Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$: propriétés de récurrence

Marc Peigné , [1]

1 Introduction

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d) définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose dans cette introduction que $\mathbb{E}[|Y_n|] < +\infty$, on pose $m := \mathbb{E}[Y_n]$ et $S_n := S_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$ pour $n \geq 1$.

Si $m \neq 0$, on a, d'après la loi forte des grands nombres $\dfrac{S_n}{n} \to m$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, ce qui entraîne $S_n \to +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $m > 0$ et $S_n \to -\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $m < 0$. Ainsi, pour toute réel $a > 0$, la v.a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{[-a,a]}(S_n)$, qui est égale au nombre de visites de la m.a. $(S_n)_n$ dans l'intervalle $[-a, a]$, est finie $\mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $m > 0$ En fait, on a en fait dans ce cas

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{[-a,a]}(S_n)\Big] < +\infty,$$

ce qui est une propriété beaucoup plus forte mais aussi beaucoup plus délicate à obtenir.

Si $m = 0$, et si l'on suppose pour simplifier que $\mathbb{E}[Y_n^2] < +\infty$, on peut montrer à l'aide du théorème central limite et de la loi du $0-1$ de Kolmogorov que

$$\liminf S_n = -\infty \quad \text{et} \quad \liminf S_n = +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}^2$$

Ainsi, si on suppose que la loi des Y_i est à support dans $[-a, a]$, on obtient alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{[-a,a]}(S_n) = +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Dans ce cours, nous allons préciser cette notion de "visite" des intervalles de $\mathbb{R}$ que ce soit pour les marches aléatoires classiques ou pour une autre classe de processus, dont les accroissements sont gouvernés par des transformations continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant certaines propriétés contractantes.

---

[1] Marc Peigné LMPT, UMR 6083, Faculté des Sciences et Techniques, Parc de Grandmont, 37200 Tours. mail : peigne@univ-tours.fr

[2] En fait, plus précisément, on a $\liminf \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ et $\liminf \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, et les grandes lignes e la démonstration sont les suivantes : pour tout $c > 0$, on a $\lim \mathbb{P}\Big[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\frac{c}{\sigma}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$, d'où $\mathbb{P}\Big[\limsup_n \Big[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]\Big] > 0$. L'évènement $\limsup_n \Big[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]$ étant mesurable par rapport à la tribu asymptotique associée à la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$, on a en fait $\mathbb{P}\Big[\limsup_n \Big[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]\Big] = 1$ et donc aussi $\mathbb{P}\Big[\limsup_n \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big] = 1$; le choix de c étant arbitraire il vient $\mathbb{P}\Big[\limsup_n \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty\Big] = 1$.

2 Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ introduite dans l'introduction est un exemple fondamental de chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^d$ de noyau de transition $(P(x,\cdot)_{x\in\mathbb{R}^d}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad P(x,A) := \mu(A-x).$$

On peut aussi définir P à l'aide des fonctions boréliennes bornées : pour tout fonction borélienne bornée $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$P\phi(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x+y)\mu(dy).$$

L'opérateur P agit par dualité sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ de la façon suivante : pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}^d$, la mesure νP est définie par

$$\nu P(A) := \nu(P1_A) = \int_{\mathbb{R}^d} P1_A(x)\nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(y)P(x,dy)\nu(dy).$$

Ainsi, si la loi de S_0 est ν, alors, pour tout $n \geq 1$, celle de la variable S_n est égale à $\nu * \mu^{*n}$, où μ^{*n} désigne la puissance de convolution $n^{ième}$ de la mesure μ ; par convention, on pose $\mu^{*0} = \delta_0$.
On notera $\Big((\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}), (S_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d}\Big)$ la chaîne de Markov canonique associée au noyau de transition P. On rappelle que $\mathbb{P}_x$ désigne la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}})$ définie par : pour tous boréliens $A_0, A_1, \cdots, A_n$ de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{P}_x(A_0\times A_1\times\cdots\times A_n) = 1_{A_0}(x)\int\int\cdots\int 1_{A_0}(x+y_1)\cdots 1_{A_n}(x+y_1+\cdots+y_n)\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_n).$$

Plus généralement, $\mathbb{P}_\nu$ désigne la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}})$ définie par

$$\mathbb{P}_\nu(A_0\times A_1\times\cdots\times A_n) = \int\int\cdots\int 1_{A_0}(s)1_{A_0}(s+y_1)\cdots 1_{A_n}(s+y_1+\cdots+y_n)\nu(ds)\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_n).$$

2.1 Propriétés de récurrence

Nous avons tout d'abord la

Définition 2.1 *Le réel x est une valeur possible de $(S_n)_{n\geq 1}$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que*

$$\mathbb{P}_0[|S_n - x| < \epsilon] > 0.$$

Le réel x est une valeur de récurrence de $(S_n)_{n\geq 0}$ si pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}_0[|S_n - x| < \epsilon \ i.s.] = 1.$$

On a le

Théorème 2.2 *L'ensemble $\mathcal{R}$ des valeurs de récurrence de $(S_n)_{n\geq 1}$ est soit vide soit un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. Lorqu'il est non vide, l'ensemble $\mathcal{R}$ est aussi égal à l'ensemble $\mathcal{P}$ des valeurs possibles de $(S_n)_{n\geq 1}$.*

Remarque. Lorsque les variables aléatoires Y_n sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ou dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, les définitions ci-dessus se simplifient

$$x \text{ est une valeur possible de } (S_n)_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\Big[\bigcup_n [S_n = x]\Big] > 0$$

$$x \text{ est une valeur de récurrence} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[S_n = x \ i.s.] = 1;$$

nous détaillons dans un premier temps la démonstration dans ce cas.

Supposons $\mathcal{R} \neq \emptyset$; on a $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ et montrons le

Fait 2.3 *Si $x, y \in \mathcal{R}$ alors $y - x \in \mathcal{R}$.*

Démonstration ; Sinon, la m.a. visiterait le site $y - x$ un nombre fini de fois avec probabilité positive, i.e.

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}[S_n \neq y-x]\Big] > 0$$

si bien qu'il existerait $m \geq 1$ tel que $\mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq m}[S_n \neq y-x]\Big] > 0$. Puisque $x \in \mathcal{P}$, il existe $k \geq 1$ tel que $\mathbb{P}[S_k = x] > 0$.

Notons alors $S_n^m = Y_n + 1 + \cdots + Y_n$ pour $n < m$ et 0 sinon. Pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq m}[S_n \neq y-x]\Big] = \mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq m}[S_k^{k+n} \neq y-x]\Big]$. car la loi de $(X_i)_{i\geq 1}$ est égale à celle de $(X_i)_{i\geq k+1}$. Les variables $S_k^{k+n}, n \geq 1$, et S_k sont indépendantes, donc

$$\mathbb{P}\Big[[S_k = x] \cap \Big[\bigcap_{n\geq m}[S_k^{k+n} \neq y-x]\Big]\Big] = \mathbb{P}[S_k = x] \times \mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq m}[S_k^{k+n} \neq y-x]\Big] > 0$$

et on en déduit que $y \notin \mathcal{R}$ en notant que

$$[S_k = x] \cap \bigcap_{n\geq m}[S_k^{k+n} \neq y-x] \subset \bigcap_{n\geq m}[S_{k+n} \neq y] = \bigcap_{n\geq m+k}[S_n \neq y]$$

d'où une contradiction.

Dans le cas non discret (i.e. le cas où support de μ n'est pas inclus dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$), on pose, pour $\delta > 0$: $p_{\delta,m}z) = \mathbb{P}[|S_n - z| \geq \delta \quad \forall n \geq m]]$. Si $z = y - x \notin \mathcal{R}$, il existe $\epsilon > 0$ et $m \geq 1$ tels que $p_{2\epsilon,m}(z) > 0$. De même, puisque $x \in \mathcal{P}$, il existe k tel que $\mathbb{P}[|S_k - x] < \epsilon] > 0$. On a, pusique les varaibles S_k et S_k^{k+n} sont indépendantes

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|S_k - x| < \epsilon, |S_k^{k+n} - (y-x)| \geq 2\epsilon \; \forall n \geq m] &= \mathbb{P}|S_k - x| < \epsilon] \\
&\quad \times \mathbb{P}\Big[|S_k^{k+n} - (y-x)| \geq 2\epsilon \; \forall n \geq m\Big] \\
&= \mathbb{P}|S_k - x| < \epsilon] \\
&\quad \times \mathbb{P}\Big[|S^n - (y-x)| \geq 2\epsilon \; \forall n \geq m\Big] > 0
\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}[|S_{k+n} - y| \geq \epsilon \; \forall n \geq m] > 0$, ie $y \notin \mathcal{R}$.

Achevons à présent la démonstration du Théorème 2.2. D'après le fait on a

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{R} &\Rightarrow 0 = x - x \in \mathcal{R} \\
x \in \mathcal{R} &\Rightarrow -x = 0 - x \in \mathcal{R} \\
x, y \in \mathcal{R} &\Rightarrow x + y = y - (-x) \in \mathcal{R}
\end{aligned}$$

si bien que $\mathcal{R}$ est un groupe.

On a $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$. Pour établir l'inclusion inverse, quand $\mathcal{R} \neq \emptyset$, on note tout d'abord que dans ce cas on a $0 \in \mathcal{R}$; en effet, $\mathcal{R}$ contient au moins un point x_0, d'où $0 = x_0 - x_0 \in \mathcal{R}$. On choisit ensuite $x \in \mathcal{P}$; il existe donc $n_0 \geq 1$ tel que $\mathbb{P}_0[S_{n_0} = x] > 0$. On a alors $\mathbb{P}[S_{n_0} = x \; et \; S_n = 0 \; i.s.] = \mathbb{P}_0[S_{n_0} = x]$ d'où $\mathbb{P}[S_{n_0} = x \; et \; S_n - S_{n_0} = -x \; i.s.] = \mathbb{P}_0[S_{n_0} = x]$, ce qui s'écrit encore $\mathbb{P}[S_{n_0} = x] \times \mathbb{P}[\; S_k = -x \; i.s.] = \mathbb{P}_0[S_{n_0} = x]$ en utilisant l'indépendance de S_{n_0} et $S_n - S_{n_0}$. Il vient $\mathbb{P}[\; S_k = -x \; i.s.] = 1$, soit $-x \in \mathcal{R}$ et donc $x \in \mathcal{R}$. □

Attention ! Quand $\mathcal{R} = \emptyset$, ce n'est plus vrai. par exemple, si $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, on a $\mathcal{P} = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R} = \emptyset$.

On peut considérer plus généralement une m.a. $(S_n)_n$ sur un groupe localement compact à base dénombrable G ; on introduit alors les

Définition 2.4 *Soit S_μ le support de la mesure μ, c'est-à-dire le plus petit fermé de G de μ-mesure 1. On note T_μ (resp. G_μ) le semi-groupe (resp. le groupe) fermé engendré par S_μ.*

Exemples . 1. $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$, on a $T_\mu = G_\mu = \mathbb{Z}$.
2. $\mu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{\sqrt{2}})$, on a $T_\mu = \{k + l\sqrt{2}/k, l \geq 1\}$ et $G_\mu = \mathbb{R}$.

Quand $\mathcal{R} \neq \emptyset$, l'ensemble $\mathcal{R} = \mathcal{P} = T_\mu$ est un groupe, d'où $\mathcal{R} = G_\mu$.

Par la suite nous dissocierons les cas $G = \mathbb{R}^d$ et G sous-groupe discret de $\mathbb{R}^d$; on pourrait aussi regarder le cas où G est la somme directe d'un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^k$ et de $\mathbb{R}^{d-k}$, les arguments restent les mêmes pour l'essentiel. Nous supposerons que $G_\mu = G$, on dira que G **est adaptée**. Partant d'un point x de G_μ, la m. a. reste dans G_μ ; en d'autres termes G_μ est un ensemble-absorbant pour la m.a. et l'on peut toujours restreindre l'étude de la m.a. à ce sous-groupe de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.5 *Si $\mathcal{R} = \emptyset$, on dit que la m.a. est* **transiente** *; lorsque $\mathcal{R} \neq \emptyset$, on dit que la m.a. est récurrente.*

Insistons sur le fait que lorsque la m.a. est récurrente, elle visite infiniment souvent **tous** les points de G_μ.

Introduisons à présent la suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 0}$ définie par $\tau_0 = 0$ et $\tau_n := \inf\{k > \tau_{n-1} : S_m = 0\}$; cette suite est égale au temps successifs de visite de l'origine 0 par la m.a. Nous avons le

Théorème 2.6 *Pour toute marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\mathbb{P}[\tau_1 < +\infty] = 1$
2. $\mathbb{P}[S_n = 0 \ i.s.] = 1$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[S_n = 0] = +\infty$.

Démonstration. Si $\mathbb{P}[\tau_1 < +\infty] = 1$, alors, pour tout $n \geq 1$ on a aussi $\mathbb{P}[\tau_n < +\infty] = 1$: en effet,si θ désigne l'opérateur de décalage sur l'espace canonique $\Big((\mathbb{R}^d)^{\otimes \mathbb{N}}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\otimes \mathbb{N}}), (S_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d}\Big)$, on peut écrire

$$\tau_n = \tau_{n-1} + \tau_1 \circ \theta^{\tau_{n-1}},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau_n < +\infty] &= \mathbb{P}[\tau_{n-1} < +\infty, \tau_1 \circ \theta^{\tau_{n-1}} < +\infty] \\
&= \mathbb{P}\Big[\tau_{n-1} < +\infty]\mathbb{P}[\tau_1 \circ \theta^{\tau_{n-1}} < +\infty/\mathcal{F}_{\tau_{n-1}}]\Big] \\
&= \mathbb{P}\Big[\tau_{n-1} < +\infty] \times \mathbb{P}\Big[\tau_1 < +\infty] \quad \text{par la propriété de Markov.}
\end{aligned}$$

Si l'on veut éviter le recours à l'opérateur θ, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau_n < +\infty] &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_{n-1} = k, \exists l \geq 1 \ t.q. \ S_{k+l} = 0] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_{n-1} = k, \exists l \geq 1 \ t.q. \ S_{k+l} - S_k = 0] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_{n-1} = k] \ \mathbb{P}_0[\exists l \geq 1 \ t.q. \ S_l = 0] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_{n-1} = k] \ \mathbb{P}_0[\tau_1 < +\infty] \\
&= \mathbb{P}\Big[\tau_{n-1} < +\infty] \times \mathbb{P}\Big[\tau_1 < +\infty].
\end{aligned}$$

Il vient $\mathbb{P}[\tau_n < +\infty] = \mathbb{P}[\tau_1 < +\infty]^n$.
Notons alors N le nombre de visite en 0 de la m.a. ; on a

$$N := \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[S_n=0]} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[\tau_n<+\infty]}$$

et

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[\tau_n < +\infty] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[\tau_1 < +\infty]^n = \frac{1}{1 - \mathbb{P}[\tau_1 < +\infty]}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[\tau_1 < +\infty] = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall n \geq 0 \quad \mathbb{P}[\tau_n < +\infty] = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\Big[\bigcap_{n \geq 0} [\tau_n < +\infty]\Big] = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[N = +\infty] = 1
\end{aligned}$$

$\square$

Ce théorème est intéressant pour les m.a. à valeurs dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^d$ et pour lesquelles la probabilité de revenir en 0 est strictement positive ; lorsque ce n'est pas le cas (on peut par exemple considérer la m.a. centrée de loi $\mu = p\delta_{-1} + (1-p)\delta_{\sqrt{2}}$ avec $p = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, pour laquelle on a $\mathbb{P}_0[S_n = 0] = 0$ pour tout $n \geq 1$). Il faut établir un analogue de ce résultat en remplaçant τ_1 par le temps de retour τ_V de la m.a. dans un voisinage ouvert V de l'origine, défini par

$$\tau_V := \inf\{n \geq 1 : S_n \in V\}.$$

Nous avons alors le

Théorème 2.7 *Pour toute marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Pour tout voisinage V de 0 dans G_μ on a $\mathbb{P}_0[\tau_V < +\infty] = 1$*
2. *Pour tout voisinage V de 0 dans G_μ et tout $x \in G_\mu$ on a $\mathbb{P}_x[\tau_V < +\infty] = 1$*
3. *Pour tout voisinage V de 0 dans G_μ on a $\mathbb{P}_0[S_n \in V i.s.] = 1$*
4. *Pour tout voisinage V de 0 dans G_μ et tout $x \in G_\mu$ on a $\mathbb{P}_x[S_n \in V i.s.] = 1$.*
5. *Pour tout voisinage V de 0 dans $G_\mu$on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[S_n \in V] = +\infty$.*
6. *Pour tout voisinage V de 0 dans G_μ et tout $x \in G_\mu$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x[S_n \in V] = +\infty$.*

Démonstration. Les implications $(2) \Rightarrow (1), (4) \Rightarrow (3)$ et $(6) \Rightarrow (5)$ sont immédiates.

L'assertion (3) s'écrit aussi $\mathbb{P}_0\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_V(S_n) = +\infty\Big] = 1$ et l'assertion (5) s'écrit, quant à elle, $\mathbb{E}_0\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_V(S_n)\Big] = +\infty$, si bien que $(3) \Rightarrow (5)$. De même, on a $(4) \Rightarrow (6)$.

L'implication $(3) \Rightarrow (1)$ découle de l'inclusion $[S_n \in V\ i.s.] \subset [\tau_V < +\infty]$.

De même, sous (3), l'ensemble $\mathcal{R}$ des valeurs de récurrence de $(S_n)_n$ est non vide puisque $0 \in \mathcal{R}$ et on a $\mathcal{R} = T_\mu = G_\mu$. Donc $(3) \Rightarrow (4)$.

