{n \geq 1}$ est une sous-martingale : en effet $(x + S_{n+1})1_{\tau_x > n+1} = (x + S_{n+1})1_{\tau_x > n} - (x + S_{n+1})1_{\tau_x = n+1} \geq (x + S_{n+1})1_{\tau_x > n}$ puisque $(x + S_{n+1})1_{\tau_x = n+1} \leq 0$ \mathbb{P} -a.s. d'où l'inégalité de sous-martingale. La quantité $\mathbb{E}(x + S_{\nu_n}; \tau_x > \nu_n, |x + S_{\nu_n}| > \theta_n \sqrt{n}, \nu_n \leq n^{1-\epsilon})$ est alors majorée par

$$\mathbb{E}(x + S_{[n^{1-\epsilon}]}; \tau_x > \nu_n, |x + S_{\nu_n}| > \theta_n \sqrt{n}, \nu_n \leq n^{1-\epsilon})$$

et donc par

$$\mathbb{E}(x + S_{[n^{1-\epsilon}]}; \tau_x > \nu_n, x + M_{[n^{1-\epsilon}]} > \theta_n \sqrt{n}, \nu_n \leq n^{1-\epsilon})$$

où, pour tout entier $k \geq 0$, on pose $M_k := \max_{1 \leq l \leq k} S_l$. Puisque $n^{\epsilon/4} \theta_n \rightarrow +\infty$, il suffit de vérifier que pour tout $\eta > 0$

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(x + S_n; x + M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta}, \tau_x > n) = 0.$$

On a

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}(x + S_n; x + M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta}, \tau_x > n) &\leq \mathbb{E}(x + M_n; x + M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta}) \\ &\leq x\mathbb{P}(M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta} - x) + \mathbb{E}(M_n; M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta} - x) \end{aligned}$$

et, x étant fixé, quitte à modifier la valeur de $\eta > 0$, il suffit de vérifier que les quantités $\mathbb{P}(M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta})$ et $\mathbb{E}(M_n; M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta})$ tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. L'inégalité de Doob précise que pour tout $t > 0$ et $p \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}(M_n > t) \leq \frac{\mathbb{E}(|S_n|^p)}{t^p} \leq c_p \frac{n^{p/2}}{t^p}$$

où c_p est une constante strictement positive qui dépend de μ . On a alors, d'une part

$$(22) \quad \mathbb{P}(M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta}) \leq c_p \frac{n^{p/2}}{n^{p/2+p\eta}} \leq \frac{c_p}{n^{p\eta}}$$

et d'autre part

$$(23) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}(M_n; M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta}) &= n^{\frac{1}{2}+\eta} \mathbb{P}(M_n > n^{\frac{1}{2}+\eta}) + \int_{n^{\frac{1}{2}+\eta}}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n > t) dt \\ &\leq \frac{2c_p}{n^{(p-1)\eta-1/2}}. \end{aligned}$$

La propriété (20) découle alors de (21), (22) et (23), pourvu que $(p-1)\eta - \frac{1}{2} > 0$.

RÉFÉRENCES

- [1] L. Breiman, Probability. Addison-Wesley publishing
- [2] Denisov, D. and Wachtel, V. (2011). *Random walks in cones*. arXiv : 1110.1254v1 [math.PR] 6 Oct 2011.
- [3] Feller, W. (1964) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2 Wiley, New York.
- [4] Garbit, R. (2009). *Temps de sortie d'un cône pour une marche aléatoire centrée*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. Vol. 345 (2007), no. 10, p. 587-592.
- [5] Le Page, E. and Peigné, M. (1997). *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires*. Springer Lecture Notes **928**, 258-303.
- [6] Revuz, D. (1984) *Markov chains*. North Holland.
- [7] Revuz, D. and Yor, M. (1999) *Continuous martingales and Brownian Motion*. Springer.
- [8] Spitzer, F. (1976). *Principles of Random Walk*. Second edition. Springer.
- [9] Varopoulos, N. Th. (1999). *Potential theory in conical domains*. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **125**, 335-384.