Cours de Master 2 - Novembre 2010 -

Université de Tunis El Manar

Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ et propriétés de récurrence

Marc Peigné [1]

1 Introduction

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d) définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose dans cette introduction que $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$, on pose $m := \mathbb{E}[X_n]$ et $S_n := S_0 + X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.

Si $m \neq 0$, on a, d'après la loi forte des grands nombres $\frac{S_n}{n} \to m \quad \mathbb{P}$-presque sûrement, ce qui entraîne $S_n \to +\infty \quad \mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $m > 0$ et $S_n \to -\infty \quad \mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $m < 0$. Ainsi, pour toute réel $a > 0$, la v.a. $\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{[-a,a]}(S_n)$, qui est égale au nombre de visites de la m.a. $(S_n)_n$ dans l'intervalle $[-a, a]$, est finie $\mathbb{P}$-presque sûrement lorsque $m > 0$ En fait, on a en fait dans ce cas

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{[-a,a]}(S_n)\Big] < +\infty,$$

ce qui est une propriété beaucoup plus forte mais aussi beaucoup plus délicate à obtenir.

Si $m = 0$, et si l'on suppose pour simplifier que $\mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$, on peut montrer à l'aide du théorème central limite et de la loi du $0-1$ de Kolmogorov que

$$\liminf S_n = -\infty \quad \text{et} \quad \liminf S_n = +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$ [2]

Ainsi, si on suppose que la loi des X_i est à support dans $[-a, a]$, on obtient alors $\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{[-a,a]}(S_n) = +\infty \quad \mathbb{P}$-presque sûrement.

Dans ce cours, nous allons préciser cette notion de "visite" des ensembles finis d'entiers.

1. Marc Peigné LMPT, UMR 6083, Faculté des Sciences et Techniques, Parc de Grandmont, 37200 Tours. mail : peigne@lmpt.univ-tours.fr

2. En fait, plus précisément, on a $\liminf \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ et $\liminf \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, et les grandes lignes e la démonstration sont les suivantes : pour tout $c > 0$, on a $\lim \mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{c}{\sigma}}^{+\infty} e^{-u^2/2}du$, d'où $\mathbb{P}\Big[\limsup_n \Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]\Big] > 0$. L'évènement $\limsup_n \Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]$ étant mesurable par rapport à la tribu asymptotique associée à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$, on a en fait $\mathbb{P}\Big[\limsup_n \Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]\Big] = 1$ et donc aussi $\mathbb{P}\Big[\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big] = 1$; le choix de c étant arbitraire il vient $\mathbb{P}\Big[\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty\Big] = 1$.

2 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ introduite dans l'introduction est un exemple fondamental de chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^d$ de noyau de transition $(P(x,\cdot)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ définie par

$$\forall A\subset \mathbb{Z}^d \quad P(x,A):=\mu(A-x).$$

On peut aussi définir P à l'aide des fonctions boréliennes bornées : pour tout fonction borélienne bornée $\phi:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}$ et tout $x\in\mathbb{Z}^d$, on a

$$P\phi(x):=\int \phi(x+y)\mu(dy).$$

L'opérateur P agit par dualité sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{Z}^d$ de la façon suivante : pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{Z}^d$, la mesure νP est définie par

$$\nu P(A):=\nu(P1_A)=\int P1_A(x)\nu(dx)=\int 1_A(y)P(x,dy)\nu(dy).$$

Ainsi, si la loi de S_0 est ν, alors, pour tout $n\geq 1$, celle de la variable S_n est égale à $\nu*\mu^{*n}$, où μ^{*n} désigne la puissance de convolution $n^{ième}$ de la mesure μ ; par convention, on pose $\mu^{*0}=\delta_0$.
On notera $\Big((\mathbb{Z}^d)^{\otimes\mathbb{N}},\mathcal{P}((\mathbb{Z}^d)^{\otimes\mathbb{N}},(S_n)_{n\geq 0},(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}\Big)$ la chaîne de Markov canonique associée au noyau de transition P. On rappelle que $\mathbb{P}_x$ désigne la mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)^{\otimes\mathbb{N}}$ définie par : pour tous boréliens $A_0,A_1,\cdots,A_n$ de $\mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{P}_x(A_0\times A_1\times\cdots\times A_n)=1_{A_0}(x)\int\int\cdots\int 1_{A_0}(x+x_1)\cdots 1_{A_n}(x+x_1+\cdots+x_n)\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_n).$$

Plus généralement, $\mathbb{P}_\nu$ désigne la mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)^{\otimes\mathbb{N}}$ définie par

$$\mathbb{P}_\nu(A_0\times A_1\times\cdots\times A_n)=\int\int\cdots\int 1_{A_0}(x_0)1_{A_0}(x_0+x_1)\cdots 1_{A_n}(x_0+x_1+\cdots+x_n)\nu(dx_0)\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_n).$$

Dans la suite de ce cours, $(X_n)_{n\geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$; pour tous entiers $n\geq m\geq 1$, on pose $S_n:=S_0+X_1+\cdots+X_n$ et $S_m^n:=X_m+\cdots+X_n$.

On introduit aussi les

Définition 2.1 *Soit S_μ le support de la mesure μ, c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ de μ-mesure 1. On note T_μ le semi-groupe engendré par S_μ et G_μ le groupe engendré par S_μ.*
On dit que μ est adaptée sur $\mathbb{Z}^d$ lorsque $G_\mu=\mathbb{Z}^d$.

Exemples . 1. $\mu=q\delta_{-1}+p\delta_1$, on a $T_\mu=G_\mu=\mathbb{Z}$.
1. $\mu=q\delta_0+p\delta_1$, on a $T_\mu=\mathbb{N}$ et $G_\mu=\mathbb{Z}$.