Montrons à présent $(1) \Rightarrow (3)$. Pour $0 < \epsilon < \epsilon'$ et $m, n \geq 1$, on a

$$[|S_{n+m}| > \epsilon] \cap [|S_m| < \epsilon'] \subset [|S_{m+1}^{m+n}| > \epsilon - \epsilon'],$$

d'où

$$\mathbb{P}_0\Big[\bigcap_{n \geq 1} [|S_{n+m}| > \epsilon] \cap [|S_m| < \epsilon'\Big] \leq \mathbb{P}_0\Big[\bigcap_{n \geq 1} [|S_{m+1}^{m+n}| > \epsilon - \epsilon'] \Big] = \mathbb{P}_0[\tau_V = +\infty] = 0,$$

avec $V := B(0, \epsilon - \epsilon')$. En faisant tendre ϵ' vers ϵ, le long d'une sous-suite décroissante, il vient

$$\mathbb{P}_0\Big[\bigcap_{n\geq 1}[|S_{n+m}| > \epsilon] \cap [|S_m| < \epsilon\Big] = 0.$$

Or, l'évènement $\liminf_{n\to+\infty}[|S_n| > \epsilon]$ est la réunion disjointe des ensemble $\Big[\bigcap_{n\geq 1}[|S_{n+m}| > \epsilon] \cap [|S_m| < \epsilon\Big], m \geq 1$, si bien que $\mathbb{P}[\liminf_{n\to+\infty}[|S_n| > \epsilon]] = 0$, ce qui est l'assertion (3).

On montre de la même façon (2) $\Rightarrow$ (4).

Il nous reste à vérifier (5) $\Rightarrow$ (1) (la démonstration de (6) $\Rightarrow$ (2) est identique) : on a

$$\begin{aligned}
1 \geq \mathbb{P}[\liminf_{n\to+\infty}[|S_n| > \epsilon]] &= \sum_{m\geq 0}\mathbb{P}_0\Big[\bigcap_{n\geq 1}[|S_{n+m}| > \epsilon] \cap [|S_m| \leq \epsilon\Big]\\
&\geq \sum_{m\geq 0}\mathbb{P}_0\Big[\bigcap_{n\geq 1}[|S_m^{n+m}| > 2\epsilon] \cap [|S_m| < \epsilon\Big]\\
&= \sum_{m\geq 0}\mathbb{P}_0[|S_m| < \epsilon] \times \mathbb{P}_0[\tau_V = +\infty] \quad \text{avec } V := B(0, 2\epsilon),
\end{aligned}$$

et puisque $\sum_{m\geq 0}\mathbb{P}_0[|S_m| < \epsilon] = +\infty$, on a nécessairement $\mathbb{P}[\tau_V = +\infty] = 0$. $\square$

Ainsi, la m.a. $(S_n)_n$ est transiente s'il existe un voisinage V de 0 tel que $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[S_n \in V] < +\infty$; le choix de V est assez facile à faire car il suffit qu'il soit relativement compact. En effet on a la

Proposition 2.8 *Soit $(S_n)_n$ une m.a. adaptée sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$. La m.a. $(S_n)_n$ est transiente si et seulement si pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ (resp. $K \subset \mathbb{Z}^d$) on a $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[S_n \in K] < +\infty$.*

Démonstration. Elle découle du fait que

$$\forall m \geq 2 \quad \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[|S_n| < m\epsilon] \leq (2m)^d \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[|S_n| < \epsilon].$$

En effet, posons $T_k = \inf\{m \geq 0 : S_m \in k\epsilon + [0, \epsilon[^d\}$ pour $k \in \{-m, -m+1, \cdots, m-1\}^d$; on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0\Big[S_n \in k\epsilon + [0,\epsilon[^d\Big] &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0\Big[S_n \in k\epsilon + [0,\epsilon[^d, T_k = m\Big]\\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq m}\mathbb{P}_0\Big[S_n \in k\epsilon + [0,\epsilon[^d, T_k = m\Big]\\
&\leq \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq m}\mathbb{P}_0\Big[|S_n - S_m| < \epsilon, T_k = m\Big]\\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq m}\mathbb{P}_0\Big[|S_{m+1}^n| < \epsilon\Big] \times \mathbb{P}[T_k = m]\\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq m}\mathbb{P}_0\Big[|S_{n-m}| < \epsilon\Big] \times \mathbb{P}[T_k = m]\\
&\leq \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[|S_n| < \epsilon].
\end{aligned}$$

Il vient

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[|S_n| < m\epsilon] \leq \sum_{k\in\{-m,\cdots,m-1\}^d}\mathbb{P}\Big[S_n \in k\epsilon + [0,\epsilon[^d\Big] \leq (2m)^d \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[|S_n| < \epsilon].$$

□

Rappelons que la m.a. est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^d$ de noyau de transition $P(x, dy = \delta_x * \mu(dy).$; sous $\mathbb{P}_x$, la loi de S_n est donc $\delta_x * \mu^{*n}$, si bien que pour toute fonction borélienne positive ϕ définie sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_x[\phi(S_n)] = \sum_{n\geq 0} \delta_x * \mu^{*n}(\phi) = G\phi(x),$$

où $G(x,\cdot) := \delta_x * \sum_{n\geq 0} \mu^{*n}$ est le noyau de Green associé à la mesure μ. La démonstration de la Proposition 2.8 permet en fait d'établir le **principe du maximum**, qui stipule que pour tout voisinage V de 0 on a

$$\sup_{x\in V} G(x,V) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} G(x,V).$$

On a aussi la

Proposition 2.9 *Si $(S_n)_n$ est transiente, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la mesure $G(x,\cdot)$ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$ et l'ensemble $\left\{G(x,\cdot)/x \in \mathbb{R}^d\right\}$ est relativement compact pour la topologie vague.*

Démonstration. D'après la Proposition précédente, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant l'origine tel que $A := G(0,\mathcal{O}) < +\infty$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $V - V \subset \mathcal{O}$ (si $\epsilon > 0$ est tel que $B(0,\epsilon) \subset \mathcal{O}$, l'ouvert $V := B(0,\epsilon/2)$ convient) ; si $x \in V$, on a

$$G(x,V) = G(0,-x+V) \leq G(0,V-V) \leq G(0,\mathcal{O}) = A.$$

Cette majoration reste valide lorsque $x \notin V$, d'après le principe du maximum. Tout compact K de $\mathbb{R}^d$ peut être couvert par une famille finie $V_1, ..., V_n$ d'ouverts de la forme $V_i = -x_i + V$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad G(x,K) \leq \sum_{i=1}^{n} G(x,-x_i+V) = \sum_{i=1}^{n} G(x+x_i,V) \leq nA < +\infty,$$

ce qui prouve d'une part que $G(x,\cdot)$ est bien une mesure de Radon et d'autre part que $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} G(x,K) < +\infty$, d'où la propriété de relative compacité annoncée.□

Dans le paragraphe 3, nous préciserons dans le cas des marches aléatoires transientes sur $\mathbb{R}$, le comportement lorsque $x \to \pm\infty$ du noyau de Green $G(x,\cdot)$; l'étude est délicate et nécessite des estimations fines d'intégrales singulières.

Enonçons à présent un critère général permettant de décider si une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ est récurrente ou transiente. Dans l'énoncé qui suit, la fonction $\hat{\mu}$ n'est autre que la fonction caractéristique de μ, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \qquad \hat{\mu}(t) := \mathbb{E}[e^{i\langle t, X_1\rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle}\mu(dx).$$

Nous avons le

Théorème 2.10 *Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une m.a. adaptée sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$ de loi μ ; on note $\hat{\mu}$ sa tranformée de Fourier. La m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ est récurrente si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\int_{B(0,\epsilon)} \mathrm{Re}\,\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\right) dt = +\infty.$$

La démonstration de ce théorème est difficile, nous renvoyons le lecteur au livre de [**?**] où il pourra trouver une démonstration complète ; nous nous contenteron de démontre la version plus faible suivante, qui nous sera amplement suffisante par la suite :

Théorème 2.11 *Sous les hypothèses du théorème 2.10, la m.a.* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est récurrente si et seulement si il existe* $\epsilon > 0$ *tel que*

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \int_{B(0,\epsilon)} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt = +\infty.$$

Remarquons que si un des critères ci-dessus est satisfait pour $\epsilon_0 > 0$ donné, il l'est a fortiori pour tout $\epsilon < \epsilon_0$. Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

Lemme 2.12
1. *Si la m.a.* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est adaptée sur* $\mathbb{R}^d$ *on a* $\hat{\mu}(t) = 1$ *si et seulement si* $t = 0$.
2. *Si la m.a.* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est adaptée sur* $\mathbb{Z}^d$ *on a* $\hat{\mu}(t) = 1$ *si et seulement si* $t \in 2\pi\mathbb{Z}^d$.
3. *Pour tout* $r \in [0,1[$, *la fonction* $t \mapsto \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big)$ *est positive sur* $\mathbb{R}^d$.

Pour toute fonction ϕ intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on note $\hat{\phi}$ sa transformée de Fourier définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad \hat{\phi}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<t,x>}\phi(x)dx.$$

On a le

Lemme 2.13 *Pour tout* $\delta > 0$, *il existe des fonctions* φ_δ *et* ψ_δ *positives et intégrables sur* $\mathbb{R}^d$, *dont les transformées de Fourier sont positives et intégrables, et qui vérifient*
1. $\varphi_\delta \leq 1_{B(0,\delta)} \leq \psi_\delta$
2. *le support de* ψ_δ *est compact et est inclus dans* $[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]^d$.
3. φ_δ *est non identiquement nulle (i.e.* $\hat{\varphi}_\delta(0) > 0$*).*

Remarque. Si G est un groupe localement compact, on appelle **dual de** G l'ensemble $\hat{G}$ des morphismes continus de G dans $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
1. si $G = \mathbb{R}^d$, alors $\widehat{G} = \mathbb{R}^d$ et les caractères sont les fonctions $e_\lambda : x \mapsto e^{i<\lambda,x>}, \lambda \in \mathbb{R}^d$.
2. si $G = \mathbb{Z}^d$, alors $\widehat{G} = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ et les caractères sont les fonctions $e_\lambda : x \mapsto e^{2i\pi<\lambda,x>}, \lambda \in [0,1[^d \simeq \mathbb{T}^d$.

La transformée de Fourier de μ est définie par

$$\hat{\mu}(e_\lambda) = \hat{\mu}(\lambda) := \int e_\lambda(x)\mu(dx)$$

et on a $\hat{\mu}(\lambda) = 1$ si et seulement si $S_\mu \subset \ker e_\lambda = \{x \in G / e_\lambda(x) = 1\}$. L'ensemble $\ker e_\lambda$ est un sous-groupe fermé de G et on a $\ker e_\lambda \neq G$ si et seulement si $e_\lambda \neq id$ (i.e. $\lambda \neq 0$ dans notre cas). Ainsi, quand μ est adaptée, $e_0 = 1$ est le seul caractère de $\widehat{G}$ tel que $\hat{\mu}(e_\lambda) = 1$.

Démonstration du Théorème 2.11. Pour tout $r \in [0,1[$ et tout borélien B de $\mathbb{R}^d$, on pose $G_r(0,B) = \sum_{n\geq 0} r^n\mathbb{E}[1_B(S_n)]$; on a

$$\sum_{n\geq 0} r^n\mathbb{E}[\varphi_\delta(S_n)] \leq G_r(0,B(0,\delta)) \leq \sum_{n\geq 0} r^n\mathbb{E}[\psi_\delta(S_n)].$$

En utilisant la formule inverse de Fourier, il vient

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int \frac{\hat{\varphi}_\delta(t)}{1-r\hat{\mu}(t)}dt \leq G_r(0,B(0,\delta)) \leq \frac{1}{(2\pi)^d}\int \frac{\hat{\psi}_\delta(t)}{1-r\hat{\mu}(t)}dt.$$

Les fonctions $\hat{\varphi}_\delta$ et $\hat{\psi}_\delta$ étant à valeurs réelles, il vient

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int \hat{\varphi}_\delta(t)\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt \leq G_r(0,B(0,\delta)) \leq \frac{1}{(2\pi)^d}\int \hat{\psi}_\delta(t)\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt.$$

Notons K_δ le support de $\hat{\psi}_\delta$; c'est un voisinage compact de 0 et on a

$$G_r(0, B(0,\delta)) \leq \frac{\|\hat{\psi}_\delta\|_\infty}{(2\pi)^d} \int_{K_\delta} \text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) dt.$$

Ainsi, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sup_{r<1} \int_{B(0,\epsilon)} \text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) dt < +\infty$, on aura $G_r(0, B(0,\delta)) < +\infty$ dès que $K_\delta \subset [-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]^d \subset B(0,\epsilon)$, c'est-à-dire dès que δ est assez grand. La m.a. $(S_n)_n$ est alors transiente.

D'autre part, pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a $\hat{\varphi}_\delta(t) \geq \frac{1}{2}\hat{\varphi}_\delta(0)$ dès que $|t| \leq \epsilon$; il vient $G(0, B(0,\epsilon)) = +\infty$ dès que $\sup_{r<1} \int_{B(0,\epsilon)} \text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) dt = +\infty$, et dans ce cas la marche $(S_n)_n$ est récurrente.$\square$

Démonstration du lemme 2.12.

1. On a $\hat{\mu}(t) = \mathbb{E}[e^{i<t,Y_1>}] = 1 \Leftrightarrow < t, Y_1 > \in 2\pi\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe $t \neq 0$ tel que $\hat{\mu}(t) = 1$; on a $< t, Y_1 > \in 2\pi\mathbb{Z}$, i.e. $Y_1 \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} H_{t,k}$ $\mathbb{P}$-presque-sûrement, où $H_{t,k}$ désigne l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^d / < t, x >= 2\pi k\}$. L'ensemble $H := \cup_{k\in\mathbb{Z}} H_{t,k}$ est un sous-groupe propre de $\mathbb{R}^d$, on a $S_\mu \subset H$; d'où $G_\mu \subset H \neq \mathbb{R}^d$, ce qui contredit le fait que μ est adaptée.
2. Si μ est adaptée sur $\mathbb{Z}^d$ et $t \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ alors $\hat{\mu}(t) = 1$. Réciproquement, si $< t, Y_1 > \in 2\pi\mathbb{Z}$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, alors pour tout $x \in G_\mu = \mathbb{Z}^d$ on aura $< t, x > \in 2\pi\mathbb{Z}$ i.e. $< \frac{t}{2\pi}, x > \in \mathbb{Z}$. Si l'une des coordonnées de $\frac{t}{2\pi}$ n'est pas entière, cette propriété n'est plus satisfaite pour un choix judicieux de x. Contradiction.
3. $\text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) = \frac{\text{Re}\,(1-r\hat{\mu}(-t))}{|1-\hat{\mu}(t)|^2)} = \frac{1-r\mathbb{E}[\cos < t, Y_1 >]}{|1-\hat{\mu}(t)|^2)} \geq 0.$ $\square$

Démonstration du lemme 2.13. On rappelle que si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i<t,x>}dx$; de plus, si $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$ alors $\hat{f}_\lambda(t) = \lambda\hat{f}(\lambda t)$. il suffit alors de démontrer le lemme pour $\delta = 1$.

1. <u>En dimension 1.</u> On a

$$(1-|x|)1_{[-1,1]}(x) \leq 1_{[-1,1]}(x) \leq C\Big(\frac{\sin x/2}{x/2}\Big)^2.$$

On pose $\varphi(x) := (1-|x|)1_{[-1,1]}(x)$ et $\psi(x) := \Big(\frac{\sin x/2}{x/2}\Big)^2$; on a $\hat{\varphi}(t) = \Big(\frac{\sin t/2}{t/2}\Big)^2 \geq 0$ (et donc $\hat{\varphi}(t) > 0$) et $\hat{\psi}(t) = 2\pi(1-|t|)1_{[-1,1]}(t)$.

2. <u>En dimension d.</u> On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme $\|x\| = \sup_i |x_i|$. On a

$$\Phi(x) := \prod_{i=1}^d \varphi(x_i) \leq 1_{B(0,1)}(x) = \prod_{i=1}^d 1_{[-1,1]}(x_i) \leq \prod_{i=1}^d \psi(x_i) := \Psi(x).$$

Les fonctions Φ et Ψ vérifient les conditions annoncées. $\square$

Corollaire 2.14 *Si la fonction* $t \mapsto \text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big)$ *n'est pas intégrable au voisinage de* 0 *alors la m.a.* $(S_n)_n$ *est récurrente.*

La réciproque est aussi vraie, mais délicate à établir ; c'est l'objet de l'énoncé du théorème 2.10.

Démonstration. On a $\lim_{r\to 1} \text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) = \text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big)$; par le lemme de Fatou, il vient

$$\forall \epsilon > 0 \quad \liminf_{r\to 1} \int_{B(0,\epsilon)} \text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) dt \geq \int_{B(0,\epsilon)} \text{Re}\,\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big) dt,$$

d'où le résultat en appliquant le Théorème 2.11.□

Applications.

1. En dimension 1, une marche aléatoire admettant des moments d'ordre 1 et centrée est récurrente.

   L'argument se simplifie singulièrement s'il existe des moments d'ordre 2. En effet, dans ce cas on a $\hat{\mu}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}(1+\epsilon(t))$, d'où, pour t assez petit
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\right) = \frac{1}{\sigma^2 t^2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\epsilon(t)}\right) \geq \frac{1}{\sigma^2 t^2}.$$
   Cette dernière fonction n'est pas intégrable au voisinage de 0, la m.a. $(S_n)_n$ est donc récurrente.