2.1 Propriétés de récurrence

Nous avons tout d'abord la

Définition 2.2 *L'entier x est une* **valeur possible** *de $(S_n)_{n\geq 0}$ s'il existe $n\geq 1$ tel que $\mathbb{P}_0[S_n=x]>0$.*
L'entier x est une **valeur de récurrence** *de $(S_n)_{n\geq 0}$ si $\mathbb{P}_0[S_n=x\ i.s.]=1$.* [3]

3. on peut de façon équivalente dire que x est une valeur de récurrence de $(S_n)_{n\geq 0}$ lorsque $\mathbb{P}_0[S_n=x\ i.s.]>0$; l'événement $[S_n=x\ i.s.]$ étant un événement de la tribu asymptotique associée à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$, la loi du $0-1$ de Kolmogorov entraîne qu'il est alors de mesure pleine.

On voit de façon immédiate que l'ensemble $\mathcal{P}$ coïncide avec le semi-groupe fermé T_μ engendré par le support de μ. On a de plus le

Théorème 2.3 *L'ensemble $\mathcal{R}$ des valeurs de récurrence de $(S_n)_{n\geq 0}$ est soit vide soit un sous-groupe de $\mathbb{Z}^d$. Lorsqu'il est non vide, l'ensemble $\mathcal{R}$ est aussi égal à l'ensemble $\mathcal{P}$ des valeurs possibles de $(S_n)_{n\geq 0}$.*

Attention ! Quand $\mathcal{R} = \emptyset$, ce n'est plus vrai ; par exemple, si $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, on a $\mathcal{P} = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R} = \emptyset$. De plus, quand $\mathcal{R} \neq \emptyset$, l'ensemble $\mathcal{R} = \mathcal{P} = T_\mu$ est un groupe, d'où $\mathcal{R} = G_\mu$.
Démonstration. Supposons $\mathcal{R} \neq \emptyset$; on a $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ et montrons le

Fait 2.4 *Si $x \in \mathcal{R}$ et $y \in \mathcal{P}$ alors $x - y \in \mathcal{R}$.*

Démonstration du Fait. Sinon, la m.a. visiterait le site $x - y$ un nombre fini de fois avec probabilité positive, i.e.

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}[S_n \neq x - y]\Big] > 0$$

si bien qu'il existerait $m \geq 1$ tel que $\mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq m}[S_n \neq x - y]\Big] > 0$. Puisque $y \in \mathcal{P}$, il existe $k \geq 1$ tel que $\mathbb{P}[S_k = y] > 0$.

Notons alors $S_n^m = X_n + \cdots + X_m$ pour $n < m$ et 0 sinon. Pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq m}[S_n \neq x - y]\Big] = \mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq m}[S_k^{k+n} \neq x - y]\Big]$ car la loi de $(X_i)_{i\geq 1}$ est égale à celle de $(X_i)_{i\geq k+1}$. Les variables $S_k^{k+n}, n \geq 1$, et S_k sont indépendantes, donc

$$\mathbb{P}\Big[[S_k = y] \cap \Big[\bigcap_{n\geq m}[S_k^{k+n} \neq x - y]\Big]\Big] = \mathbb{P}[S_k = y] \times \mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq m}[S_k^{k+n} \neq x - y]\Big] > 0$$

et on en déduit que $x \notin \mathcal{R}$ en notant que

$$[S_k = y] \cap \bigcap_{n\geq m}[S_k^{k+n} \neq x - y] \subset \bigcap_{n\geq m}[S_{k+n} \neq x] = \bigcap_{n\geq m+k}[S_n \neq x]$$

d'où une contradiction.

□

Démontrons a présent le Théorème 2.3. D'après le fait on a

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{R} &\Rightarrow 0 = x - x \in \mathcal{R} \\ x \in \mathcal{R} &\Rightarrow -x = 0 - x \in \mathcal{R} \\ x, y \in \mathcal{R} &\Rightarrow x + y = y - (-x) \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

si bien que $\mathcal{R}$ est un groupe.

On a $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$. Pour établir l'inclusion inverse, quand $\mathcal{R} \neq \emptyset$, on note tout d'abord que dans ce cas on a $0 \in \mathcal{R}$; en effet, $\mathcal{R}$ contient au moins un point x_0, d'où $0 = x_0 - x_0 \in \mathcal{R}$. On choisit ensuite $y \in \mathcal{P}$; d'après le Fait ci-dessus, on a $-y = 0 - y \in \mathcal{R}$ et donc $y \in \mathcal{R}$.

□

Définition 2.5 *Si $\mathcal{R} = \emptyset$, on dit que la m.a. est* **transiente** *; lorsque $\mathcal{R} \neq \emptyset$, on dit que la m.a. est récurrente.*

Insistons sur le fait que lorsque la m.a. est récurrente, elle visite infiniment souvent **tous** les points de G_μ.

Introduisons à présent la suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 0}$ définie par $\tau_0 = 0$ et $\tau_n := \inf\{k > \tau_{n-1} : S_m = 0\}$; cette suite est égale au temps successifs de visite de l'origine 0 par la m.a. Nous avons le

Théorème 2.6 *Pour toute marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}^d$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\mathbb{P}[\tau_1 < +\infty] = 1$
2. $\mathbb{P}[S_n = 0 \ i.s.] = 1$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[S_n = 0] = +\infty$.

Démonstration. Si $\mathbb{P}[\tau_1 < +\infty] = 1$, alors, pour tout $n \geq 1$ on a aussi $\mathbb{P}[\tau_n < +\infty] = 1$: en effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau_n < +\infty] &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_{n-1} = k, \exists l \geq 1 \ t.q. \ S_{k+l} = 0] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_{n-1} = k, \exists l \geq 1 \ t.q. \ S_{k+l} - S_k = 0] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_{n-1} = k] \ \mathbb{P}_0[\exists l \geq 1 \ t.q. \ S_l = 0] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0[\tau_{n-1} = k] \ \mathbb{P}_0[\tau_1 < +\infty] \\
&= \mathbb{P}\Big[\tau_{n-1} < +\infty] \times \mathbb{P}\Big[\tau_1 < +\infty].
\end{aligned}$$

Il vient $\mathbb{P}[\tau_n < +\infty] = \mathbb{P}[\tau_1 < +\infty]^n$.