   La démonstration est plus délicate quand on suppose seulement l'existence de moments d'ordre 1, nous la détaillons à présent. Nous avons
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}}\right) \geq \frac{1-r}{(\mathrm{Re}\ (1-r\hat{\mu}))^2 + r^2(\mathrm{Im}\ \hat{\mu})^2}$$
   avec $(\mathrm{Re}(1-r\hat{\mu}))^2 = \Big((1-r) + \mathrm{Re}\ r(1-\hat{\mu})\Big)^2 \leq 2(1-r)^2 + 2r^2(\mathrm{Re}\ (1-\hat{\mu}))^2$. Sous les hypothèses $\mathbb{E}[|Y_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_1] = 0$, la fonction $\hat{\mu}$ vérifie $\hat{\mu}(t) = 1 + t\epsilon(t)$, si bien que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|t| < \eta$, on ait
$$|\mathrm{Im}\ \hat{\mu}| \leq \epsilon|t| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Re}\ (1-\hat{\mu})| \leq \epsilon|t|.$$
   Il vient
$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\right)dt &\geq (1-r)\int_{-\eta}^{\eta}\frac{dt}{2(1-r)^2 + 3r^2\epsilon^2 t^2}\\
&\geq \frac{1}{3(1-r)}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{dt}{1+(\frac{r}{1-r}\epsilon t)^2}\\
&\geq \frac{1}{3r}\int_{-\frac{r}{1-r}\eta}^{\frac{r}{1-r}\eta}\frac{du}{1+\epsilon^2u^2} \quad \text{en posant} \quad u = \frac{r}{1-r}t,
\end{aligned}$$
   d'où $\sup_{r<1}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\right)dt \geq \frac{\pi}{3\epsilon}$. Le paramètre ϵ étant arbitraire, on a finalement $\sup_{r<1}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\right)dt = +\infty$, ce qui prouve que la m.a. est récurrente.

   Citons aussi le théorème de Chung-Fuchs qui stipule que si S_n/n converge vers 0 en probabilité, alors $(S_n)_n$ est récurrente.

2. Sur $\mathbb{R}^2$, toute marche aléatoire de carré intégrable et centrée est récurrente ; en effet, on a dans ce cas $\hat{\mu}(t) = 1 - \frac{Q(t)}{2}(1+\epsilon(t))$ où $Q(t) = \mathbb{E}[< Y_1, t >^2]$ est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$. On a, pour $\epsilon > 0$ assez petit
$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\epsilon)}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\right)dt &= \int_{B(0,\epsilon)}\frac{2}{Q(t)}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\epsilon(t)}\right)dt\\
&\geq \int_{B(0,\epsilon)}\frac{dt}{Q(t)}\\
&= \int_0^{\epsilon}\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\theta}{r^2Q(u_\theta)} \text{ avec } u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)\\
&= +\infty
\end{aligned}$$
   d'où le résultat.

3. Pour $d \geq 3$, toute marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ admettant des moments d'ordre 2 est transiente. Il suffit de le démontrer dans le cas centrée évidemment ; pour $r < 1$ et $|t|$ assez petit (afin d'avoir $\mathrm{Re}(1+\epsilon(t)) \geq 1/2$), on a

$$\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) \leq \frac{1}{1-r+r\frac{Q(t)}{2}\mathrm{Re}(1+\epsilon(t))} \leq \frac{4}{rQ(t)}.$$

(on utilise le fait que, pour tout nombre complexe $z = a+ib$ avec $a \leq 1$, on a $\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-z}\Big) = \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} \leq \frac{1}{1-a}$). Le changement de variable en coordonnées polaires $t \mapsto (t/\|t\|, \|t\|)$ donne alors

$$\begin{aligned}
\int_{\|t\|\leq\epsilon} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt &\leq \frac{4}{r}\int_{\|t\|<\epsilon}\frac{dt}{Q(t)} \\
&\leq \frac{4}{r}\int_0^\epsilon\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\frac{\rho^{d-1}d\rho}{\rho^2}\frac{du}{Q(u)} \\
&= \frac{4}{r}\Big(\int_0^\epsilon \rho^{d-3}d\rho\Big)\times\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\frac{du}{Q(u)}\Big) < +\infty.
\end{aligned}$$

2.2 Fluctuations des marches aléatoires sur $\mathbb{R}$

Dans tout ce paragraphe, nous considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\geq 1}$ de loi μ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nous nous intéressons aux fluctuations de la marche aléatoire associée $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad S_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Pour ce faire, nous considérons les *instants de record ascendant et descendant* T_n^+ et $T_n^-, n \geq 0$, définis par récurrence par $T_0^+ = T_0^- = 0$ et, pour $n \geq 1$

$$T_n^+ := \inf\{k > T_{n-1}^+ : S_k > S_{T_{n-1}^+}\} \quad \text{et} \quad T_n^- := \inf\{k > T_{n-1}^+ : S_k < S_{T_{n-1}^+}\}.$$

Ces variables aléatoires sont a priori à valeurs dans $\{1, 2, \cdots\} \cup \{+\infty\}$ et ce sont des temps d'arrêt relativement à la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ associée à la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$.

Sous certaines conditions que nous préciserons par la suite, ces variables sont en fait $\mathbb{P}$-presque sûrement finies ; nous considérons dans ce cas les variables $S_{T_1^+}$ et $S_{T_1^-}$ définies par

$$S_{T_1^+} := \sum_{n=1}^{+\infty} S_n 1_{[T_1^+=n]} \quad \text{et} \quad S_{T_1^-} := \sum_{n=1}^{+\infty} S_n 1_{[T_1^-=n]}.$$

Attention. En toute généralité, nous devrions considérer aussi les temps d'arrêts

$$\inf\{n \geq 1 : S_n \geq 0\} \quad \text{et} \quad \inf\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}$$

correspondant aux temps d'entrée dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$. Afin de simplifier les raisonnements dans ce qui suit, nous supposerons que

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{n\geq 1}[S_n = 0]\Big] = 0,$$

ce qui assure que les temps d'entrée dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ coïncident respectivement avec les temps d'entrée dans $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$. Dans le cas contraire, apparaissent des termes correctifs dans les formules qui suivent, les raisonnements sont essentiellement les mêmes et nous renvoyons le lecteur par exemple au livre de W. Feller ([5]) où le cas général est traité.

À noter que la partie de la marche aléatoire $(S_n)_n$ qui suit l'instant T_1^+ est une réplique de la marche aléatoire, mais cette fois-ci issue non plus de l'origine mais de $S_{T_1^+}$; en particulier, le premier instant de record ascendant de cette nouvelle marche n'est autre que le second instant de record ascendant T_2^+ de la marche $(S_n)_n$.

Pour tout $n \geq 1$, nous posons d'une part $\tau_n^+ := T_n^+ - T_{n-1}^+$ et $A_n := S_{T_n^+} - S_{T_{n-1}^+}$ et d'autre part $\tau_n^- := T_n^- - T_{n-1}^-$ et $D_n := S_{T_n^-} - S_{T_{n-1}^-}$; on a donc $T_n^+ = \tau_1^+ + \cdots + \tau_n^+$ et $S_{T_n^+} = A_1 + \cdots + A_n$, et de façon analogue $T_n^- = \tau_1^- + \cdots + \tau_n^-$ et $S_{T_n^-} = D_1 + \cdots + D_n$.

Pour simplifier les notations, nous poserons par la suite $\tau^+ = \tau_1^+$ et $\tau^- = \tau_1^-$. Nous avons tout d'abord le fait élémentaire suivante

Fait 2.15 *Les suites $(A_n)_{n\geq 1}, (\tau_n^+)_{n\geq 1}, (D_n)_{n\geq 1}$ et $(\tau_n^-)_{n\geq 1}$ sont des suites de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.*

Nous avons alors l'alternative suivante

Proposition 2.16 *La m.a. $(S_n)_{n\geq 1}$ est de l'un des types suivants, qui s'excluent deux à deux :*

1. *$\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] < 1$; dans ce cas, on a $\mathbb{E}[\tau^-] < +\infty$ (et en particulier $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1$) et la m.a. $(S_n)_n$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $-\infty$.*
2. *$\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] < 1$; dans ce cas on a $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ (et en particulier $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$) et la m.a. $(S_n)_n$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $+\infty$.*
3. *$\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$ et $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1$; on a alors $\mathbb{E}[\tau^+] = \mathbb{E}[\tau^-] = +\infty$ et la m.a. $(S_n)_n$ oscille $\mathbb{P}$-presque sûrement entre $-\infty$ et $+\infty$. On dit qu'elle est de* **type oscillant**.

Démonstration. Le raisonnement qui suit repose sur l'identité élémentaire suivante : pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}[S_n > 0, S_n > S_1, \cdots, S_n > S_{n-1}] = \mathbb{P}[S_n > 0, S_{n-1} > 0, \cdots, S_1 > 0].$$

(utiliser le fait que les n-uplets $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(X_n, , \cdots, X_1)$ ont la même loi). Le terme de gauche de cette égalité exprime le fait que n est un instant de record pour la m.a. $(S_n)_n$, il est donc égal à $\mathbb{P}\Big[\cup_{k\geq 1}[T_k^+ = n]\Big]$; celui de droite n'est autre que $\mathbb{P}[\tau^- > n]$. On a donc, en sommant sur $n \geq 1$

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\Big[\cup_{k\geq 1}[T_k^+ = n]\Big] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[\tau^- > n] = \mathbb{E}[\tau^-].$$

Mais on peut écrire aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\Big[\cup_{k\geq 1}[T_k^+ = n]\Big] &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[T_k^+ = n] \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[T_k^+ = n] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[T_k^+ < +\infty] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[\tau_1^+ < +\infty] \times \cdots \times \mathbb{P}[\tau_k^+ < +\infty] \\
&= \frac{1}{1 - \mathbb{P}[\tau_1^+ < +\infty]}.
\end{aligned}$$

On a finalement

$$\frac{1}{1 - \mathbb{P}[\tau^+ < +\infty]} = \mathbb{E}[\tau^-]. \tag{1}$$

De façon duale, on obtient

$$\frac{1}{1 - \mathbb{P}[\tau^- < +\infty]} = \mathbb{E}[\tau^+]. \tag{2}$$

Trois cas sont alors à considérer :

1. Supposons $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] < 1$; on a alors $\mathbb{E}[\tau^-] < +\infty$ et donc $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1$. La m.a. $(S_n)_n$ converge alors $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $-\infty$.
En effet, notons d'abord que pour tout $k \geq 1$, on a $T_k^- < +\infty$ $\mathbb{P}$-presque-sûrement, et que la suite $(S_{T_k^-})_k$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $-\infty$ (d'après la loi des grand nombres appliquée à la m.a. $(D_1 + \cdots D_n)_{n\geq 1}$).
De plus, pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}[T_k^+ < +\infty] = (\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty])^k$ avec $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] < 1$. Par conséquent, on a $\mathbb{P}\Big[\cup_k [T_k^+ = +\infty]\Big] = 1$, ce qui signifie que la variable $\sup_{n\geq 1} S_n$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement finie. On en déduit que la marche $(S_n)_{n\geq 0}$ est transiente ; en effet, une marche récurrente visite i.s. et $\mathbb{P}$-presque sûrement tout compact suffisament grand de $\mathbb{R}$ si bien que $\limsup_n S_n = +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. Ainsi, $(S_n)_{n\geq 0}$ ne visite qu'un nombre fini de fois tout compact de $\mathbb{R}$ et puisque $\sup_{n\geq 1} S_n$ est aussi $\mathbb{P}$-presque sûrement finie, la marche $(S_n)_{n\geq 1}$ ne visite qu'un nombre fini de fois tout intervalle de la forme $[t, +\infty[$. D'où le résultat.
2. Supposons $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] < 1$; dans ce cas on a $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ (et en particulier $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$) et la m.a. $(S_n)_n$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $+\infty$ par un raisonnement analogue au précédent.
3. Supposons enfin $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$ et $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1$; d'après les identités (1) et (2), on a $\mathbb{E}[\tau^+] = \mathbb{E}[\tau^-] = +\infty$, de plus la m.a. $(S_n)_n$ visite $\mathbb{P}$-presque sûrement et infiniment souvent $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$. En remarquant alors, grâce à la loi forte des grands nombres, que les sous-suites $(A_1 + \cdots + A_n)_n$ et $(D_1 + \cdots + D_n)_n$ convergent $\mathbb{P}$-presque sûrement respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$, on voit que $(S_n)_n$ oscille en fait $\mathbb{P}$-presque sûrement entre $-\infty$ et $+\infty$.

□

Remarque. Les marches aléatoires relevant des cas 1 et 2 ci-dessus sont clairement transientes ; par contre, le cas 3 comprend des marches récurrentes mais aussi des marches transientes.

Étudions à présent plus précisément le cas où $\mathbb{E}[|Y_i|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_1] > 0$. Nous avons la

Proposition 2.17 *Si* $\mathbb{E}[|Y_i|] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[Y_1] > 0$*, alors* $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[A_1] < +\infty$ *(en particulier, les variables* τ_n^+ *et* A_n *sont* $\mathbb{P}$*-presque-sûrement finies).*

Démonstration. Sous ces hypothèse, on a $S_n \to +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, et nous sommes dans l'alternative (2) la Proposition 2.16 ; il vient $\mathbb{P}[\tau^+] < +\infty$ et la suite $(A_1 + \cdots A_n)_n$ est alors une sous-suite de $(S_n)_n$. D' après la loi forte des grands nombres on a donc simultanément

$$\frac{S_{T_n^+}}{T_n^+} = \frac{A_1 + \cdots + A_n}{T_n^+} \to \mathbb{E}[Y_1] \quad \text{et} \quad \frac{T_n^+}{n} \to \mathbb{E}[\tau^+] \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Il vient $\dfrac{A_1 + \cdots + A_n}{n} \to \mathbb{E}[Y_1] \times \mathbb{E}[\tau^+]$ $\mathbb{P}$-presque sûrement ; d'après le réciproque de la loi forte des grands nombres, on obtient donc $\mathbb{E}[A_1] < +\infty$, ce qui nous amène alors à la fameuse *formule de Wald* :

$$\mathbb{E}[A_1] = \mathbb{E}[Y_1] \times \mathbb{E}[\tau^+].$$

De façon symétrique, lorsque $\mathbb{E}[|Y_i|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_1] < 0$, on a

$$\mathbb{E}[\tau^-] < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|D_1|] < +\infty.$$

Supposons à présent $\mathbb{E}[Y_i] = 0$. Vérifions d'abord que $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1$; sinon, d'après la Proposition 2.16, on aurait $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ et la formule de Wald ci-dessus donnerait alors $\mathbb{E}[A_1] = 0 \times \mathbb{E}[\tau^+] = 0$, ce qui n'est pas possible. De la même façon, on a $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$. D'où la

Proposition 2.18 *Si* $\mathbb{E}[|Y_i|] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ *(et bien sûr* $\mathbb{P}[Y_1 = 0] \neq 1$*), alors*

$$\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = \mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1.$$

À noter que dans ce dernier cas, on a nécessairement $\mathbb{E}[\tau^+] = \mathbb{E}[\tau^-] = +\infty$ d'après (2) ; par contre, les variables A_1 et D_1 peuvent être d'espérance finie ou infinie, comme nous allons le voir à présent.

2.3 Sur la factorisation de Wiener-Hopf et une application

On utilisera la dans ce paragraphe ce que l'on appelle habituellement la *factorisation de Wiener-Hopf*, qui permet d'estimer la loi de la variable S_{τ^+} en fonction de celle des v.a. X_i . Pour tout $s \in [0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose

$$\chi(s,\lambda) := \mathbb{E}[s^{\tau^+} \exp(i\lambda S_{\tau^+}].$$

Nous avons l'identité suivante, dont la démonstration est délicate (nous renvoyons le lecteur aux livres de W. Feller ([5]) et Spitzer ([13]), où on pourra trouver des arguments variés pour l'obtention de cette formule) :

$$\chi(s,\lambda) = 1 - \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}[e^{i\lambda S_n}, S_n > 0]\Big) \quad \text{(factorisation de Wiener-Hopf)}$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à λ ; en $\lambda = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(s,0) = i\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}[S_n 1_{[S_n>0]}]\Big)\exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\mathbb{P}[S_n > 0]\Big). \tag{3}$$

On a $\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(s,0) \longrightarrow i\mathbb{E}[S_{\tau^+}]$ lorsque $s \to 1$. D'autre part, d'après le théorème central limite, il vient

$$\mathbb{P}[S_n > 0] \to \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathbb{E}[S_n 1_{[S_n>0]}] = \mathbb{E}[\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} 1_{[S_n>0]}] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tag{4}$$

quand $n \to +\infty$. En notant que $\frac{1}{\sqrt{1-s}} = \sum_n a_n s^n$ avec $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ quand $n \to +\infty$, et $\log(1-s) = -\sum_{n\geq 1}\frac{s^n}{n}$, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\mathbb{E}[S_n 1_{[S_n>0]}] \sim \frac{\sigma}{\sqrt{2(1-s)}} \tag{5}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\mathbb{P}[S_n > 0] = -\frac{1}{2}\log(1-s) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n > 0] - \frac{1}{2}\Big),$$

lorsque $s \to 1$. On déduit alors de (3) que

$$\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(s,0) = i\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n > 0] - \frac{1}{2}\Big)\Big)(1+\epsilon(s)),$$

ce qui s'écrit encore $\exp -\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n > 0] - \frac{1}{2}\Big)\Big) = -i\frac{\sqrt{2}}{\sigma}.\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(s,0)(1+\epsilon(s))$; lorsque $s \to 1$, le terme de droite de cette dernière égalité tend vers $\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mathbb{E}[S_{\tau^+}] \in]0,+\infty]$, d'où

$$\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n > 0] - \frac{1}{2}\Big)$$

existe, et appartient à $[-\infty,\infty[$. Le même raisonnement en remplaçant τ^+ par τ^- montre que

$$\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n > 0] - \frac{1}{2}\Big)$$

existe, et appartient à $]-\infty,\infty]$. Finalement $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n > 0] - \frac{1}{2}\Big) = c \in \mathbb{R}$ et l'on a le

Théorème 2.19 *Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et $(S_n)_n$ la marche aléatoire associée. Si $\mathbb{E}[Y_n^2] = \sigma^2 < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_n] = 0$, alors la variable S_{τ^+} est intégrable et l'on a*

$$\mathbb{E}[S_\tau^+] = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \exp(-c),$$

avec $c := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n > 0] - \frac{1}{2}\Big)$.

Remarque 1. *L'utilisation du TCL dans (4) n'est peut être pas immédiate ; on peut utiliser le fait suivant*

Fait. *Soient $(\nu_n)_n$ une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ qui converge étroitement vers ν et ψ une fonction positive qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ telle que $\sup_n \mu_n(\psi) < +\infty$; alors, pour toute fonction borélienne ϕ dont l'ensemble des points de discontinuités est ν-négligeable, et telle que $\phi/\psi \to 0$ en $\pm\infty$, on a $\nu_n(\phi) \to \nu(\phi)$.*
On applique ce fait en prenant pour ν_n la loi de $S_n/\sigma\sqrt{n}$, pour ν la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et $\psi(x) = x^2$.

Remarque 2. *Pour obtenir les équivalents (5), on utilise le fait élémentaire suivant, qui est le "sens" facile d'un théorème taubérien général dont on trouvera un énoncé et sa démonstration dans le livre de W. Feller :*

Fait. *Soient $\sum_n a_n s^n$ et $\sum_n b_n s^n$ des séries entières à coefficients positifs et de rayon de convergence 1. Si $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, on a*

$$\lim_{s\to 1} \frac{\sum_{n\geq 0} a_n s^n}{\sum_{n\geq 0} b_n s^n} = 1.$$

Nous terminons ce paragraphe en citant un résultat classique, dont la démonstration utilise la factorisation de Wienner Hopf, et dont on trouvera une démonstration par exemple dans le livre de Spitzer [13], ou encore l'article de Lepage-Peigné [7].

Proposition 2.20 *Soit $(S_n)_n$ une m. a. admettant des moments d'ordre 2 et centrée. Alors, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathbb{P}[\tau^+ > n] = \frac{e^{c'}}{\sqrt{\pi}},$$

avec $c' := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}[S_n \leq 0] - 1/2}{n} \in \mathbb{R}$.

2.4 Théorie du renouvellement sur $\mathbb{R}$

Le nom de la "théorie du renouvellement" vient du problème classique suivant. On considère que la durée de vie d'une ampoule peut être modélisée par une variable aléatoire positive de loi μ d'espérance finie m et l'on s'intéresse au nombre moyen $N(T)$ d'ampoules nécessaires durant un intervalle de temps de longueur T. On suppose dans un premier temps que les durées de vie $X_1, X_2, \cdots$ des ampoules successives sont des variables aléatoires indépendantes et de loi μ. Lorsque $T \to +\infty$ les fluctuations aléatoires s'estompent, et l'on s'attend à ce que $N(T)$ soit équivalent à T/m ; c'est en substance l'énoncé du théorème du renouvellement sur $\mathbb{R}^+$.
Cet énoncé reste valable lorsque les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots$ ne sont pas forcément positives mais admettent un moment d'ordre 1 et une espérance strictement positive.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifiant la condition suivante $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $m = \mathbb{E}[X_1] > 0$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$. On note G_μ le groupe engendré par le support de μ ; c'est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{R}$ sur lequel "vie" la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$. Le nombre moyen $N(T)$ de termes de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ dans l'intervalle $[0, T]$ peut s'exprimer de la façon suivante

$$N(T) = \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[0,T]}(S_n)].$$

Pour tout $\alpha > 0$, nous notons l_α la mesure uniforme qui donne la masse α à chaque point du réseau $\alpha\mathbb{Z}$ et l_0 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Nous avons le

Théorème 2.21 *Si $G_\mu = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$ alors $N(T) \sim T/\alpha m$ lorsque $T \to +\infty$. Sinon G_μ est dense dans $\mathbb{R}$ et l'on a $N(T) \sim T/m$.*

Pour établir ce résultat, on s'intéresse au comportement lorsque $a \to +\infty$ de la quantité

$$\mathbb{E}[N(a+I)] = E[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{a+I}(S_n)]$$

pour tout intervalle I borné. Remarquons que l'application qui à tout borélien $B \subset \mathbb{R}$ associe le réel

$$G_a(B) = E[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{a+B}(S_n)] = E[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_B(-a+S_n)]$$

est une mesure à valeurs dans $[0,+\infty]$. Comme $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[X_1] > 0$, la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ est transiente et $G_a(.)$ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$; on redémontrera cette propriété au cours de la démonstration du théorème du renouvellement). Le théorème 2.21 est une conséquence directe du résultat suivant

Théorème 2.22 *Sous l'hypothèse $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[X_1] = m > 0$, la famille de mesure $(G_a(.))_{a\in\mathbb{R}}$ converge vaguement vers la mesure nulle lorsque a tend vers $-\infty$; lorsque $a \to +\infty$ on a*
- *si $G_\mu = \alpha\mathbb{Z}$ alors $G_a(.)$ converge vaguement vers l_α/m*
- *si G_μ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $G_a(.)$ converge vaguement vers l_0/m.*

Nous allons démontrer ce théorème sous l'hypothèse un peu plus forte

$$\mathbb{E}[|X_1|^{1+\delta}] < +\infty$$

pour un certain $\delta \in]0,1[$. Nous renvoyons le lecteur au livre de L. Breiman pour le cas où seule la condition de moment d'ordre 1 est satisfaite ; la démonstration que nous donnons est plus simple et illustre bien le phénomène d'identité approché sous-jacent. Nous supposerons dans un premier temps $G_\mu = \mathbb{R}$, le cas arithmétique est traité en fin de paragraphe.
Rappelons qu'une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ converge vaguement vers μ si pour toute fonction φ continue et à support compact sur $\mathbb{R}$ la suite $(\mu_n(\varphi))_{n\geq 1}$ converge vers $\mu(\varphi)$.
Au lieu de travailler avec des fonctions à support compact nous allons utiliser une classe de fonctions plus adaptée à notre problème. Il suffira d'établir le théorème précédent pour cette classe de fonctions en vertu du lemme suivant
Lemme 1- *Soit $\mathcal{H}$ une classe de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ contenant un élément strictement positif h_0 et stable sous l'action du produit par les exponentielles $x \mapsto e^{itx}$ pour tout réel t. Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$ pour laquelle les fonctions de $\mathcal{H}$ sont μ-intégrables.*
Si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est une suite de mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}$ telle que $(\mu_n(h))_{n\geq 1}$ converge vers $\mu(h)$ pour toute fonction $h \in \mathcal{H}$, alors $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers μ.
Démontrons ce lemme. Notons ν et $\nu_n, n \geq 1$, les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ définies par

$$\nu_n(B) = \frac{1}{\mu(h_0)}\int_B h_0(x)\mu(dx) \quad \text{et} \quad \nu_n(B) = \frac{1}{\mu_n(h_0)}\int_B h_0(x)\mu_n(dx)$$

pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{itx}h_0(x)$ appartient à $\mathcal{H}$ et donc $(\nu_n(e^{itx}))_{n\geq 1}$ converge vers $(\nu(e^{itx}))_{n\geq 1}$; en d'autres termes, $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement vers ν. En écrivant $\mu_n(\varphi) = \mu_n(h_0)\nu_n(\frac{\varphi}{h_0})$ pour toute fonction φ continue et à support compact sur $\mathbb{R}$, on montre que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers μ.$\Box$

La classe $\mathcal{H}$ que nous considérons ici est celle des fonctions h de la forme $x \mapsto h_0(x)e^{itx}$ où h_0 est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h_0(x) = x \mapsto \frac{sin^2(x) + sin^2(\alpha x)}{x^2} \quad \text{avec } \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

Puisque α est irrationnel, cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$; sa transformée de Fourier est la fonction à support compact $t \to \frac{\pi}{2}(2-|t|)1_{[-2,2]}(t) + \frac{\pi}{2}(2\alpha - |t|)1_{[-2\alpha,2\alpha]}(t)$.

Fixons $h \in \mathcal{H}$ et considérons la quantité $\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{+\infty} h(-a+S_n)]$; dans un premier temps, il faut s'assurer que la variable aléatoire $|\sum_{n=0}^{+\infty} h(-a+S_n)|$ est d'espérance finie, il suffit en fait de le faire pour $h = h_0$ et ceci sera établi au cours de la démonstration. A cet effet, mais aussi pour des raisons techniques d'intervertions de signe $\int$ et $\sum$, nous sommes amenés à considérer les quantités $\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a+S_n)]$ où $0 < r < 1$. En utilisant la formule d'inversion de Fourier on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a+S_n)] &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(t) e^{-ita} \hat{\mu}(t)^n dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} e^{-ita} dt.
\end{aligned}$$

Il nous faut dans un premier temps étudier le comportement lorsque $r \to 1$ de cette intégrale. Le choix de l'ensemble $\mathcal{H}$ va nous permettre de contrôler le terme $\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)}$ lorsque t n'appartient pas à un voisinage de l'origine.

Lemme 2 - *Si $G_\mu = \mathbb{R}$ alors $\hat{\mu}(t) = 1$ si et seulement si $t = 0$. Si $G_\mu = \alpha\mathbb{Z}$ alors $\hat{\mu}(t) = 1$ si et seulement si $t \in \frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$.*

Démonstration- On a $\hat{\mu}(t) = 1$ si et seulement si $tX_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ $\mathbb{P} - p.s.$ Lorsque $G_\mu = \mathbb{R}$ ceci entraîne $t = 0$, sinon $G_\mu = \alpha\mathbb{Z} \subset \frac{2\pi}{t}\mathbb{Z}$ d'où $t \in \frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$.$\square$

Le comportement au voisinage de 0 de $t \mapsto \hat{\mu}(t)$ dépend de l'existence de moments pour μ. Du fait que pour tout $\delta \in]0,1]$ la fonction $u \mapsto \frac{e^{iu} - 1 - iu}{|u|^{1+\delta}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ on déduit le

Lemme 3- *Sous l'hypothèse $\mathbb{E}[|X_1|^{1+\delta}] < +\infty$ pour un $\delta \in]0,1[$ on a*

$$\hat{\mu}(t) = 1 + i\mathbb{E}[X_1]t + |t|^{1+\delta}O(t)$$

où $O(t)$ est bornée au voisinage de 0.

Pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons décomposer l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} e^{-ita} dt$ en

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \frac{\hat{h}(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} e^{-ita} dt \quad &+ \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Big(\frac{\hat{h}(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} - \frac{\hat{h}(0)}{1 - r(1 + imt)} \Big) e^{-ita} dt \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\hat{h}(0)}{1 - r(1 + imt)} e^{-ita} dt
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3 il existe des constantes strictement positives ϵ et C telles que pour tout $r \in [1/2, 1[$ et $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ on ait

$$|1 - r\hat{\mu}(t)| \geq |t|/C \quad \text{et} \quad |\hat{\mu}(t) - 1 - imt| \leq C|t|^{1+\delta}.$$

Quitte à modifier C on peut supposer que pour tout $r \in [1/2, 1[$ et $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ on a aussi

$$|1 - r(1 + imt)| \geq |t|/C.$$

En utilisant le fait que $\hat{h}$ est Lipschitz continue, on déduit de ces estimations que la fonction $t \mapsto \dfrac{\hat{h}(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} - \dfrac{\hat{h}(0)}{1 - r(1 + imt)}$ est majorée à une constante multiplicative près par $1/|t|^{1-\delta}$ sur $[-\epsilon, \epsilon]$ uniformément par rapport à $r \in [1/2, 1[$. Par ailleurs, comme $G_\mu = \mathbb{R}$, la fonction $\hat{\mu}$ est de module < 1 sur tout compact ne contenant pas 0 ; ainsi ; $t \mapsto \dfrac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)}$ est bornée sur $[-\epsilon, \epsilon]^c$, uniformément par rapport à $r \in [1/2, 1[$. En utilisant le théorème de convergence dominée on a alors

$$\lim_{r \to 1} \int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \frac{\hat{h}(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} e^{-ita} dt = \int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \frac{\hat{h}(t)}{1 - \hat{\mu}(t)} e^{-ita} dt$$

et

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Big(\frac{\hat{h}(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} - \frac{\hat{h}(0)}{1 - r(1 + imt)} \Big) e^{-ita} dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Big(\frac{\hat{h}(t)}{1 - \hat{\mu}(t)} + \frac{\hat{h}(0)}{imt} \Big) e^{-ita} dt$$

les fonctions $t \mapsto \dfrac{\hat{h}(t)}{1 - \hat{\mu}(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{\hat{h}(t)}{1 - \hat{\mu}(t)} + \dfrac{\hat{h}(0)}{imt}$ étant intégrables respectivement sur $[-\epsilon, \epsilon]c$ et $[-\epsilon, \epsilon]$. Lorsque $a \to \pm\infty$, ces intégrales tendent vers 0 d'après le lemme de Riemann-Lebesgue.

Décomposons maintenant le terme résiduel $I(r, a) = \dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi} \displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{1 - r(1 + imt)} e^{-ita} dt$ en $I_1(r)+ I_2(r, a) + I_3(r, a)$ avec

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \frac{\hat{h}(0)}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{1 - r(1 + imt)} dt \\ I_2(r, a) &= \frac{\hat{h}(0)}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\cos(ta) - 1}{1 - r(1 + imt)} dt \\ \text{et} \quad I_3(r, a) &= \frac{\hat{h}(0)}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{i \sin(ta)}{1 - r(1 + imt)} dt. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \frac{\hat{h}(0)}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1 - r}{(1 - r)^2 + m^2t^2} dt + im\frac{\hat{h}(0)}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{t}{(1 - r)^2 + m^2t^2} dt \\ &= \frac{\hat{h}(0)}{rm\pi} \arctan\Big(\frac{mr\epsilon}{1 - r} \Big) \end{aligned}$$

l'intégrale $\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{t}{(1 - r)^2 + m^2t^2} dt$ étant nulle puisque l'intégrande est impaire. Ainsi $\lim_{r \to 1} I_1(r) = \dfrac{\hat{h}(0)}{2m}$.

Par ailleurs $\lim_{r \to 1} I_2(r, a) = \dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi} \displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\cos(ta) - 1}{imt} dt = \frac{\hat{h}(0)}{2\pi} \int_{-\epsilon a}^{\epsilon a} \frac{\cos(u) - 1}{iu} du$; cette dernière intégrale est nulle car l'intégrande $u \mapsto \dfrac{\cos(u) - 1}{u}$ est impaire.

Enfin $I_3(r, a)$ converge lorsque $r \to 1$ vers $\dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi m} \displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\sin(ta)}{t} dt$; cette dernière intégrale tend vers $\dfrac{\hat{h}(0)}{2m}$ lorsque $a \to +\infty$ et vers $-\dfrac{\hat{h}(0)}{2m}$ lorsque $a \to -\infty$.

En conclusion, on a

$$\lim_{a \to +\infty} \lim_{r \to 1} \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a + S_n) \Big] = \frac{\hat{h}(0)}{m} \quad \text{et} \quad \lim_{a \to -\infty} \lim_{r \to 1} \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a + S_n) \Big] = 0.$$

Considérons maintenant le cas où μ est arithmétique c'est-à-dire $G_\mu = \alpha\mathbb{Z}$. La fonction $\hat{\mu}$ est alors $\dfrac{2\pi}{\alpha}$−périodique. En posant $H(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{h}(t + k\dfrac{2\pi}{\alpha})$ on obtient

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a + S_n)\Big] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{H(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} e^{-ita} dt$$

et la fonction $|1-\hat{\mu}|$ est strictement positive sur $[-\pi/\alpha, \pi/\alpha] - \{0\}$. En reprenant la démarche précédente on obtient de la même façon

$$\lim_{a\to+\infty}\lim_{r\to 1} \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a + S_n)\Big] = \frac{H(0)}{m} \quad \text{et} \quad \lim_{a\to-\infty}\lim_{r\to 1} \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a + S_n)\Big] = 0.$$

La fonction H est $2\pi/\alpha$-périodique de coefficients de Fourier $c_k = \alpha h(-k\alpha)$; il vient

$$H(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k = \alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k\alpha) = \int_{\mathbb{R}} h(x) l_\alpha(dx).$$

3 Itérations de transformations aléatoires : sur la récurrence positive

Dans tout ce paragraphe, nous considérons une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ de v.a.i.i.d. de loi μ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ou sur une partie de $\mathbb{R}$; nous nous intéressons alors au comportement des suites $L_n := h_n \circ \cdots \circ h_1$ (produits à gauche) et $R_n := h_1 \circ \cdots \circ h_n$ (produits à droite), obtenues à partir de $(h_n)_{n\geq 1}$. Nous considérons alors la suite $(X_n)_n$ définie par récurrence par

$$\forall n \geq 0 \quad X_{n+1} = h_{n+1}(X_n).$$

On a alors $X_n = L_n(X_0)$; pour simplifier les notations, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on écrit $X_n^x := L_n(x)$. La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$ dont la probabilité de transition $P(x, B)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout borélien B est donnée par

$$P(x, B) = \mathbb{E}[1_B(g_1 \cdot x)] = \int 1_B(g \cdot x)\mu(dg).$$

Du fait de la non commutativité de la composition des fonctions, le comportement des suites $(L_n)_n$ et $(R_n)_n$ peut être très différent ; en effet

1. l'image de R_{n+1} est inclue dans celle de R_n, si bien que l'on peut espérer, sous des conditions raisonnables, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(R_n(x))_n$ converge presque sûrement lorsque $n \to +\infty$. Ceci peut être illustré par l'existence d'une martingale, appelée la *martingale de Furstenberg* qui sous certaines hypothèses converge, prenant en compte ainsi cette propriété d'emboîtement des images.
2. l'image de L_{n+1} est inclue dans celle de h_{n+1}, qui elle, peut être modifiée de façon drastique avec n ; nous illustrerons cette remarque en se concentrant sur les propriétés de récurrence des suites $(L_n \cdot x)_n$.

De tels processus dont les transitions sont gouvernées par des transformations de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sont appelés *systèmes d'itérations de fonctions aléatoires*.

Dans un premier temps nous énonçons un critère général qui assure la récurrence positive de la chaîne de Markov $(L_n \cdot x)_n$. Nous l'appliquerons ensuite dans un certain nombre de situations :

1. les fonctions h_n sont de la forme $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \max(0, x - a)$ où a est un paramètre réel ; la suite $(L_n(x))_n$ est appelée dans ce cas *marche aléatoire sur* $\mathbb{R}^+$ *avec absorption en* 0.