Notons alors N le nombre de visite en 0 de la m.a. ; on a

$$N := \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[S_n=0]} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[\tau_n<+\infty]}$$

et

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[\tau_n < +\infty] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[\tau_1 < +\infty]^n = \frac{1}{1 - \mathbb{P}_0[\tau_1 < +\infty]}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[\tau_1 < +\infty] = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall n \geq 0 \quad \mathbb{P}[\tau_n < +\infty] = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq 0} [\tau_n < +\infty]\Big] = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\Big[N = +\infty]\Big] = 1.
\end{aligned}$$

□

On notera que ce résultat (et sa démonstration) est en fait valide pour une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable ; nous avons donné les détails de la preuve par soucis de clarté.

Rappelons que la m.a. est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^d$ de noyau de transition $P(x, dy) = \delta_x * \mu(dy)$. ; sous $\mathbb{P}_x$, la loi de S_n est donc $\delta_x * \mu^{*n}$, si bien que pour toute fonction borélienne positive ϕ définie sur $\mathbb{Z}^d$, on a

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_x[\phi(S_n)] = \sum_{n\geq 0} \delta_x * \mu^{*n}(\phi) = G\phi(x),$$

où $G(x, \cdot) := \delta_x * \sum_{n\geq 0} \mu^{*n}$ est le noyau de Green associé à la mesure μ. En particulier, aucours de la démonstration précédente nous avons montré que on a

$$G(0, 0) = \mathbb{E}[N] = \frac{1}{1 - \mathbb{P}_0[\tau_1 < +\infty]}.$$

Enonçons à présent un critère général permettant de décider si une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente ou transiente ; nous avons le

Théorème 2.7 *(Kesten, Spitzer (1957)) Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une m.a. adaptée sur $\mathbb{Z}^d$ de loi μ ; on note $\hat{\mu}$ sa tranformée de Fourier. La m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ est récurrente si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\int_{B(0,\epsilon)} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big) dt = +\infty.$$

La démonstration de ce théorème est difficile, nous renvoyons le lecteur au livre de [?] où il pourra trouver une démonstration complète. Nous nous contenterons de démontrer la version plus faible suivante, qui sera amplement suffisante dans ce qui suit :

Théorème 2.8 *Sous les hypothèses du théorème 2.7, la m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ est récurrente si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \int_{B(0,\epsilon)} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) dt = +\infty.$$

Remarquons que si un des critères ci-dessus est satisfait pour $\epsilon_0 > 0$ donné, il l'est a fortiori pour tout $\epsilon < \epsilon_0$. Cette version “faible” du Théorème de Kesten-Spitzer admet de façon immédiate le

Corollaire 2.9 *Si la fonction $t \mapsto \mathrm{Re}\,\Big(\dfrac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big)$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 alors la m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ est récurrente.*

La réciproque est aussi vraie, mais délicate à établir ; c'est l'objet de l'énoncé du théorème 2.7.

Démonstration. On a $\lim_{r\to 1} \mathrm{Re}\,\Big(\dfrac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) = \mathrm{Re}\,\Big(\dfrac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big)$; par le lemme de Fatou, il vient

$$\forall \epsilon > 0 \quad \liminf_{r\to 1} \int_{B(0,\epsilon)} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) dt \geq \int_{[-\epsilon,\epsilon]^d} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big) dt,$$

d'où le résultat en appliquant le Théorème 2.8.

□

Démonstration du Théorème 2.8. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.10

1. *Si la m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ est adaptée sur $\mathbb{Z}^d$ on a*

$$\hat{\mu}(t) = 1 \Longleftrightarrow t \in 2\pi\mathbb{Z}^d.$$

2. *Pour tout $r \in [0, 1[$, la fonction $t \mapsto \mathrm{Re}\,\Big(\dfrac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)$ est positive sur $\mathbb{R}^d$.*
3. *Pour tout $\epsilon \in]-\pi, \pi[$, on a*

$$\limsup_{r\to 1} \int_{[-\pi,\pi]^d\setminus[-\epsilon,\epsilon]^d} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) < +\infty.$$

Démonstration du lemme 2.10.

1. Si μ est adaptée sur $\mathbb{Z}^d$ et $t \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ alors $\hat{\mu}(t) = 1$. Réciproquement, si $< t, X_1 >\in 2\pi\mathbb{Z}$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, alors pour tout $x \in G_\mu = \mathbb{Z}^d$ on aura $< t, x >\in 2\pi\mathbb{Z}$ i.e. $< \frac{t}{2\pi}, x >\in \mathbb{Z}$. Si l'une des coordonnées de $\frac{t}{2\pi}$ n'est pas entière, cette propriété n'est plus satisfaite pour un choix judicieux de x. Contradiction.
2. $\mathrm{Re}\,\Big(\dfrac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) = \dfrac{\mathrm{Re}\,(1-r\hat{\mu}(-t))}{|1-r\hat{\mu}(t)|^2} = \dfrac{1-r\mathbb{E}[\cos < t, X_1 >]}{|1-r\hat{\mu}(t)|^2} \geq 0.$
3. On a $\big||1-r\hat{\mu}(t)| - |1-\hat{\mu}(t)|\big| \leq 1-r$ si bien que $||1-r\hat{\mu}(t)|$ converge uniformément vers $||1-\hat{\mu}(t)|$ lorsque $r \to 1$; comme $t \to 1-\hat{\mu}(t)$ est continue et ne s'annule pas sur $[-\pi,\pi]^d \setminus [-\epsilon,\epsilon]^d$, il existe donc $c_\epsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\pi,\pi]^d \setminus [-\epsilon,\epsilon]^d \qquad \liminf_{r\to 1} |1-r\hat{\mu}(t)| \geq c_\epsilon$$

d'où

$$\limsup_{r\to 1} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) \le \limsup_{r\to 1} \frac{1-r\mathbb{E}[\cos < t, X_1 >]}{|1-r\hat{\mu}(t)|^2} \le \frac{2}{c_\epsilon} < +\infty.$$

□

Démonstration du Théorème 2.8. Pour tout $r \in [0,1[$ et tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$G_r(x,y) := \sum_{n\ge 0} \mathbb{E}_x[1_{\{y\}}(S_n)].$$

Notons que l'on a $1_{\{x\}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle x,t\rangle}dt$, si bien que

$$G_r(0,0) = \sum_{n\ge 0} r^n \mathbb{E}_0[1_{\{0\}}(S_n)] = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\sum_{n\ge 0} r^n\mathbb{E}[e^{i\langle S_n,t\rangle}]dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{dt}{1-r\hat{\mu}(t)}.$$

Le terme de droite ci-dessus étant réel, on a donc

$$G_r(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt.$$

D'après le lemme 2.10, on a $\sup_{r\in]0,1[}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d\setminus[-\epsilon,\epsilon]^d}\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt < +\infty.$

Ainsi, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sup_{r\in]0,1[}\int_{[-\epsilon,\epsilon]^d}\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt < +\infty$, on aura $G(0,0) < +\infty$ et la m.a. $(S_n)_{n\ge 0}$ est alors transiente.