2. les fonctions h_n sont de la forme $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto |x-a|$ où a est un paramètre réel ; la suite $(L_n(x))_n$ est appelée dans ce cas *marche aléatoire sur* $\mathbb{R}^+$ *avec réflexion en* 0.
3. les fonctions h_n sont enfin de la forme $x \mapsto ax+b$, avec $a \in \mathbb{R}^*+$ et $b \in \mathbb{R}$; les suites $(L_n)_n$ et $(R_n)_n$ sont dans ce cas des *marches aléatoires*, respectivement à gauche et à droite, sur le groupe affine de la droite réelle.

3.1 La martingale de Furstenberg

La propriété suivante, mise en lumière par H. Furstenberg dans ses travaux sur les produits de matrices aléatoires et de leurs actions projectives, est un outil essentiel dans l'étude des systèmes d'itérations de transformations aléatoires ; nous n'en ferons pas usage par la suite, mais il est important d'en donner un énoncé dès à présent, car il illustre bien la propriété "d'emboitement des images " de la suite $(R_n)_n$.

Théorème 3.1 *Soit $(h_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $L_n := h_n \cdots h_1$ et $R_n := h_1 \cdots h_n$ et l'on considère la chaîne de Markov $X_n := L_n(X_0)$.*

On suppose qu'il existe sur $\mathbb{R}$ une mesure de probabilité invariante ν pour la chaîne de Markov $(X_n)_n$.

Alors, pour toute fonction borélienne bornéee sur $\mathbb{R}$, la suite $(R_n\nu(\phi))_{n\geq 1}$ est une martingale bornée, donc convergente.

La démonstration est immédiate, en utilisant le fait que ν est P-invariante.

3.2 Un critère général

Dans ce paragraphe, nous démontrons le

Théorème 3.2 *Soit $(h_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $L_n := h_n \cdots h_1$ et $X_n := L_n(X_0)$. On suppose que*

1. *pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} L_n \cdot x - L_n \cdot y = 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.*
2. *il existe sur $\mathbb{R}$ une mesure de probabilité invariante ν pour la chaîne de Markov $(X_n)_n$.*

*Alors, la mesure ν est l'unique mesure de probabilité invariante pour la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$, et celle-ci est ν-**récurrente positive**, c'est-à-dire vérifie la propriété suivante :*

pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$ tel que $\nu(B) > 0$, le temps d'arrêt $T_B := \inf\{n \geq 1 : X_n \in B\}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement fini et satisfait l'égalité

$$\mathbb{E}_{\nu_B}[T_B] = \frac{1}{\nu(B)},$$

où ν_B désigne la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par $\nu_B(\cdot) = \dfrac{\nu(\cdot \cap B)}{\nu(B)}$.

Avant d'établir ce théorème, nous dégageons la définition suivante

Définition 3.3 *Une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite* **proximale** *lorsque, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n \cdot x - F_n \cdot y = 0.$$

L'hypothèse 1 du Théorème 3.2 signifie donc que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $(L_n(\omega))_{n\geq 1}$ est proximale sur $\mathbb{R}$.

Démonstration du Théorème 3.2. On suppose qu'il existe une autre mesure de probabilité ν' invariante pour la chaîne $(X_n)_n$. Pour toute fonction lipschitzienne bornée $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a, en utilisant l'invariance des mesures ν et ν' et le fait que ce sont des mesures de probabilités :

$$\begin{aligned} |\nu(\phi) - \nu'(\phi)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\phi(L_n \cdot x)]\nu(dx) - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\phi(L_n \cdot y)]\nu'(dy) \Big| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big[\Big| \phi(L_n \cdot x) - \phi(L_n \cdot y) \Big| \Big] \nu(dx)\nu'(dy). \end{aligned}$$

Or $\Big|\phi(L_n \cdot x) - \phi(L_n \cdot y)\Big| \leq m(\phi) \times |L_n \cdot x - L_n \cdot y| \to 0, \mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $n \to +\infty$, si bien que, grâce au théorème de convergence dominée, $\nu(\phi) = \nu'(\phi)$. Ainsi, la mesure ν est bien l'unique mesure de probabilité invariante pour la chaîne $(X_n)_{n \geq 1}$.
Pour établir la dernière assertion du théorème, on utilise la formule de Kacs. Rappelons d'abord que

$$\Big(\Omega = \mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}, \mathcal{B}\Big(\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}\Big), (X_n)_{n \geq 0},\ \theta, \Big(\mathbb{P}_x\Big)_{x \in \mathbb{R}}\Big)$$

désigne la chaîne de Markov canonique associée à la suite $(L_n \cdot x)_{n \geq 0}$, et que, pour toute mesure de probabilité m sur $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_m$ la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{B}\Big(\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}\Big) \quad \mathbb{P}_m(B) := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_x(B) m(dx).$$

Si B est un borélien de $\mathbb{R}$ tel que $m(B) > 0$, on note m_B la mesure de probabilité sur B induite par m et définie par $m_B(\cdot) = \dfrac{m(\cdot \cap B)}{m(B)}$.

D'après la formule de Kacs ([11]), il nous suffit de montrer que la mesure de probabilité $\mathbb{P}_\nu$ est ergodique ; en effet, pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$ tel que $\nu(B) > 0$, on a $\mathbb{P}_\nu[X_0 = B] = \nu(B) > 0$, la dernière assertion du théorème découlera alors directement de la formule de Kacs puisque T_B est aussi le temps de premier retour $T_{[X_0 \in B]}$ dans le cylindre $[X_0 \in B]$ de la transformation de décalage θ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour établir l'ergodicité de $\mathbb{P}_\nu$, il nous faut montrer que pour toute fonction $\Phi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}, \mathbb{P}_\nu)$, on a, pour $\mathbb{P}_\nu$-presque tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\theta^k(\mathbf{x})) = \int_{\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}} \Phi(\mathbf{x}) \mathbb{P}_\nu(d\mathbf{x}).$$

Par un argument classique en théorie de la mesure, il suffit de le faire pour une fonction borélienne bornée Φ qui ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées, c'est-à-dire une fonction réelle borélienne bornée sur $\mathbb{R}^d, d \geq 1$; sans perdre en généralité, on peut même supposer que Φ est continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$, ce que nous ferons par la suite.

Soit $\mathcal{I}$ la tribu des des boréliens de $\mathbb{R}^{\otimes \mathbb{N}}$, invariants sous l'action du décalage ; d'après le théorème ergodique de Birkhoff, on a, $d\nu(x) \times d\mathbb{P}(\omega)$-presque sûrement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(L_k(\omega)x, \cdots, L_{k+d-1}(\omega)(x)) = \mathbb{E}_\nu[\Phi(X_0, \cdots, X_{d-1})/\mathcal{I}](\omega).$$

Puisque pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $L_n \cdot x - L_n \cdot y \to 0 \quad \mathbb{P}-$-presque sûrement, on peut en fait écrire : il existe $\Omega_0 \subset \Omega, \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega_0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(x, L_1(\omega)x, \cdots, L_{d-1}(\omega)(x)) = \mathbb{E}_\nu[\Phi(X_0, \cdots, X_{d-1})/\mathcal{I}](\omega).$$

Or, pour tout entier l fixé et tout $k \geq l+1$, on a $L_k = h_k \circ \cdots \circ h_{l+1} \circ L_l$, si bien que, pour $\omega \in \Omega_0$, il vient

$$\mathbb{E}_\nu[\Phi(X_0, \cdots, X_{d-1})/\mathcal{I}](\omega) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=l+1}^{n-1} \Phi(h_k \cdots h_{l+1}(\omega)x, \cdots, h_{k+d-1} \cdots h_{l+d}(\omega)x).$$

Ainsi, la variable aléatoire limite $\mathbb{E}_\nu[\Phi(X_0, \cdots, X_{d-1})/\mathcal{I}](\cdot)$ est mesurable par rapport à la tribu asymptotique associée à la suite $(h_n)_{n\geq 1}$; par la loi du $0-1$ de Kolmogorov elle est donc constante, ce qui prouve que la tribu $\mathcal{I}$ est égale $\mathbb{P}_\nu$-presque sûrement à $\{\emptyset, \Omega)$. La mesure $\mathbb{P}_\nu$ est ergodique et le théorème s'en déduit.□

3.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ avec absorption en 0

On considère dans ce paragraphe la marche aléatoire $(X_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec absorption en l'origine. Pour ce faire, on introduit une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ, on considère une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \geq 0$ on pose

$$X_{n+1} = \max(X_n - Y_{n+1}, 0).$$

Si $X_0 = x$, on note $X_n = X_n^x$. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^+$, dont la probabilité de transition $P(x, B)$, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $B \subset \mathbb{R}^+$ borélien quelconque est donnée par

$$P(x, B) = \mathbb{E}[1_B(\max(x - Y_1, 0)] = \int_{\mathbb{R}} 1_B(\max(x - y, 0))\mu(dy).$$

Les transitions de cette chaîne sont bien gouvernées par une suite de fonctions aléatoires continues ; en effet, si pour tout réel a, on note f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_a(x) := \max(x - a, 0), \tag{6}$$

on peut écrire

$$X_n^x = f_{Y_n} \circ f_{Y_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{Y_1}(x)$$

Comme dans les paragraphes précédents, on pose $L_n := f_{Y_n} \circ \cdots \circ f_{Y_1}$ et $R_n := f_{Y_1} \circ \cdots \circ f_{Y_n}$. Quelques remarques simples s'imposent ici :

1. chaque fonction f_a satisfait la propriété de contraction "faible" suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f_a(x) - f_a(y)| \leq |x - y|, \tag{7}$$

   qui entraîne directement que la suite $(|X_n^x - X_n^y|)_n$ est décroissante.
2. soient $x \leq y$ deux réels positifs quelconques. On considère alors une suite de réels $a_1, \cdots, a_n$ et on suppose qu'il existe un entier $k \leq n$ tel que $a_1 + \cdots + a_k \geq y$; on note k le plus petit entier vérifiant cette propriété. On a alors $f_{a_l} \circ \cdots \circ f_{a_1}(x) = f_{a_l} \circ \cdots \circ f_{a_1}(y)$, pour tout $k \leq l \leq n$. Ainsi la propriété de contraction ci-dessus n'est pas si "faible" que cela puisque, dans certains cas, les trajectoires coïncident à partir d'un certain moment.
3. si μ est discrète, on retrouve une chaîne de Markov à espaces d'états dénombrables. Ce n'est pas ce cas là qui nous intéresse dans ce qui suit, **nous supposerons dorénavant** que le groupe engendré par le support de μ est dense dans $\mathbb{R}$.

Motivation. *On considère une file d'attente et on note $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ les inter-arrivées entre les clients successifs ; les dates d'arrivée des clients successifs sont donc $0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \ldots$; on note $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$ les temps de service des différents clients. On suppose que $(\mathcal{A}_n)_n$ et $(\mathcal{B}_n)_n$ sont des suites de v.a.i.i.d et qu'elles sont indépendantes entre elles. On pose $W_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, on note W_n le temps d'attente du client n. Si ce client arrive à l'instant t, il sera servi à partir de l'instant $t + W_n$ et repartira à l'instant $t + W_n + \mathcal{S}_n$. Le client $n+1$ arrive à l'instant $t + \mathcal{A}_{n+1}$ et son temps d'attente W_{n+1} dans la file est*

- nul si $\mathcal{A}_{n+1} \geq W_n + \mathcal{S}_n$

- et égal à $W_n + \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_{n+1}$ dans le cas contraire.

En d'autres termes, en posant $Y_{n+1} := \mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{S}_n$, on a

$$W_{n+1} := \max(W_n - Y_{n+1}, 0).$$

Lorsque les variables aléatoires Y_i sont positives, la suite $(x - (Y_1 + \cdots + Y_n))_n$ est décroissante, et tend $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $-\infty$; elle est donc négative à partir d'un certain rang, d'où $W_n = 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement à partir d'un certain rang. Ce cas n'est donc pas intéressant à étudier. On affaiblit alors l'hypothèse $Y_i \geq 0$ en $\mathbb{E}[Y_i] > 0$; nous avons le

Théorème 3.4 *Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que μ posséde un moment d'ordre 1 et que $\mathbb{E}(Y_i) > 0$.*

On note $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ avec absorption en 0, associée à la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$; pour tout $n \geq 1$ on a $X_n = L_n(X_0)$ où $L_n = f_{Y_n} \circ \cdots \circ f_{Y_1}(X_0)$ et $f_a, a \in \mathbb{R}$ est définie par la formule (6). Alors

1. *pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $X_n^x - X_n^y = 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, à partir d'un certain rang.*
2. *il existe sur $\mathbb{R}^+$ une unique mesure de probabilité invariante ν pour la chaîne $(X_n)_n$, et la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est ν-récurrente positive.*

Démonstration. Il nous suffit de montrer qu'il existe sur $\mathbb{R}^+$ une mesure invariante pour la chaîne $(X_n)_n$. Pour ce faire, on introduit la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ des temps de records successifs de la m.a. $(S_n := Y_1 + \cdots + Y_n)_n$; sous l'hypothèse du Théorème, on a $\mathbb{P}[T_n < +\infty]$ et même $\mathbb{E}[T_n] < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$X_{T_n} = f_{S_{T_n} - S_{T_{n-1}}} \circ \cdots \circ f_{S_{T_2} - S_{T_1}} \circ f_{S_{T_1}}(X_0).$$

Les variables $(S_{T_n - T_{n-1}})_{n\geq 1}$ sont indépendantes de même loi et sont positives ; ainsi, à partir d'un certain rang (aléatoire), la suite X_{T_n} est identiquement nulle et admet donc la masse de Dirac en 0 comme mesure de probabilité invariante. Par une technique classique dite de *balayage*, on montre que la mesure ν définie par

$$\nu(B) := \mathbb{E}_0\Big[\sum_{k=0}^{T_1 - 1} 1_B(X_k)\Big]$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}^+$, est invariante pour la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$; en effet, de façon générale, si ν' était une mesure de probabilité invariante pour la chaîne $(X_{T_n})_{n\geq 1}$, la mesure $\bar{\nu}'$ définie par

$$\bar{\nu}'(B) := \mathbb{E}_{\nu'}\Big[\sum_{k=0}^{T_1 - 1} 1_B(X_k)\Big],$$

serait invariante pour la chaîne $(X_n)_n$, ce qui se vérifie de façon élémentaire comme suit

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}'P(B) &= \mathbb{E}_{\bar{\nu}'}\Big[1_B(X_1)\Big] \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{E}_x[1_B(X_1)]\bar{\nu}'(dx) \\
&= \mathbb{E}_{\nu'}\Big[\sum_{k=0}^{T_1 - 1} \mathbb{E}_{X_k}[1_B(X_1)]\Big] \\
&= \mathbb{E}_{\nu'}\Big[\sum_{k=0}^{T_1 - 1} 1_B(X_{k+1})\Big] \\
&= \mathbb{E}_{\nu'}\Big[\sum_{k=1}^{T_1} 1_B(X_{k+1})\Big] \\
&= \nu(B) - \mathbb{E}_{\nu'}[1_B(X_0)] + \mathbb{E}_{\nu'}[1_B(X_{T_1})] \\
&= \nu(B).
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que ν' est invariante pour la chaîne $(X_{T_n})_n$.

Attention. Dans la technique de balayage décrite ici, on ne sait pas en général si la mesure $\bar{\nu}'$ ainsi construite est une mesure de Radon. Dans l'exemple qui nous intéresse ici, on a

$\nu' = \delta_0$ et $\bar{\nu}' = \nu$ est finie (puisque T_1 est d'espérance finie), ce qui nous a permis de conclure ; lorsque ce n'est plus le cas il peut s'avérer difficile de décider si oui ou non c'est une mesure de Radon.

Pour montrer que ν est l'unique mesure de probabilité invariante, il nous suffit d'après le Théorème 3.2 de vérifier que la suite $(f_{Y_n} \circ \cdots \circ f_{Y_1})_{n \geq 1}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement proximale ; ceci découle directement du fait que $Y_1 + \cdots + Y_n \to +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $n \to +\infty$ et de la remarque 2 de la page précédente. $\square$

3.4 Marche aléatoire réfléchie sur $\mathbb{R}^+$

On considère dans ce paragraphe la marche aléatoire $(X_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec réflexions en l'origine. Pour ce faire, on introduit une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ, on considère une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \geq 0$ on pose

$$X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|.$$

Si $X_0 = x$, on pose $X_n = X_n^x$. La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^+$, dont la probabilité de transition $P(x, B)$, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et B borélien quelconque de $\mathbb{R}^+$ est donnée par

$$P(x, B) = \mathbb{E}\Big[1_B(|x - Y_1|\Big] = \int_{\mathbb{R}} 1_B(|x - y|)\mu(dy),$$

ce qui s'écrit encore

$$P(x, B) = \mu\{x - B\} + \mu\{x + B\} - \mu(x)\delta_0(B)$$

où δ_0 est la masse de Dirac en 0.

Les transitions de cette chaîne sont bien gouvernées par une suite de fonctions aléatoires continues ; en effet, si pour tout réel a, on note f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x) := |x - a|, \tag{8}$$

on peut écrire

$$X_n^x = f_{Y_n} \circ f_{Y_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{Y_1}(x).$$

Comme dans les paragraphes précédents, on pose $L_n := f_{Y_n} \circ \cdots \circ f_{Y_1}$ et $R_n := f_{Y_1} \circ \cdots \circ f_{Y_n}$. Quelques remarques simples s'imposent ici :

1. chaque fonction f_a satisfait la propriété de contraction "faible" suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f_a(x) - f_a(y)| \leq |x - y|,$$

   qui entraîne directement que la suite $(|X_n^x - X_n^y|)_n$ est décroissante.
2. si μ est discrète,, on note d le PGCD de l'ensemble $\{n \geq 1/\mu(n) > 0\}$. La chaîne $(X_n^x)_n$ vit alors dans l'ensemble $S(x) := \{\pm x + d\mathbb{Z}\} \cap \mathbb{R}^+$, on retrouve une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable. Ce n'est pas ce cas là qui nous intéresse dans ce qui suit, **nous supposerons dorénavant** que le groupe engendré par le support de μ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. si le support de la mesure μ est inclus dans $[0, C]$, alors, après un nombre fini d'étapes, la chaîne $(X_n^x)_n$ vit dans l'intervalle $[0, C]$.

Nous avons à présent la

Proposition 3.5 *Si la mesure μ est portée par $\mathbb{R}^+$, alors la mesure de densité $\mu[x, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ est P-invariante ; en particulier, si $\mathbb{E}(Y_i) < +\infty$, la mesure*

$$\nu(dx) = \frac{1}{\mathbb{E}[Y_1]}\mu[x, +\infty[dx$$

est une mesure de probabilité P-invariante.

Démonstration. Posons $H(x) = \mu[x, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\forall x > 0 \quad \nu P[x, +\infty[\quad &= \quad \mathbb{P}_\nu[|X_0 - Y_1| \geq x] \\
&= \quad \mathbb{P}_\nu[X_0 \geq x + Y_1] + \mathbb{P}_\nu[X_0 < Y_1 - x] \\
&= \quad \int_x^{+\infty} \mathbb{P}[Y_1 \leq t - x] H(t) dt + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[Y_1 > t + x] H(t) dt \\
&= \quad \int_x^{+\infty} (1 - H(t - x) H(t) dt + \int_0^{+\infty} H(t + x) H(t) dt \\
&= \quad \int_x^{+\infty} H(t) dt - \int_x^{+\infty} H(t - x) H(t) dt + \int_0^{+\infty} H(t + x) H(t) dt \\
&= \quad \nu[x, +\infty[.
\end{aligned}$$

□

La proposition qui suit ne concerne pas seulement le cas où les variables aléatoires Y_i sont positives :

Proposition 3.6 *Pour tout $n \geq 1$ et toute suite finie de réels $y_1, y_2, ..., y_n$, la fonction $f_{y_n} \circ \cdots \circ f_{y_1}$ est affine par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, avec pente ± 1, les points de discontinuité de sa dérivée étant les points de l'ensemble*

$$D_n := \Big\{ y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \cdots \pm y_n \Big\} \cap \mathbb{R}^+.$$

En particulier, si les variables Y_i admettent un moment d'ordre 1, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, les suites $\Big(|L_n \cdot x - L_n \cdot y|\Big)_n$ et $\Big(|R_n \cdot x - R_n \cdot y|\Big)_n$ convergent $\mathbb{P}$-presque sûrement vers 0.

Démonstration. La première assertion se démontre par récurrence. Pour $n = 1$, il est clair que y_1 est le point de discontinuité de f'_{y_1} : en effet, pour $x \geq y_1$, on a $f_{y_1}(x) = x - y_1$ alors que $f_{y_1}(x) = y_1 - x$ lorsque $x \leq y_1$.

On suppose à présent que la fonction $F_{n-1} = f_{y_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{y_1}$ est de la forme

1. $x \mapsto x - y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_{n-1}$,
   ou
2. $x \mapsto -x + y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_{n-1}$,

selon la place de x relativement aux points de D_{n-1}. La fonction $F_n = f_{y_n} \circ \cdots \circ f_{y_1}$ est alors de la forme

1. $x \mapsto x - y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_{n-1} - y_n$ ou $x \mapsto y_n - (x - y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_{n-1})$ lorsque F_{n-1} relève du cas 1 ci-dessus, ou
2. $x \mapsto -x + y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_{n-1} - y_n$ ou $x \mapsto y_n - (-x + y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_{n-1})$ lorsque F_{n-1} relève du cas 2.

Dans tous les cas, les points de discontinuité de F'_n sont bien les points de D_n.

Supposons à présent que $\mathbb{E}[Y_i] < +\infty$ et considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(\epsilon_n)_n$ de loi de Bernoulli symétrique, la suite $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ étant indépendante de $(Y_n)_{n \geq 1}$; la suite $(\epsilon_n Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires centrées ayant un moment d'ordre 1, la marche aléatoire associée est donc récurrente sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe $\Omega_0 \subset \Omega, \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, tel que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, l'ensemble $\{\epsilon_2(\omega) Y_2(\omega) + \cdots + \epsilon_n(\omega) Y_n(\omega) / n \geq 1\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il en est bien sûr de même pour $\{Y_1(\omega) + \epsilon_2(\omega) Y_2(\omega) + \cdots + \epsilon_n(\omega) Y_n(\omega) / n \geq 1\}$, et a fortiori pour $\{Y_1(\omega) \pm Y_2(\omega) \pm \cdots \pm Y_n(\omega) / n \geq 1\}$.

On fixe alors $\omega \in \Omega_0$ et deux réels quelconques x et y ; pour tout $\delta > 0$ fixé, à partir d'un certain rang n_δ, l'écart entre deux points consécutifs de

$$\{Y_1(\omega) \pm Y_2(\omega) \pm \cdots \pm Y_n(\omega) / n \geq 1\} \cap [x, y]$$

est $\leq \delta$, si bien que $|L_n(\omega).x - L_n(\omega).y| \leq \delta$. En conclusion on a bien

$$\lim_{n \to +\infty} L_n \cdot x - L_n \cdot y = 0 \qquad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Le même argument fonctionne pour la suite $(R_n \cdot x - R_n \cdot y)_n$.$\square$

Dans les paragraphe qui suivent, nous précisons le comportement de la chaîne de Markov $(X_n)_n$; dans un premier temps, nous supposerons les variables Y_i positives, le cas général avec dérive viendra ensuite.

3.4.1 Cas où les variables Y_i sont positives

En utilisant les résultats précédents et appliquant le théorème 3.2, on obtient le

Corollaire 3.7 *Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que*

1. *le groupe engendré par le support S_μ de μ est dense dans $\mathbb{R}$; on note C la borne supérieure de S_μ.*
2. *μ posséde un moment d'ordre 1 ; on pose $m := \mathbb{E}(Y_i)$.*

On note $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire réfléchie sur $\mathbb{R}^+$ associée à la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$; pour tout $n \geq 1$, on a $X_n = L_n(X_0)$ avec $L_n := f_{Y_n} \circ \cdots \circ f_{Y_1}$, où $f_a, a \in \mathbb{R}$, est donnée par la formule (8). Alors

1. *la suite de fonctions $(L_n)_{n\geq 1}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement proximale*
2. *la mesure $\nu(dx) = \dfrac{1}{m}\mu[x, +\infty[$ est l'unique mesure de probabilité invariante pour la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ est ν-récurrente positive.*

3.4.2 Cas où les variables Y_i sont quelconques avec dérive positive

Nous démontrons ici le

Corollaire 3.8 *Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

1. *le groupe engendré par le support S_μ de μ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mu(\mathbb{R}^{*-}) > 0$.*
2. *μ posséde un moment d'ordre 1 et $m := \mathbb{E}(Y_i) > 0$.*

Avec les mêmes notations que celles du Corollaire 3.7, on a

1. *la suite de fonctions $(L_n)_{n\geq 1}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement proximale*
2. *il existe sur $\mathbb{R}^+$ une unique mesure de probabilité invariante ν pour la chaîne $(X_n)_n$ et la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est ν-récurrente positive.*

Remarque. On peut démontrer de façon assez simple que, puisque μ est adaptée et charge $\mathbb{R}^{*-}$, le support de la mesure invariante ν est égal à $\mathbb{R}^+$, même lorsque celui de μ est bornée supérieurement ; ceci découle en fait de la construction de ν, que nous décrivons dans la démonstration qui suit.

Démonstration. On rappelle que $(T_n^+)_n$ désigne la suite des instants de record stricte de la m. a. $s_0 = 0$ et $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$.

D'après le Théorème 3.2 , chap. XII de [5], on a $\mathbb{P}[T_1^+ + \infty] = 1$ et $\mathbb{P}[S_{T_1^+} < +\infty] = 1$, de plus les variables aléatoires positives T_1^+ et $S_{T_1^+}$ sont d'espérance finie (la formule de Wald nous indique d'ailleurs que $\mathbb{E}[S_{T_1^+}] = \mathbb{E}[T_1^+] \times \mathbb{E}[Y_1]$.)

Il est alors important de noter que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$X_{T_n^+} = f_{S_{T_n^+} - S_{T_{n-1}^+}} \circ \cdots \circ f_{S_{T_1^+}}(X_0).$$

D'après la section précédente, il existe sur $\mathbb{R}^+$ une mesure de probabilité ν' invariante pour la chaîne $(X_{T_n^+})_n$ (pour préciser que ν' est unique, il faudrait vérifier que le groupe engendrée par le support de la loi de $S_{T_1^+}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui est vrai et se démontre par un raisonnement élémentaire ; cependant, l'unicité de ν' n'intervient pas dans la suite de la démonstration). Par la technique du balayage, la mesure ν définie par

$$\nu(B) := \mathbb{E}_{\nu'}\Big[\sum_{k=0}^{T-1} 1_B(X_k)\Big]$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}^+$, est invariante pour la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$. De plus, $\nu(\mathbb{R}^+) = \nu'(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[\tau] < +\infty$, ce qui prouve que ν est une mesure finie ; quitte à multiplier ν par une constante, on supposera dorénavant que ν est une mesure de probabilité.

Pour montrer que ν est l'unique mesure de probabilité invariante, il nous suffit d'après le Théorème 3.2 de vérifier que la suite $(f_{Y_n} \circ \cdots \circ f_{Y_1})_{n\geq 1}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement proximale ; ceci découle directement de la Proposition 3.6 et du fait que μ est adaptée. □

3.5 Marche aléatoire sur le groupe affine de la droite réelle

3.5.1 Quelques rappels sur le groupe affine de la droite réelle

Soit G le groupe affine de la droite réelle $\mathbb{R}$, c'est-à-dire le groupe des transformations $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) := ax + b$$

avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $b \in \mathbb{R}$. Dans la suite on identifie g et $(a, b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$; si $g_1 = (a_1, b_1)$ et $g_2 = (a_2, b_2)$ sont deux élements de G, leur produit $g_1 g_2$ est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_1 g_2(x) = g_1 \circ g_2(x) = a_1 a_2 x + a_1 b_2 + b_1,$$

soit

$$g_1 g_2 = (a_1, b_1)(a_2, b2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

Le groupe G est non commutatif et est égal au produit semi-direct $\mathbb{R}^{*+} \rtimes \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}$. On note $e = (1, 0)$ son élément neutre.

La mesure de Haar sur G. Par définition, la mesure de Haar à droite (respectivement à gauche) sur un groupe topologique est une mesure σ-finie sur ce groupe, invariante sous l'action à droite (respectivement à gauche) des translations ; elle est unique, à une constante multiplicative près. Les mesures de Haar à droite et à gauche coïncident évidemment lorsque G est abélien ; par exemple, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est la mesure de Haar pour le groupe $(\mathbb{R}, +)$, de même, la mesure $\frac{da}{a}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ est la mesure de Haar sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$. Ces mesures peuvent par contre être différentes lorsque le groupe considéré n'est plus abélien ; pour le groupe affine de la droite réelle $G = \mathbb{R}^{*+} \rtimes \mathbb{R}$, la mesure de Haar à droite est la mesure $\frac{da\ db}{a}$ et la mesure de Haar à gauche est $\frac{da\ db}{a^2}$, elles sont donc distinctes, on dit que G est *non unimodulaire.*

3.5.2 Sur la récurrence positive de m.a. sur le groupe affine

Nous considérons à présent une suite de v.a.i.i.d. $g_n = (a_n, b_n), n \geq 1$, à valeurs dans G et de loi μ ; les marches aléatoires *droite* et *gauche* sur G de loi μ sont définies par $R_0 = L_0 = e$, $R_{n+1} = R_n g_{n+1}$ et $L_{n+1} = g_{n+1} L_n$. Plus précisément, pour tout $n \geq 1$, on a

$$R_n = (a_1, b_1) \cdots (a_n, b_n) = \Big(a_1 \cdots a_n, \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdots a_{k-1} b_k\Big)$$

et

$$L_n = (a_n, b_n) \cdots (a_1, b_1) = \Big(a_n \cdots a_1, \sum_{k=1}^{n} a_n \cdots a_{k+1} b_k\Big).$$

Nous démontrons le

Théorème 3.9 *Supposons que* $\mathbb{E}\Big[|\log a_n| + \log^+ |b_n|\Big] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[\log a_n] < 0$*. Alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, la suite* $(R_n(x))_{n\geq 1}$ *converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie* Z *; de plus, la loi* ν *de* Z *est l'unique mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}$ *invariante pour la chaîne de Markov* $(L_n \cdot x)_{n\geq 1}$*, la suite de fonctions aléatoires* $(L_n)_n$ *est* $\mathbb{P}$*-presque sûrement proximale sur* $\mathbb{R}$ *et la chaîne* $(L_n \cdot x)_{n\geq 1}$ *est* ν*-récurrente positive.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $R_n(x) = a_1 \cdots a_n x + \sum_{k=1}^n a_1 \cdots a_{k-1} b_k$. D'après la loi des grands nombres, pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\frac{1}{n}\Big(\log a_1(\omega) + ... + \log a_n(\omega)\Big) \to \mathbb{E}(\log a_1) < 0,$$

d'où $a_1(\omega)...a_n(\omega) \to 0$. D'autre part, puisque $\mathbb{E}[\log^+ |b_n|] < +\infty$, on a pour tout $\epsilon > 0$

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\log |b_k| \geq k\epsilon) < +\infty,$$

et donc $\mathbb{P}(\limsup_{k \to +\infty} [\log |b_k| \geq k\epsilon]) = 0$; ceci entraîne $\limsup_n \frac{1}{k} \log |b_k| \leq 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement et donc

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to +\infty} (a_1 ... a_{k-1} b_k)^{\frac{1}{k}} &= \limsup_{n \to +\infty} \exp\Big(\frac{\log a_1 + ... + \log a_{k-1} + \log |b_k|}{k}\Big) \\ &\leq \exp(\mathbb{E}(\log a_1)) < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le critère de Cauchy pour les séries à termes positifs, la série de terme général $a_1 \cdots a_{k-1} b_k$ converge $\mathbb{P}$ presque-sûrement vers une variable aléatoire $Z := \sum_{k=1}^{+\infty} a_1 \cdots a_{k-1} b_k$. Notons ν la loi de Z et remarquons que la variable $Z' := \sum_{k=2}^{+\infty} a_2 \cdots a_{k-1} b_k$ suit aussi la loi ν et est indépendante de a_1. La mesure ν satisfait donc la propriété suivante

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \int_G \phi(ax + b)\ \nu(dx)\ \mu(dadb),$$

pour toute fonction borélienne bornée ϕ sur $\mathbb{R}$; en d'autres termes, ν est invariante pour la chaîne de Markov $(L_n \cdot x)_{n \geq 1}$.
L'unicité de ν découle du Théorème 3.2, puisque, d'après ce qui précède, nous avons la propriété de proximalité suivante : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$|L_n \cdot x - L_n \cdot y| = a_1 \cdots a_n |x - y| \to 0 \quad \mathbb{P} - \text{presque sûrement.}$$

□

4 Itérations de transformations aléatoires : sur la récurrence nulle

Dans tout ce paragraphe, nous considérons encore un système d'itérations de fonctions aléatoires $(h_n)_{n \geq 1}$, nous énonçons un critère général qui assure la récurrence nulle de la chaîne de Markov $(L_n \cdot x)_n$ que nous l'appliquerons ensuite dans un certain nombre de situations.

4.1 Un critère général

Dans ce paragraphe, nous démontrons le

Théorème 4.1 *Soit $(h_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $L_n := h_n \cdots h_1$ et $X_n := L_n(X_0)$. On suppose que*

1. *pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout compact K de $\mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} (L_n \cdot x - L_n \cdot y) 1_K(L_n \cdot x) = 0 \quad \mathbb{P}\textit{-presque sûrement.}$$

2. *il existe un compact K_0 de $\mathbb{R}$ tel que* $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{K_0}(L_n \cdot x) = +\infty$ *$\mathbb{P}$-presque sûrement.*

3. *il existe sur $\mathbb{R}$ une mesure de Radon infinie invariante m pour la chaîne de Markov $X_n = L_n(X_0)$.*

*Alors, la mesure m est l'unique mesure de Radon invariante pour la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$, et celle-ci est m-***récurrente nulle***, c'est-à-dire vérifie la propriété suivante :*

pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$ tel que $0 < m(B) < +\infty$, le temps d'arrêt $T_B := \inf\{n \geq 1 : X_n \in B\}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement fini et satisfait l'égalité

$$\mathbb{E}_{m_B}[T_B] = +\infty,$$

où m_B désigne la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par $m_B(\cdot) = \dfrac{m(\cdot \cap B)}{m(B)}$.

Avant d'établir ce théorème, nous dégageons la définition suivante

Définition 4.2 *Une suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite* **localement proximale** *lorsque, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout compact $K \subset \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}(F_n \cdot x - F_n \cdot y)1_K(F_n \cdot x) = 0.$$

Démonstration du Théorème 4.1. Soulignons tout d'abord que le noyau de transition de la chaîne (X_n) est un opérateur de Feller ; la condition 2 du théorème entraîne que (X_n) est topologiquement conservative, l'existence d'une mesure de Radon invariante m découle ensuite du théorème 5.1 de [9]. L'hypothèse 3 permet donc simplement de supposer que cette mesure m n'est pas finie, ce qui sera essentiel par la suite pour établir la propriété de récurrence nulle annoncée.

Comme précédemment, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $L_n = g_n \cdots g_1$, et $X_n^x := L_n \cdot x$.