A contrario, $G(0,0) = +\infty$ dès que $\sup_{r\in]0,1[}\int_{[-\epsilon,\epsilon]^d}\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt = +\infty$, et dans ce cas la marche $(S_n)_{n\ge 0}$ est récurrente.

□

Applications.

1. **En dimension** 1**, une marche aléatoire c admettant des moments d'ordre** 1 **est récurrente lorsqu'elle est centrée**.
   L'argument se simplifie singulièrement s'il existe des moments d'ordre 2. En effet, dans ce cas on a $\hat{\mu}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2}(1+\epsilon(t))$, d'où, pour t assez petit

   $$\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big) = \frac{1}{\sigma^2t^2}\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1+\epsilon(t)}\Big) \ge \frac{1}{\sigma^2t^2}.$$

   Cette dernière fonction n'est pas intégrable au voisinage de 0, la m.a. $(S_n)_{n\ge 0}$ est donc récurrente.
   La démonstration est plus délicate quand on suppose seulement l'existence de moments d'ordre 1, nous la détaillons à présent. Nous avons

   $$\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}}\Big) \ge \frac{1-r}{(\mathrm{Re}\,(1-r\hat{\mu})^2 + t^2(\mathrm{Im}\,\hat{\mu})^2}$$

   avec $(\mathrm{Re}(1-r\hat{\mu}))^2 = \Big((1-r) + \mathrm{Re}\,r(1-\hat{\mu})\Big)^2 \le 2(1-r)^2 + 2r^2(\mathrm{Re}\,(1-\hat{\mu}))^2$. Sous les hypothèses $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[X_1] = 0$, la fonction $\hat{\mu}$ vérifie $\hat{\mu}(t) = 1 + t\epsilon(t)$, si bien que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|t| < \eta$, on ait

   $$|\mathrm{Im}\,\hat{\mu}| \le \epsilon|t| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Re}\,(1-\hat{\mu})| \le \epsilon|t|.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt &\geq (1-r)\int_{-\eta}^{\eta} \frac{dt}{2(1-r)^2+3r^2\epsilon^2t^2}\\
&\geq \frac{1}{3(1-r)}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{dt}{1+(\frac{r}{1-r}\epsilon t)^2}\\
&\geq \frac{1}{3r}\int_{-\frac{r}{1-r}\eta}^{\frac{r}{1-r}\eta}\frac{du}{1+\epsilon^2u^2} \quad \text{en posant} \quad u=\frac{r}{1-r}t,
\end{aligned}$$

d'où $\sup\limits_{r<1}\displaystyle\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt \geq \frac{\pi}{3\epsilon}$. Le paramètre ϵ étant arbitraire, on a finalement $\sup\limits_{r<1}\displaystyle\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt = +\infty$, ce qui prouve que la m.a. est récurrente.

Citons aussi le théorème de Chung-Fuchs qui stipule que si S_n/n converge vers 0 en probabilité, alors $(S_n)_n$ est récurrente.

2. **Sur $\mathbb{R}^2$, toute marche aléatoire de carré intégrable et centrée est récurrente.** En effet, on a dans ce cas $\hat{\mu}(t) = 1-\frac{\mathbb{Q}(t)}{2}(1+\epsilon(t))$ où $Q(t)=\mathbb{E}<X_1,t>^2)$ est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$. On a, pour $\epsilon>0$ assez petit

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\epsilon)} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big)dt &= \int_{B(0,\epsilon)} \frac{2}{Q(t)}\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1+\epsilon(t)}\Big)dt\\
&\geq \int_{B(0,\epsilon)}\frac{dt}{Q(t)}\\
&= \int_0^{\epsilon}\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\theta}{r^2Q(u_\theta)} \quad \text{avec } u_\theta=(\cos\theta,\sin\theta)\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Pour $d\geq 3$, toute marche aléatoire adaptée sur $\mathbb{Z}^d$ admettant des moments d'ordre 2 est transiente. Il suffit de le démontrer dans le cas centrée évidemment ; pour $r<1$ et $|t|$ assez petit (afin d'avoir $\mathrm{Re}(1+\epsilon(t))\geq 1/2$), on a

$$\mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big) \leq \frac{1}{1-r+r\frac{Q(t)}{2}\mathrm{Re}(1+\epsilon(t))} \leq \frac{4}{rQ(t)}.$$

(on utilise le fait que, pour tout nombre complexe $z=a+ib$ avec $a\leq 1$, on a $\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-z}\Big) = \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2} \leq \frac{1}{1-a}$). Le changement de variable en coordonnées polaires $t\mapsto (t/\|t\|,\|t\|)$ donne alors

$$\begin{aligned}
\int_{\|t\|\leq\epsilon} \mathrm{Re}\,\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}\Big)dt &\leq \frac{4}{r}\int_{\|t\|<\epsilon}\frac{dt}{Q(t)}\\
&\leq \frac{4}{r}\int_0^{\epsilon}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\frac{\rho^{d-1}d\rho}{\rho^2}\frac{du}{Q(u)}\\
&= \frac{4}{r}\Big(\int_0^{\epsilon}\rho^{d-3}d\rho\Big)\times\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\frac{du}{Q(u)}\Big) < +\infty.
\end{aligned}$$

2.2 Théorème limite local sur $\mathbb{Z}^d$

Nous considérons ici une marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ adaptée sur $\mathbb{Z}^d$ dont nous noton sμ la loi. Nous cherchons à préciser le comportement lorsque $n\to+\infty$ de la probabilité $\mathbb{P}[S_n=x]$ pour tout point $x\in\mathbb{Z}^d$.

Nous avons vu que dans le cas de la marche au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$ se présente un problème de "périodicité" puisque dans ce cas la marche, bien qu'adaptée à $\mathbb{Z}$, ne peut revenir en 0 qu'à un instant pair (de façon plus générale, elle ne visite des sites pairs qu'à des instants pairs et des sites impairs qu'à des instants impair). Notons que dans cet exemple, le support de μ est $S_\mu : \{-1, 1\}$ si bien que $S_\mu \subset 1 + 2\mathbb{Z}$; on peut aussi remarquer que dans ce cas on a $S_\mu - S_\mu := \{x - y/x, y \in S_\mu\} = \{-2, 0, 2\}$ et le groupe engendré par $S_\mu - S_\mu$ est égal à $2\mathbb{Z}$.

Nous introduisons ainsi la

Définition 2.11 *Soit μ une mesure adaptée sur $\mathbb{Z}^d$. On dit que μ est* **apériodique** *si et seulement si il n'existe pas d'éléments $a \in \mathbb{Z}^d$ et de sous-groupe propre $H \subset \mathbb{Z}^d$ tel que $S_\mu \subset a + H$.*

De façon équivalente [4], *μ est apériodique lorsque le sous-groupe $\langle S_\mu - S_\mu \rangle$ de $\mathbb{Z}^d$ engendré par $S_\mu - S_\mu$ n'est autre que $\mathbb{Z}^d$.*

Exemples -

1. En dimension 1. Les mesures $\mu_1 := p\delta_1 + q\delta_{-1}$ (avec $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$) et $\mu_2 := p\delta_1 + q\delta_{-1} + r\delta_0$ (avec $0 < p, q, r < 1$ et $p + q + r = 1$) sont adaptées sur $\mathbb{Z}$; la mesure μ_1 n'est pas apériodique, mais μ_2 l'est.
2. En dimension 2 (avec $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Les mesures $\mu_3 := \frac{1}{4}(\delta_{\vec{i}} + \delta_{-\vec{i}} + \delta_{\vec{j}} + \delta_{-\vec{j}}), \mu_4 := \frac{1}{5}(\delta_{\vec{i}} + \delta_{-\vec{i}} + \delta_{\vec{j}} + \delta_{-\vec{j}} + \delta_0)$ et $\mu_5 := \frac{1}{2}(\delta_{\vec{i}} + \delta_{\vec{j}})$ sont toutes les trois adaptées sur $\mathbb{Z}^2$ mais seule μ_4 est apériodique ; en effet
   (a) $S_{\mu_3} \subset \vec{i} + H$ où $H = \langle S_{\mu_3} - S_{\mu_3} = \rangle \{x\vec{i} + y\vec{j}/x, y \in \mathbb{Z}$ et $x + y \in 2\mathbb{Z}\}$
   (b) $S_{\mu_5} \subset \vec{i} + \mathbb{Z}(\vec{i} - \vec{j})$ ce qui signifie qu'en quelque sorte μ_5 est en fait 1 dimensionnelle !

Nous avons la

Propriétés 2.12 *La mesure $\mathbb{Z}^d$-adaptée μ est apériodique si et seulement si*

$$|\hat{\mu}(t)| = 1 \Leftrightarrow t \in 2\pi\mathbb{Z}^d$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(t)| = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \forall x \in S_\mu \quad \langle t, x \rangle \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in S_\mu - S_\mu \quad \langle t, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \langle S_\mu - S_\mu \rangle \quad \langle t, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Si μ est apériodique, $\langle S_\mu - S_\mu \rangle = \mathbb{Z}^d$ et la dernière assertion ci-dessus équivaut au fait que $t \in 2\pi\mathbb{Z}^d$.

Réciproquement, si $S_\mu - S_\mu$ engendre un sous-groupe propre de $\mathbb{Z}^d$, il existera des $t \notin 2\pi\mathbb{Z}^d$ tels que $\langle t, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout élément x de ce sous-groupe.

□

Nous avons alors le

Théorème 2.13 *Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de loi μ admettant des moments d'ordre 2. On suppose que μ est centrée, adaptée et apériodique sur $\mathbb{Z}^d$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} (2\pi n)^{d/2} \mathbb{P}[S_n = x] = \frac{1}{\det Q}$$

où det Q *est le déterminant de la forme quadratique Q définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \quad Q(\lambda) = \mathbb{E}[\langle X_1, \lambda \rangle^2].$$

4. en effet, si $S_\mu \subset a + H$, on a $S_\mu - S_\mu \subset H$ et donc aussi $\langle S_\mu - S_\mu \rangle \subset H$; réciproquement si $S_\mu - S_\mu \subset H$ alors $S_\mu \subset a + H$ pour tout point a de S_μ.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_n = x] = \mathbb{E}[1_0(S_n - x)] &= \mathbb{E}\Big(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle t, S_n - x\rangle} dt\Big) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle t,x\rangle}\hat{\mu}(t)^n dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d n^{d/2}}\int_{[-\pi\sqrt{n}i,\pi\sqrt{n}]^d} e^{-\frac{i}{\sqrt{n}}\langle u,x\rangle}\hat{\mu}(\frac{u}{\sqrt{n}})^n du\end{aligned}$$

avec $\hat{\mu}(t) = 1 - \frac{1}{2}Q(t)(1+o(t))$ si bien que

$$\hat{\mu}(\frac{u}{\sqrt{n}})^n = \exp\Big((n\ln(1 - \frac{1}{2n}Q(u)(1+o(n))\Big) \to \exp\Big(-\frac{Q(u}{2}\Big).$$

On doit utiliser le théorème de convergence dominée pour pouvoir passer à la limite sous le signe $\int$; ceci n'est pas possible sans certaines précautions, que nous détaillons ici, et c'est à présent qu'intervient l'hypothèse d'apériodicité. Pour tout $\delta \in]0,\pi[$, on pose

$$(2\pi n)^{d/2}\mathbb{P}[S_n = x] = I_n + J_n$$

avec

$$I_n(\delta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{[-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n}]^d} e^{-\frac{i}{\sqrt{n}}\langle u,x\rangle}\hat{\mu}(\frac{u}{\sqrt{n}})^n du$$

et

$$J_n(\delta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{[-\pi\sqrt{n},\pi\sqrt{n}]^d\setminus[-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n}]^d} e^{-\frac{i}{\sqrt{n}}\langle u,x\rangle}\hat{\mu}(\frac{u}{\sqrt{n}})^n du.$$