La mesure $\mathbb{P}_m$ sur l'espace $\mathbb{R}^{\otimes\mathbb{N}}$ des trajectoires de la chaîne (X_n), obtenue comme image de la mesure $m \otimes \mathbb{P}$ sur $\mathbb{R} \times \Omega$ par l'application $(x, \omega) \mapsto (x, L_1(\omega) \cdot x, L_2(\omega) \cdot x, \cdots)$, est invariante par l'application de décalage θ sur $\mathbb{R}^{\otimes\mathbb{N}}$; on peut aussi remarquer que $\mathbb{P}_m$ est l'image de $m \otimes \mu^{\otimes\mathbb{N}}$ par l'application $(x_0, g_1, g_2, \cdots)) \mapsto (x_0, x_1 := g_1 \cdot x_0, x_2 := g_2 g_1 \cdot x_0, \cdots)$.

La propriété de contraction locale (1) et celle de récurrence (2) entraîne que θ est conservatif et qu'on a donc, pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}$ tel que $0 < m(O) < +\infty$

$$\mathbb{P}\Big[\Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\otimes\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} 1_O(\theta^k \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} 1_O(x_k) = +\infty\Big\}\Big] = 1. \tag{9}$$

Le théorème de Chacon-Ornstein entraîne alors : pour toutes fonctions positives f et p de $\mathbb{L}^1(m)$, sur l'ensemble $\Big\{(x, \omega) : \sum_{k=0}^{+\infty} p(L_k(\omega) \cdot x) = +\infty\Big\}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n f(x)}{S_n p(x)} = \frac{\mathbb{E}_m[f(X_0)/\mathcal{I}]}{\mathbb{E}_m[p(X_0)/\mathcal{I}]} \quad m(dx) \otimes \mathbb{P} - \text{presque sûrement}, \tag{10}$$

où on a posé $S_n f(\cdot) := \sum_{k=0}^{n} f(L_k \cdot)$, $S_n p(\cdot) := \sum_{k=0}^{n} p(L_k \cdot)$, et où $\mathcal{I}$ désigne la tribu des ensembles θ-invariant de $\mathbb{R}^{\otimes\mathbb{N}}$. Noter que $\mathbb{P}_m\Big\{(x, \omega) : \sum_{k=0}^{+\infty} p(L_k(\omega) \cdot x) = +\infty\Big\} = 1$, quand p est positive et continue à support compact avec $\int_{\mathbb{R}} p(x)m(dx) > 0$; en effet, dans ce cas, pour $\epsilon > 0$ assez petit, l'ensemble $\{p > \epsilon\}$ est un ouvert de m-mesure strictement positive, et la propriété (9) ci-dessus est satisfaite.

Dans la suite, on fixe les fonctions f et p, que l'on suppose continues, positives et à support compact.

Étape 1. Vérifions que le terme de droite de (10) ne dépend pas du point de départ x. Supposons que le support de f et p est inclus dans K et, pour $\delta >$, posons $K_\delta := \{y \in \mathbb{R} : d(y, K) \leq \delta\}$. Comme f et p sont uniformément continues, on a d'après la propriété de contraction locale (1) : presque sûrement, pour tous réels x et y et tout $\epsilon > 0$, il existe un entier (aléatoire) N tel que, pour $k \geq N$, on ait

$$|f(L_k \cdot x) - f(L_k \cdot y)| \leq \ \epsilon \ 1_{K_\delta}(L_k \cdot y)\text{et} \quad |p(L_k \cdot x) - p(L_k \cdot y)| \leq \ \epsilon \ 1_{K_\delta}(L_k \cdot y)$$

D'après (10), on peut fixer y de façon que la suite $\Big(\dfrac{S_n 1_{K_\delta}(y)}{S_n p(y)}\Big)_n$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement ; ainsi $\limsup\limits_{n\to+\infty}\Big|\dfrac{S_n f(x) - S_n f(y)}{S_n p(y)}\Big| \leq \epsilon \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n 1_{K_\delta}(y)}{S_n p(y)}$ et ϵ étant arbitraire, on a en fait $\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout x :

$$\limsup_{n\to+\infty}\Big|\frac{S_n f(x) - S_n f(y)}{S_n p(y)}\Big| = 0.$$

De même $\limsup\limits_{n\to+\infty}\Big|\dfrac{S_n p(x) - S_n p(y)}{S_n p(y)}\Big| = 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Lorsque la fonction $\frac{f}{p}$ est bornée, il en est de même pour la variable $\dfrac{\mathbb{E}_m[f(X_0)/\mathcal{I}]}{\mathbb{E}_m[p(X_0)/\mathcal{I}]}$ et donc pour la suite $\Big(\dfrac{S_n f(x)}{S_n p(x)}\Big)_n$ $\mathbb{P}$-presque sûrement ; par conséquent, d'après ce qui précède, on a

$$\Big|\frac{S_n f(y)}{S_n p(y)} - \frac{S_n f(x)}{S_n p(x)}\Big| \leq \Big|\frac{S_n f(y) - S_n f(x)}{S_n p(y)}\Big| + \Big|\frac{S_n f(x)}{S_n p(x)}\Big|\Big|\frac{S_n p(y) - S_n p(x)}{S_n p(y)}\Big| \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to +\infty$. Lorsque f/p n'est pas bornée, on se ramène au cas précédent en écrivant $\dfrac{S_n f}{S_n p}$ comme quotient de $\dfrac{S_n f}{S_n(p + |f|)}$ par $\dfrac{S_n p}{S_n(p + |f|)}$.

En conclusion, on a montré qu'il existe une variable aléatoire $Z_{f,p}$ et un ensemble $\Omega_0 \subset \Omega$ de $\mathbb{P}$-mesure 1, tels que, pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n f(x)}{S_n p(x)} = Z_{f,p}(\omega).$$

Étape 2. Montrons que la limite $Z_{f,p}$ est constante $\mathbb{P}$-presque sûrement. D'après ce qui précède, pour tout $\omega \in \Omega_0$, tout $k \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
Z_{f,p}(\omega) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{l=1}^{n} f(L_l(\omega)\cdot x)}{\sum_{l=1}^{n} p(L_l(\omega)\ \cdot x)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{l=k+1}^{n} f(L_l(\omega)\cdot x)}{\sum_{l=k+1}^{n} p(L_l(\omega)\cdot x)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{l=k+1}^{n} f(g_l(\omega)\cdots g_{k+1}(\omega)L_k(\omega)\cdot x)}{\sum_{l=k+1}^{n} p(g_l(\omega)\cdots g_{k+1}(\omega)L_k(\omega)\cdot x)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{l=k+1}^{n} f(g_l(\omega)\cdots g_{k+1}(\omega)\cdot x)}{\sum_{l=k+1}^{n} p(g_l(\omega)\cdots g_{k+1}(\omega)\cdot x)}.
\end{aligned}$$

La variable $Z_{f,p}$ est donc mesurable par rapport à la tribu asymptotique associée à la suite $(g_n)_{n\geq 1}$; elle est donc constante $\mathbb{P}$-presque sûrement, d'après la loi du 0-1 de Kolmogorov.

On en déduit immédiatement que la mesure $\mathbb{P}_m$ est ergodique pour l'opérateur θ sur $\mathbb{R}^{\otimes\mathbb{N}}$. En effet, on a $\dfrac{\mathbb{E}_m[f(X_0)/\mathcal{I}]}{\mathbb{E}_m[p(X_0)/\mathcal{I}]} = \mathbb{E}_{m_p}\left[\dfrac{f}{p}/\mathcal{I}\right]$ où m_p est la mesure finie de densité p par rapport à m sur $\mathbb{R}$; d'après ce qui précède, on a $\mathbb{E}_{m_p}\left[\frac{f}{p}/\mathcal{I}\right] = cste$ pour toute fonction continue à support compact inclus dans K, ce qui entraîne que tout borélien θ-invariant de $\mathbb{R}$ inclus dans K est de $\mathbb{P}_{m_p}$-mesure pleine ou nulle, et donc de $\mathbb{P}_m$-mesure pleine ou nulle.

La dernière assertion du théorème se déduit alors directement de la formule de Kacs, appliquée au système dynamique ergodique $(\mathbb{R}^{\otimes\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\otimes\mathbb{N}}), \theta, \mathbb{P}_m)$.

□

4.2 Marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ avec absorption en 0

On considère de nouveau la marche aléatoire $(X_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec absorption en l'origine. Si $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ, on considère une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \geq 0$ on pose

$$X_{n+1} = \max(X_n - Y_{n+1}, 0) = f_{Y_{n+1}}(X_n)$$

où, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f_a est donnée par la formule (6). On pose $L_n := f_{Y_n} \circ \cdots \circ f_{Y_1}$ et $R_n := f_{Y_1} \circ \cdots \circ f_{Y_n}$.

Nous avons le

Corollaire 4.3 *Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que μ possède des moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}(Y_i) = 0$.*

Alors

1. *la suite $(L_n)_{n\geq 1}$ st $\mathbb{P}$-presque sûrement proximale sur $\mathbb{R}$*
2. *il existe sur $\mathbb{R}^+$ une unique mesure de Radon invariante m pour la chaîne $(X_n)_n$ et celle-ci est m-récurrente nulle.*

Démonstration. Il nous suffit de vérifier que la chaîne $(X_n)_n$ vérifie les hypothèses du Théorème 4.1.

Sous l'hypothèse de centrage $\mathbb{E}[Y_n] = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} Y_1 + \cdots + Y_n = +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. On en déduit plusieurs conséquences :

1. $\mathbb{P}[X_n^x = 0 \ i.s.] = 1$, pour tout réel x. La chaîne $(X_n)_n$ étant fellerienne, elle admet alors une mesure de Radon invariante m sur $\mathbb{R}^+$.
2. D'après la remarque 2 du paragraphe 3.2, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a $X_n^x = X_n^y$ $\mathbb{P}$-presque sûrement à partir d'un certain rang (aléatoire) ; la propriété de proximalité locale est a fortiori satisfaite.

La démonstration s'achève en vérifiant que la mesure m est infinie. Sinon, on pourrait appliquer le Théorème 3.2. Ainsi, pour tout intervalle $B := [0, a]$ de mesure positive et m-presque tout $x \in B$, on aurait $\mathbb{E}_x[T_B] < +\infty$.

Fixons $\delta > 0$ tel que $\mathbb{P}[Y_1 \le -\delta] > 0$; quitte à réduire l'intervalle B, on peut supposer que $m(]a-\delta, a]) > 0$ et choisir $x \in]a-\delta, a]$; on a en particulier $\mathbb{E}_x[1_{[Y_1 \le -\delta]} \times T_B] < +\infty$.

Mais, pour tout $n \ge 2$, on a

$$\mathbb{P}_x[Y_1 \le -\delta, Y_2 \le 0, Y_2 + Y_3 \le 0, \cdots, Y_2 + \cdots + Y_n \le 0] \le \mathbb{P}_x[Y_1 \le -\delta, T_B \ge n]$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_1 \le -\delta] \times \mathbb{P}[\tau^+ \ge n-1] &= \mathbb{P}[Y_1 \le -\delta, Y_2 + Y_3 \le 0, \cdots, Y_2 + \cdots + Y_n \le 0] \\ &\le \mathbb{P}_x[Y_1 \le -\delta, T_B \ge n]. \end{aligned}$$

On aboutit à une contradiction en notant que $\mathbb{E}[\tau^+] = +\infty$.□

4.3 Marche aléatoire réfléchie sur $\mathbb{R}^+$

On considère maintenant la marche aléatoire $(X_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec réflexion en l'origine. Si $(Y_n)_{n\ge1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ, on considère une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \ge 0$ on pose

$$X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}| = f_{Y_{n+1}}(X_n)$$

où, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f_a est donnée par la formule (8). On pose $L_n := f_{Y_n} \circ \cdots \circ f_{Y_1}$ et $R_n := f_{Y_1} \circ \cdots \circ f_{Y_n}$.

Nous avons le

Corollaire 4.4 *Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que μ posséde des moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}(Y_i) = 0$.*

Alors

1. *la suite $(L_n)_{n\ge1}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement proximale sur $\mathbb{R}$.*
2. *il existe sur $\mathbb{R}^+$ une unique mesure de Radon invariante m pour la chaîne $(X_n)_n$ et celle-ci est m-récurrente nulle.*

Démonstration. Il nous suffit de vérifier que la chaîne $(X_n)_n$ vérifie les hypothèses du Théorème 4.1.

La suite $(L_n)_{n\ge1}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement proximale sur $\mathbb{R}^+$ (et a fortiori $\mathbb{P}$-presque sûrement localement proximale) d'après la Proposition 3.6. La condition (1) du Théorème 4.1 est donc satisfaite.

On pose $S_0 = 0$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. On pose $T_0 = 0$ et on introduit la suite des temps de records successifs $T = T_1, T_2, \ldots$ définie par récurrence par

$$T_{n+1} = \inf\{k > T_n : S_k > S_{T_n}\}.$$

D'après le Théorème 3.2 , chap. XII de [5], on a $\mathbb{P}[T < +\infty] = 1, \mathbb{P}[S_T < +\infty] = 1$ et les variables aléatoires positives T et S_T sont d'espérance finie. L'hypothèse (2) du Théorème 4.1

est satisfaite car la m.a. sur $\mathbb{R}^+$ avec réflexion en 0, associée à la suite de v.a.i.i.d intégrables et strictement positives $\Big(S_{T_n} - S_{T_{n-1}}\Big)_n$, est récurrente positive et que l'on a l'égalité

$$X_{T_n} = f_{S_{T_n} - S_{T_{n-1}}} \circ \cdots \circ f_{S_T}(X_0).$$

La chaîne $(X_n)_n$ admet donc une mesure de Radon positive et invariante m d'après le critère de M. Lin. Le fait que cette mesure n'est pas finie se démontre comme pour la m.a. sur $\mathbb{R}^+$ avec réflexion en 0 ; sinon, on pourrait appliquer le Théorème 3.2 et on aboutirait alors à une contradiction avec l'égalité $\mathbb{E}[T] = +\infty$.$\Box$

4.4 Marche aléatoire sur le groupe affine de la droite réelle

On considère ici une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ, définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans le groupe affine de la droite réelle.

On suppose que la loi μ est adaptée **(hypothèse H1)**, c'est-à-dire que le groupe fermé engendré par son support est égal à G ; en particulier, elle est non dégénérée, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mu\{g \in G : g \cdot x = x\} < 1 \quad \text{et} \quad \mu\{g \in G : a(g) = 1\} < 1.$$

Nous supposerons aussi que μ satisfait aux conditions suivantes : il existe $\eta > 0$ tel que

$$\int \Big(|\log a(g)|^2 + (\log^+ |b(g)|)^{2+\eta} \Big) \mu(dg) < +\infty \quad \textbf{(hypothèse H2)}$$

et

$$\int \log a(g) \mu(dg) = 0. \qquad \textbf{(hypothèse H3)}$$

Sous l'hypothèse d'adaptation H1, la marche aléatoire de loi μ sur G est transiente puisque le groupe G est non unimodulaire. Pour tout compact K de G, le nombre de visites

$$U(K) := \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_K(R_k)\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_K(L_k)\Big]$$

du compact K par les marches R_k et L_k est fini.

Rappelons que le groupe G s'identifie (en tant qu'ensemble) avec le demi-plan dit de Poincaré $\mathbb{H} := \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{H}$ de la topologie usuelle induite par celle de $\mathbb{R}^2$; la frontière $\partial\mathbb{H}$ s'identifie alors à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ est alors le compactifié de $\mathbb{H}$.

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le

Théorème 4.5 *Sous les hypothèses H1, H2 et H3, la suite de fonctions aléatoires $(L_n)_n$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement localement proximale sur $\mathbb{R}$. De plus, il existe sur $\mathbb{R}$ une unique mesure de Radon m invariante pour la chaîne de Markov $(L_n \cdot x)_{n\geq 1}$ et celle-ci $(L_n \cdot x)_{n\geq 1}$ est m-récurrente nulle.*

Démonstration. On note $(S_n)_n$ la marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ définie par $S_0 = 0$ et $S_n := \log a(g_1 \cdots g_n)$ et on introduit la suite de temps d'arrêts $(T_n)_{n\geq 0}$ définie par $T_0 = 0$, et, pour $n \geq 1$:

$$T_n := \inf\{k > T_{n-1} : S_k < S_{T_{n-1}}\}.$$

La suite $(g_{T_n} \circ \cdots \circ g_1)_{n\geq 1}$ est encore une marche aléatoire sur G, dont la loi est celle de la variable $g_{T_1} \circ \cdots \circ g_1$; d'après le Théorème 2.19, sous les hypothèses H2 et H3, on a $\mathbb{E}[\log a(g_{T_1} \circ \cdots \circ g_1)] \in]-\infty, 0[$, par ailleurs on a aussi $\mathbb{E}[\log^+ b(g_{T_1} \circ \cdots \circ g_1)] < +\infty$ (calcul à faire, du à L. Elie). D'après le Théorème 4.5, pour tout réel x, la chaîne $(g_{T_n} \circ \cdots \circ g_1 \cdot x)_{n\geq 1}$ est récurrente positive sur $\mathbb{R}$, elle est donc conservative et il en est a fortiori de même pour la chaîne $(L_n \cdot x)_n$; puisque $(L_n \cdot x)_n$ est une chaîne fellerienne, on en déduit l'existence d'une mesure de Radon invariante m, d'après l'argument de M. Lin. Les deux premières hypothèses du Théorème 4.1 sont donc satisfaites et il nous reste à établir la propriété de proximalité locale. Pour ce faire nous démontrons d'abord la proposition suivante qui précise la façon dont la m.a. droite $(R_n)_n$ tend vers l'infini dans le groupe G.