On choisit $\delta > 0$ assez petit pour que $|o(t)| \leq 1/2$ lorsque $t \in [-\delta,\delta]^d$, si bien que

$$\forall u \in [-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n}]^d \quad |\hat{\mu}(\frac{u}{\sqrt{n}})|^n = \exp\Big(n\ln(1 - \frac{1}{2n}Q(u)(1+o(\frac{u}{\sqrt{n}}))\Big) \leq \exp\Big(-\frac{Q(u}{4}\Big).$$

On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée et "passer à la limite" sous le signe $\int$ dans $I_n(\delta)$; on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\exp\Big(-\frac{Q(u}{4}\Big)du = \sqrt{\det\, Q}.$$

Par ailleurs, il existe $\rho_\delta \in]0,1[$ tel que $|\hat{\mu}(t)| \leq \rho_\delta < 1$ lorsque $t \in [-\pi,\pi]^d \setminus [-\delta,\delta]^d$ et l'on obtient donc

$$\limsup_{n\to+\infty}|J_n(\delta)| \leq \limsup_{n\to+\infty}\frac{n^{d/2}}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{[-\pi,\pi]^d\setminus[-\delta,\delta]^d}|\hat{\mu}(t)|^n dt \leq \limsup_{n\to+\infty}\sqrt{2\pi n}^d\rho_\delta^n = 0.$$

□

Le cas où la m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ est décentrée se déduit du cas centré via un argument classique de "relativisation" :

Corollaire 2.14 *Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de loi μ admettant des moments d'ordre exponentiels de tout ordre. On suppose que μ est décentrée, adaptée et apériodique sur $\mathbb{Z}^d$ et que son support n'est porté par aucun demi-espace de $\mathbb{R}^d$. Il existe alors une constante $\rho = \rho(\mu) \in]0,1[$ et, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, une constante $c_x > 0$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty}(n)^{d/2}\rho^n\mathbb{P}[S_n = x] = c_x.$$

Démonstration. Sous les hypothèses de ce corollaire la fonction de Laplace

$$L : \lambda \mapsto L(\lambda) := \mathbb{E}(e^{\langle\lambda,X_i\rangle})$$

est définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Comme S_μ n'est inclu dans aucun demi-espace de $\mathbb{R}^d$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on a $P(\langle\lambda,X_i\rangle > 0) > 0$ et $\mathbb{P}(\langle\lambda,X_i\rangle < 0) > 0$. Plus précisément on a la

Proposition 2.15 *On suppose que μ admet des moments d'ordre exponentiels de tout ordre et que son support n'est pas réduit à un point. La fonction L est alors analytique sur $\mathbb{R}^d$ et strictement convexe.*

Si de plus son support n'est porté par aucun demi-espace de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\lim_{\|\lambda\|\to+\infty} L(\lambda) = +\infty.$$

En particulier, L admet dans ce cas un unique minimum en en point $\lambda_0 \in \mathbb{R}^d$ et l'on a $L(\lambda_0) \leq 1$ avec égalité si et seulement si μ est centrée.

Démonstration de la Proposition. La fonction L est analytique puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, on a

$$L(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \frac{\langle \lambda, X\rangle^n}{n!}$$

avec $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{|\langle \lambda, X\rangle|^n}{n!} < +\infty$.

Nous détaillons la suite de la démonstration un dimension 1 dans un premier temps.

<u>En dimension 1.</u> On a $L''(\lambda) = \mathbb{E}(X^2 e^{\lambda X}) > 0$ ce qui montre que L est strictement convexe. De plus $\mathbb{P}(X \geq 1] > 0$ si bien que $L(\lambda) \geq e^{\lambda}\mathbb{P}(X \geq 1) \to +\infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$; de même, $\mathbb{P}(X \leq -1] > 0$ si bien que $L(\lambda) \geq e^{-\lambda}\mathbb{P}(X \leq -1) \to +\infty$ lorsque $\lambda \to -\infty$. La fonction L admet donc un unique minimum λ_0 et l'on a $L(\lambda_0) \leq L(0) = 1$.

<u>En dimension supérieure.</u> Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ on a

$$D^{(2)}_\lambda L(h) = \mathbb{E}(\langle h, X\rangle^2 e^{\langle \lambda, X\rangle}) \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $h = 0$. La fonction L est donc strictement convexe.

Fixons $\lambda \neq 0$; comme $\mathbb{P}(\langle \lambda, X\rangle > 0) > 0$, il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(\langle \lambda, X\rangle \geq a) > 0$ et l'on a donc $L(t\lambda) \geq e^{at}\mathbb{P}(\langle \lambda, X\rangle \geq a) \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Par stricte convexité, la fonction L admet donc un unique minimum en $\lambda_0 \in \mathbb{R}^d$, qui est aussi l'unique point ou son gradient est nul, ce qui s'écrit $\mathbb{E}(\langle \lambda_0, X\rangle e^{\langle \lambda_0, X\rangle}) = 0$. On conclut que $\lambda_0 = 0$ si et seulement si X est centrée.

□

On note alors μ_0 la mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}^d$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d \quad \mu_0(x) = \frac{1}{L(\lambda_0)} e^{\langle \lambda_0, x\rangle} \mu(x).$$

Pour tout $n \geq 0$, on a $\mu_0^{*n}(x) = \dfrac{1}{L(\lambda_0)^n} e^{\langle \lambda_0, x\rangle} \mu^{*n}(x)$ [5]. D'après le Théorème précédent, il vient, en posant $\rho = L(\lambda_0)$:

$$\mu^{*n}(x) = \rho^n \mu_0^{*n}(1_x e^{-\langle \lambda_0, x\rangle}) \sim c_x \frac{\rho^n}{n^{d/2}}.$$

□

L'hypothèse portant sur le fait que le support de μ n'est inclus dans aucun demi-espace de $\mathbb{R}^d$ peut sembler artificielle mais est en fait essentielle dans le raisonnement précédent. Lorsqu'elle n'est pas satisfaite, la conclusion du théorème n'est plus vraie. Ainsi, si l'on considère la marche sur $\mathbb{Z}$ de loi $\mu = q\delta_0 + p\delta_1$ avec $0 < p, q < 1$ et $p + q = 1$, on aura

$$\forall k \geq 0 \quad \mu^{*n}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

---

5. en effet $\displaystyle\mu_0^{*n}(x) = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}^d\\ x_1+\cdots+x_n=x}} \mu_0(x_1)\cdots\mu_0(x_n) = \frac{1}{L(\lambda_0)^n} \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}^d\\ x_1+\cdots+x_n=x}} \mu(x_1)\cdots\mu(x_n) e^{\langle \lambda_0, x\rangle}$ avec $\displaystyle\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}^d\\ x_1+\cdots+x_n=x}} \mu(x_1)\cdots\mu(x_n) = \mu^{*n}(x)$, d'où le résultat.

2.3 Fluctuations des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

Dans tout ce paragraphe, nous considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$ de loi μ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et nous nous intéressons aux fluctuations de la marche aléatoire associée $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Pour ce faire, nous considérons les *instants de record, large ou stricte, ascendant et descendant* T_n^+, T_n^{*+}, T_n^- et $T_n^{*-}, n \geq 0$, définis par récurrence par $T_0^+ = T_0^{*+} = T_0^- = T_0^{*-} = 0$ et, pour $n \geq 1$

$$T_n^+ := \inf\{k > T_{n-1}^+ : S_k \geq S_{T_{n-1}^+}\} \quad \text{et} \quad T_n^{*+} := \inf\{k > T_{n-1}^{*+} : S_k > S_{T_{n-1}^{*+}}\}$$

$$T_n^- := \inf\{k > T_{n-1}^+ : S_k \leq S_{T_{n-1}^+}\} \quad \text{et} \quad T_n^{*-} := \inf\{k > T_{n-1}^{*-} : S_k < S_{T_{n-1}^{*-}}\}.$$

Ces variables aléatoires sont a priori à valeurs dans $\{1, 2, \cdots\} \cup \{+\infty\}$ et ce sont des temps d'arrêt relativement à la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ associée à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

Sous certaines conditions que nous préciserons par la suite, ces variables sont en fait $\mathbb{P}$-presque sûrement finies ; nous considérons dans ce cas les variables $S_{T_1^+}$ et $S_{T_1^-}$ définies par

$$S_{T_1^+} := \sum_{n=1}^{+\infty} S_n 1_{[T_1^+ = n]} \quad \text{et} \quad S_{T_1^{*+}} := \sum_{n=1}^{+\infty} S_n 1_{[T_1^{*+} = n]}.$$

$$S_{T_1^-} := \sum_{n=1}^{+\infty} S_n 1_{[T_1^- = n]} \quad \text{et} \quad S_{T_1^{*-}} := \sum_{n=1}^{+\infty} S_n 1_{[T_1^{*-} = n]}.$$

À noter que la partie de la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ qui suit l'instant T_1^+ (resp. T_1^{*+},...) est une réplique de la marche aléatoire, mais cette fois-ci issue non plus de l'origine mais de $S_{T_1^{*+}}$; en particulier, le premier instant de record ascendant de cette nouvelle marche n'est autre que le second instant de record ascendant T_2^+ (resp. T_2^{*+} ...) de la marche $(S_n)_{n\geq 0}$.

Pour tout $n \geq 1$, nous posons

1. $\tau_n^+ := T_n^+ - T_{n-1}^+$ et $A_n := S_{T_n^+} - S_{T_{n-1}^+}$,
2. $\tau_n^{*+} := T_n^{*+} - T_{n-1}^{*+}$ et $A_n^* := S_{T_n^{*+}} - S_{T_{n-1}^{*+}}$,
3. $\tau_n^- := T_n^- - T_{n-1}^-$ et $D_n := S_{T_n^-} - S_{T_{n-1}^-}$,
4. $\tau_n^{*-} := T_n^{*-} - T_{n-1}^{*-}$ et $D_n^* := S_{T_n^{*-}} - S_{T_{n-1}^{*-}}$

On a donc $T_n^+ = \tau_1^+ + \cdots + \tau_n^+$ et $S_{T_n^+} = A_1 + \cdots + A_n$ et les formules analogues pour T_n^{*+}, T_n^- et T_n^{*-}.

Pour simplifier les notations, nous poserons par la suite $\tau^+ = \tau_1^+, \tau^{*+} = \tau_1^{*+}$ et $\tau^- = \tau_1^-, \tau^{*-} = \tau_1^{*-}$. Nous avons tout d'abord le fait élémentaire suivante

Fait 2.16 *Les suites* $(A_n)_{n\geq 1}, (A_n^*)_{n\geq 1}, (\tau_n^+)_{n\geq 1}, (\tau_n^{*+})_{n\geq 1}, (D_n)_{n\geq 1}, (D_n^*)_{n\geq 1}, (\tau_n^-)_{n\geq 1}$ *et* $(\tau_n^{*-})_{n\geq 1}$ *sont des suites de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.*

Nous avons alors l'alternative suivante

Proposition 2.17 *La m.a.* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est de l'un des types suivants, qui s'excluent deux à deux :*

1. $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] < 1$ *; dans ce cas, on a* $\mathbb{E}[\tau^{*-}] < +\infty$ *(et en particulier* $\mathbb{P}[\tau^{*-} < +\infty] = 1$*) et la m.a.* $(S_n)_{n\geq 0}$ *converge* $\mathbb{P}$*-presque sûrement vers* $-\infty$.
2. $\mathbb{P}[\tau^{*-} < +\infty] < 1$ *; dans ce cas on a* $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ *(et en particulier* $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$*) et la m.a.* $(S_n)_{n\geq 0}$ *converge* $\mathbb{P}$*-presque sûrement vers* $+\infty$.
3. $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$ *et* $\mathbb{P}[\tau^{*-} < +\infty] = 1$ *; on a alors* $\mathbb{E}[\tau^+] = \mathbb{E}[\tau^{*-}] = +\infty$ *et la m.a.* $(S_n)_{n\geq 0}$ *oscille* $\mathbb{P}$*-presque sûrement entre* $-\infty$ *et* $+\infty$*. On dit qu'elle est de* **type oscillant**.