Proposition 4.6 *Sous les hypothèse H1, H2 et H3, presque sûrement pour tout $g \in G$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} gR_n = \infty \in \partial\mathbb{H}.$$

qui nous permet alors d'établir le

Corollaire 4.7 *Sous les hypothèse H1, H2 et H3, la suite $(L_n)_n$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement localement proximale sur $\mathbb{R}$.*

Pour démontrer le Théorème 4.6, nous aurons tout d'abord besoin du résultat suivant :

Lemme 4.8 *Soit H un groupe localement compact à base dénombrable de mesure de Haar à droite dh et $U^r(h, \cdot := \sum_{n\geq 0} \delta_h * \mu^{*n}, h \in H$, le noyau potentiel d'une marche aléatoire à droite transiente sur H de loi μ. Pour toute fonction $\phi \in \mathbb{L}^1(H)$, la fonction $h \mapsto U\phi(h)$ est dh-presque sûrement finie.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que cette fonction est localement dh intégrable sur H. Soit K un compact de H ; en utilisant l'invariance à droite de la mesure dh, on a

$$\begin{aligned}
\int_H U\phi(h_1)1_K(h_1)dh_1 &= \int_H \int_H \phi(h_1h_2)1_K(h_1)(U(dh_2)dh_1 \\
&= \int_H \int_H \phi(h)1_K(hh_2^{-1})U(dh_2)dh \\
&= \int_H \phi(h)\check{U}1_K(h)dh
\end{aligned}$$

où $\check{U}$ est le noyau potentiel de la m.a. droite sur H de loi $\check{\mu}$. Par dualité, la m.a. droite de loi $\check{\mu}$ est transiente, puisque celle de loi μ l'est ; le potentiel $\check{U}1_K(h)$ est donc fini, et même uniformément borné par le principe du maximum ; il vient

$$\int_H U\phi(h_1)1_K(h_1)dh_1 \leq \sup_{h\in H} \check{U}1_K(h) \ \int_H \phi(g)dg < +\infty.$$

□

Grâce à ce lemme nous pouvons démontrer la

Proposition 4.9 *Sous les hypothèses $H1$ et $H2$, pour presque tout $g \in G$ au sens de la mesure de Haar, on a*

$$\mathbb{P}\Big[gR_{n+1} \in C, gR_n \notin C i.s.\Big] = 0,$$

où C désigne l'ensemble $C :=]0, 1[\times] - 1, 1[\subset \mathbb{H}$.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, il nous suffit de montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[gR_{n+1} \in C, gR_n \notin C] < +\infty.$$

Or, $\mathbb{P}[gR_{n+1} \in C, gR_n \notin C] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{P}[gR_ng_{n+1} \in C/R_n]1_{C^c}(gR_n)\Big] = \mathbb{E}[\Phi(gR_n)]$, où Φ désigne la fonction borélienne positive de G dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(g) := \mathbb{P}[gX_1 \in C]1_{C^c}(g)$. En d'autres termes on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[gR_{n+1} \in C, gR_n \notin C] = U^r\Phi(g),$$

et pour démontrer la Proposition, il suffit de vérifier que Φ est intégrable par rapport à la mesure de Haar à droite $dg = \frac{da\ db}{a}$ (en effet, le groupe G étant non unimodulaire ses marches aléatoires sont toutes transientes, d'après [6], et l'on peut appliquer le Lemme 4.8). Démontrons d'abord que $\int\int \Phi(a,b)1_{[a\geq 1]}\Phi(a,b)\frac{da\ db}{a} < +\infty$. On a

$$\begin{aligned}
\int\int \Phi(a,b)1_{[a\geq 1]}\Phi(a,b)\frac{da\ db}{a} &= \mathbb{E}\Big[\int_1^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} 1_C((a,b)(a_1,b_1))\frac{da\ db}{a}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_1^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} 1_{[aa_1<1]}1_{[|ab_1+b|<1]}\frac{da\ db}{a}\Big] \\
&= 2\mathbb{E}\Big[\int_1^{+\infty} 1_{[aa_1<1]}\frac{da}{a}\Big] \\
&= 2\mathbb{E}\Big[\log\Big(\frac{1}{a_1}\vee 1\Big)\Big] = 2\mathbb{E}[\log^-(a_1)].
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int\int \Phi(a,b)1_{[a<1,|b|\geq 1]}\Phi(a,b)\frac{da\ db}{a} &\leq \mathbb{E}\Big[\int_0^1\Big(\int_{\mathbb{R}} 1_{[|b|\geq 1]}1_{[|ab_1+b|<1]}db\Big)\frac{da}{a}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^1 (|ab_1|\wedge 2)\frac{da}{a}\Big] \\
&\qquad \text{car} \quad \int_{\mathbb{R}} 1_{[|b|\geq 1]}1_{[|b-x|<1]}db = |x|\wedge 2 \\
&= \mathbb{E}\Big[1_{[0<|b_1|\leq 2]}\int_0^1 (|ab_1|\wedge 2)\frac{da}{a} \\
&\qquad +1_{[|b_1|\geq 2]}\int_0^1 (|ab_1|\wedge 2)\frac{da}{a}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[|b_1|1_{[0<|b_1|\leq 2]} + (2+\log(|b_1|/2))1_{[|b_1|\geq 2]}\Big] \\
&\leq 2+\mathbb{E}[\log|b_1|] < +\infty.
\end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 4.6. D'après la Proposition 4.9, pour presque tout $g \in G$, la suite $(gR_n)_n$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement à partir d'un certain rang (aléatoire) , soit dans C soit dans C^c. L'hypothèse de centrage $\mathbb{E}[\log a_1] = 0$ entraîne que la suite $(\|og(a_n\cdots a_1))_n$ est récurrente sur $\mathbb{R}$; ainsi, à partir d'un certain rang (aléatoire), gR_n vit dans C^c, ce qui s'exprime aussi par le fait que, pour preque tout $g \in G$, la suite $(R_n)_n$ reste dans gC^c à partir d'un certain rang.

Or la famille $(gC^c)_{g\in G}$ forme une base de voisinages ouverts de ∞ ; comme pour tout $g_0 \in G$ fixé, l'ensemble des $g \in G$ tels que $gC^c \subset g_0C^c$ est de mesure de Haar positive, on peut choisir une suite $(g_k)_k$ d'éléments de G tels que R_n vive ultimement dans chaque g_kC^c et la famille $(g_kC^c)_k$ forme une base de voisinages ouverts de ∞. Il vient $R_n \to +\infty$p.s. lorsque $n \to +\infty$, et il en est dde même pour gR_n, pour tout $g \in G$.□

Démonstration du Corollaire 4.7. On a $L_n = g_n\cdots g_1 = (g_1^{-1}\ldots g_n^{-1})^{-1} = \check{R}_n^{-1}$ où $(\check{R}_n)_n$ est la marche aléatoire droite de loi $\check{\mu}$, image de μ par l'application $g \mapsto g^{-1}$. Puisque $(a,b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ on a

$$b(L_n) = -\frac{b(\check{R}_n)}{a(\check{R}_n)} = -a(L_n)b(\check{R}_n).$$

Soit $k > 0$ tel que $K \subset [-k,k]$; le fait que $L_n\cdot y = a(L_n)y + b(L_n) \in K$ entraîne $|b(L_n) \leq |k + a(L_n)|y|$, et donc, d'après l'inégalité ci-dessus, on a $|b(\check{R}_n)| \leq \dfrac{k}{a(L_n)} + |y|$. En résumé

$$L_n\cdot y \in K \quad \Rightarrow \quad \max(a(\check{R}_n), b(\check{R}_n)) \leq (k\vee 1)\frac{1}{a(L_n)} + |y|.$$

La marche aléatoire droite $(\check{R}_n)_n$ satisfait les hypothèses du Théorème (4.6) si bien que $\max(b(\check{R}_n), b(\check{R}_n)) \to +\infty$ d'où l'on déduit $a(L_n) \to 0$.□

5 Appendice

5.1 Sur les chaînes de Markov à espace d'états dénombrable

On ne redonne pas ici la notion de chaîne de Markov sur un espace d'état dénombrable mais on rappelle très brièvement les notions d'irréductibilité et de récurrence positive et récurrence nulle.

L'espace E sur lequel vit la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ que nous considérons est donc dénombrable ; nous disposons ainsi d'une matrice stochastique infinie $(p_{,x,y})_{x,y\in X}$ qui précise les transitions de la chaîne

$$\forall n \geq 1, \forall x, y \in E \quad \mathbb{P}[X_{n+1} = y/X_n = x] = p_{x,y}.$$

Les coefficients $p_{x,y}$ sont tous positifs ou nuls et l'on a $\sum_{y\in E} p_{x,y} = 1$. Pour tout $k \geq 1$, et tout $x, y \in E$, on pose

$$p^{(k)}_{x,y} = \sum_{x_1\in E} \sum_{x_2\in E} \cdots \sum_{x_{k-1}\in E} p_{x,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{k-1},y}.$$

On a

$$\forall n, k \geq 1, \forall x, y \in E \quad \mathbb{P}[X_{n+k} = y/X_n = x] = p^{(k)}_{x,y}.$$

La chaîne $(X_n)_{n\geq 1}$ est dite **irréductible** lorsque pour tous $x, y \in E$, il existe $k \geq 1$ tel que $p^{(k)}_{x,y} > 0$.

Pour une telle chaîne, il existe sur E une mesure invariante m, unique à constante multiplicative près. Pour tout $x \in E$, on pose $\tau_x := \inf\{n > 0 : X_n = x\}$; par irréductibilité de la chaîne $(X_n)_{n\geq 1}$, on a $\mathbb{P}_{x_0}[\tau_x < +\infty] = 1$ quelque soit le point initial x_0 de E et de plus

- lorsque m est finie (on suppose alors que m est une mesure de probabilité sur E)

$$\forall x \in \quad \mathbb{E}_x[\tau_x] = \frac{1}{m(x)}$$

On dit que la chaîne $(X_n)_{n\geq 1}$ est récurrente positive.

- lorsque m est infinie

$$\forall x \in \quad \mathbb{E}_x[\tau_x] = +\infty.$$

On dit que la chaîne $(X_n)_{n\geq 1}$ est récurrente nulle.

5.2 Egodicité et formules de Kacs

Nous énonçons la formule de Kacs pour un système dynamique ergodique quelconque , c'est-à-dire que la mesure invariante m soit finie ou non (voir [4], théorème 1.5.5) Rappelons que l'ergodicité de m signifie que tout ensemble $B \in \mathcal{T}$ invariant sous l'action de T est soit de mesure 0, soit de de complémentaire de mesure nulle ; on retrouve la notion classique d'ergodicité lorsque m est une mesure de probabilité.

Théorème 5.1 *Soit $(X, \mathcal{T}, T, \mu)$ un système dynamique ergodique. Pour tout ensemble A de $\mathcal{T}$ tel que $0 < m(A) < +\infty$, on pose $\tau_A := \inf\{n > 0 : T^n(x) \in A\}$. On a*

$$\int_A \tau_A(x) m(dx) = m(X).$$

Si on note m_A la mesure de probabilité sur A définie par $m_A(\cdot) := \dfrac{m(A\cap \cdot)}{m(A)}$, on peut "réécrire" l'énoncé précédent de la façon suivante

- lorsque m est une mesure de probabilité sur X, on a $\displaystyle\int_X \tau_A(x) m_A(dx) = \frac{1}{m(A)}$.

- lorsque m est une mesure infinie sur X, on a $\displaystyle\int_X \tau_A(x) m_A(dx) = +\infty$

retrouvant ainsi des énoncés classique pour les chaînes de Markov à espace d'états dénombrable.

5.3 Sur la conservativité des chaînes de Markov fellerienne

Nous précisons ici un résultat de M. Lin concernant l'existence de mesure de Radon invariante pour une large classe de chaînes de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ r $\mathbb{R}$ dont le noyau de transition P est de Feller, c'est-à-dire

$$\forall f \in C(\mathbb{R}) \; Pf \in C(\mathbb{R}).$$

Pour une telle chaîne de Markov, nous avons le

Théorème 5.2 *Si le noyau P agit sur $C(\mathbb{R})$ et s'il existe une fonction continue, positive et à support compact g telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} P^n g(x) = +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors il existe sur $\mathbb{R}$ une mesure de Radon P-invariante m.*

Nous renvoyons le lecteur au Théorème 5.1 de ([9]).

5.4 Sur les moments de la marche induite pour le groupe affine de la droite réelle

Lemme 5.3 *Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et de même loi et telles que $\mathbb{P}[U_n \neq 0] > 0$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\log(1+U_1)\Big] < +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to+\infty} U_n^{1/n} = 1 \; p.s. \\ &\Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to+\infty} U_n^{1/n} < +\infty \; p.s. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la v.a. $\limsup_{n\to+\infty} U_n^{1/n}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement constante, d'après la loi du $0-1$ de Kolmogorov. De plus, il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{P}[U_n \geq \delta] > 0$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[U_n \geq \delta] = +\infty$. Par Borel-Cantelli, il vient $\mathbb{P}\Big[\limsup_n [U_n \geq \delta]\Big] = 1$ et donc $\limsup_{n\to+\infty} U_n^{1/n} \geq 1$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Rappelons que la v.a. $\log(1+U_1)$ est intégrable si et seulement si, pour tout $a > 0$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[\log(1+U_n) \geq an] < +\infty$, ce qui est équivalent à

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big[\log(1+U_n) \geq an\Big] = \emptyset \qquad \mathbb{P}\text{-presque sûrement,}$$

ou encore

$$\limsup_{n\to+\infty} (1+U_n)^{\frac{1}{n}} \leq e^a \qquad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Ainsi, si $\log(1+U_1)$ est intégrable, on a $\limsup_{n\to+\infty} (1+U_n)^{\frac{1}{n}} \leq e^a$ $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout $a > 0$, soit $\limsup_{n\to+\infty} (1+U_n)^{\frac{1}{n}} \leq 1$ $\mathbb{P}$ et donc $\limsup_{n\to+\infty} (1+U_n)^{\frac{1}{n}} = 1$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, d'après la remarque en début de démonstration.

Réciproquement, si $\limsup_{n\to+\infty} (1+U_n)^{\frac{1}{n}}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement finie, cette variable étant $\mathbb{P}$-presque sûrement constante, il existe $a > 0$ tel que $\limsup_{n\to+\infty} (1+U_n)^{\frac{1}{n}} \leq e^a$ $\mathbb{P}$-presque sûrement et l'on en déduit que $\log(1+U_1)$ est intégrable.$\square$

Proposition 5.4 *Sous l'hypothèse H2, on a $\mathbb{E}\Big[\log\Big(1 + \sum_{k=0}^{T_1-1} a_1 \cdots a_{k-1} b_k\Big)\Big] < +\infty$.*

Démonstration. D'après le Lemme 5.3, il faut et il suffit de montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}\Big|\sum_{k=T_n+1}^{T_{n+1}} a_{T_n+1}\cdots a_{k-1}b_k\Big|^{\frac{1}{n}} < +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement}$$

ce qui se déduire immédiatement de la propriété

$$\limsup_{n\to+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{T_n} a_1\cdots a_{k-1}b_k\Big|^{\frac{1}{n}} < +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement}$$

On sait que les variables $T_{n+1}-T_n$ sont indépendantes et de même loi que T_1 ; de plus $\mathbb{P}[T_1>n]\sim\frac{c}{\sqrt{n}}$ d'où $\mathbb{E}[T_1^\alpha]<+\infty$ pour $\alpha<1/2$. Il vient $\limsup\limits_{n\to+\infty} T_n^\alpha/n<+\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. On a

$$\limsup_{n\to+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{T_n} a_1\cdots a_{k-1}b_k\Big|^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to+\infty}\exp\Big(\frac{1}{T_n^\alpha}\log\Big(1+\sum_{k=1}^{T_n}a_1\cdots a_{k-1}b_k\Big)\frac{T_n^\alpha}{n}\Big)$$

et il suffit donc de montrer que

$$K:=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{T_n^\alpha}\log\Big(1+\sum_{k=1}^{T_n}a_1\cdots a_{k-1}b_k\Big)<+\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

On a $\log\Big(1+\sum\limits_{k=1}^{T_n}a_1\cdots a_{k-1}b_k\Big)\le\sup\limits_{1\le k\le T_n}\log(1+a_1\cdots a_{k-1}b_k)+\log T_n$, d'où

$$\begin{aligned}
K &\le \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{T_n^\alpha}\Big(\sup_{1\le k\le T_n}\log(1+a_1\cdots a_{k-1}b_k)\Big)\\
&= \limsup_{n\to+\infty}\Big(\frac{\sup\limits_{1\le k\le T_n}\Big(\log(1+a_1\cdots a_{k-1}b_k)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}}{T_n}\Big)^\alpha\\
&\le \limsup_{n\to+\infty}\Big(\frac{\sum\limits_{k=1}^{T_n}\Big(\log(1+a_1\cdots a_{k-1}b_k)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}}{T_n}\Big)^\alpha
\end{aligned}$$

et donc

$$K\le\mathbb{E}\Big[\Big(\log(1+a_1\cdots a_{k-1}b_k)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^\alpha,$$

d'après la loi des grands nombres, la variable $\Big(\log(1+a_1\cdots a_{k-1}b_k)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$ étant intégrable, pourvu que $\alpha<1/2$ soit assez proche de $1/2$.

$$K\le\,'$$

Références

[1] Aaronson J. *An introduction to infinite ergodic theory*, AMS, Vol.50.

[2] Brofferio S. *How a centred random walk on the affine group goes to infinity*, Ann. I.H.P., PR39, 3 (2003) pp. 371-384.

[3] Richard Durrett *Probability : Theory and Examples (Probability : Theory & Examples)* , Duxbury Press

[4] Elie L. *An introduction to infinite ergodic theory*, AMS, Vol.50.

[5] Feller W. *An introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, J. Wiley, (1970).

[6] Guivarc'h Y., Keane M. & Roynette B. *Marches aléatoires sur les groupes de Lie*, Lectures Notes in Mathematics vol. 624

[7] Lepage E. & Peigné M. *A local limit theorem on the semi-direct product of* $\mathbb{R}^{*+}$ *et* $\mathbb{R}^d$, Ann. IHP (1997).

[8]

[9] Lin M. *Conservative markov processes on a topological space*, Israel Journal of mathematics (1970).

[10]

[11] Petersen K. *Ergodic theory*, Cambridge studies in avances math. (1983)

[12] Revuz D. *Markov chains*, North Holland, (1984)

[13] Principles of random walks , D. van Nostrand Company, (1964)