Remarquer que l'énoncé mets en dualité les variables τ^+ et τ^{*-}, puisque $\mathbb{Z}^+$ et $\mathbb{Z}^{*-}$ sont complémentaires l'un de l'autre; nous avons un énoncé analogue avec le couple (τ^{*+}, τ^-).

Démonstration. Le raisonnement qui suit repose sur l'identité élémentaire suivante : pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}[S_n \geq 0, S_n \geq S_1, \cdots, S_n \geq S_{n-1}] = \mathbb{P}[S_n \geq 0, S_{n-1} \geq 0, \cdots, S_1 \geq 0].$$

(utiliser le fait que les n-uplets $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(X_n, , \cdots, X_1)$ ont la même loi). Le terme de gauche de cette égalité exprime le fait que n est un instant de record (au sens large) pour la m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$, il est donc égal à $\mathbb{P}\Big[\cup_{k\geq 1}[T_k^+ = n]\Big]$; celui de droite n'est autre que $\mathbb{P}[\tau^{*-} > n]$. On a donc, en sommant sur $n \geq 1$

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\Big[\cup_{k\geq 1}[T_k^+ = n]\Big] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[\tau^{*-} > n] = \mathbb{E}[\tau^{*-}].$$

Mais on peut écrire aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\Big[\cup_{k\geq 1}[T_k^+ = n]\Big] &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[T_k^+ = n] \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[T_k^+ = n] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[T_k^+ < +\infty] \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[\tau_1^+ < +\infty] \times \cdots \times \mathbb{P}[\tau_k^+ < +\infty] \\
&= \frac{1}{1 - \mathbb{P}[\tau_1^+ < +\infty]}.
\end{aligned}$$

On a finalement

$$\frac{1}{1 - \mathbb{P}[\tau^+ < +\infty]} = \mathbb{E}[\tau^{*-}]. \tag{1}$$

De façon duale, on obtient

$$\frac{1}{1 - \mathbb{P}[\tau^- < +\infty]} = \mathbb{E}[\tau^{*+}]. \tag{2}$$

Trois cas sont alors à considérer :

1. Supposons $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] < 1$; on a alors $\mathbb{E}[\tau^{*-}] < +\infty$ et donc $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1$. La m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ converge alors $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $-\infty$.
   En effet, notons d'abord que pour tout $k \geq 1$, on a $T_k^{*-} < +\infty$ $\mathbb{P}$-presque-sûrement, et que la suite $(S_{T_k^{*-}})_k$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $-\infty$, d'après la loi des grand nombres appliquée à la m.a. $(D_1^* + \cdots D_n^*)_{n\geq 1}$.
   De plus, pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}[T_k^+ < +\infty] = (\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty])^k$ avec $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] < 1$. Par conséquent, on a $\mathbb{P}\Big[\cup_k[T_k^+ = +\infty]\Big] = 1$, ce qui signifie que la variable $\sup_{n\geq 1} S_n$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement finie. On en déduit que la marche $(S_n)_{n\geq 0}$ est transiente; en effet, une marche récurrente et adaptée sur $\mathbb{Z}$ visite infiniment souvent et $\mathbb{P}$-presque sûrement tout site entier si bien que $\limsup_n S_n = +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. Ainsi, $(S_n)_{n\geq 0}$ ne visite qu'un nombre fini de fois tout sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$ et puisque $\sup_{n\geq 1} S_n$ est aussi $\mathbb{P}$-presque sûrement finie, la marche $(S_n)_{n\geq 0}$ ne visite qu'un nombre fini de fois tout sous-ensemble de la forme $\{k, k+1, k+2, \cdots, \}$. D'où le résultat.
2. Supposons $\mathbb{P}[\tau^{*-} < +\infty] < 1$; dans ce cas on a $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ (et en particulier $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$) et l'on veut montrer que la m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $+\infty$ par un raisonnement analogue au précédent. À noter que se présente une difficulté car dans certaine situations on a $A_n = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. (c'est par exemple le

cas pour la m.a ; au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$) ; on ne peut donc pas conclure que $S_n \to +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. en utilisant qu'il en est de même pour la suite $(A_1 + \cdots + A_n)_n$ puisque celle-ci est $\mathbb{P}$-p.s. nulle dans certaines situations. Par contre, on va utiliser le fait que $A_1^* + \cdots + A_n^* \to +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. grâce au résultat suivant

Fait 2.18 *On a*

(a) $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}[\tau^{*+} < +\infty] = 1$

(b) $\mathbb{E}[\tau^+ < +\infty] = +\infty \Leftrightarrow \mathbb{E}[\tau^{*+} = +\infty] = 1$

Démonstration. On a $\tau^{*+} \leq \tau^+$ $\mathbb{P}$-p.s. d'où l'implication de gauche à droite. Réciproquement, la suite $(T_n^{*+})_{n\geq 0}$ est une sous-suite de $(T_n^+)_{n\geq 0}$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}[\tau^{*+} > T_n^+] \leq \mathbb{P}[X_{T_1^+ +1} \leq 0, \cdots, X_{T_n^+ +1} \leq 0] \leq \mathbb{P}[X_1 \leq 0]^n$$

les variables $X_{T_1^+ +1}, \cdots, X_{T_n^+ +1}$ étant indépendantes. Comme $\alpha < 1$, et que la suite d'entiers $(T_n^+)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, on en déduit que $\mathbb{P}[\tau^{*+} = +\infty = 0$.
On obtient un énoncé analogue pour τ^- et τ^{*-}. La seconde assertion du lemme découle alors de l'identité (1) et de celle correspondante pour le couple (τ^{*+}, τ^-).

□

Ainsi, le fait que $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$ entraîne $\mathbb{P}[\tau^{*+} < +\infty] = 1$ et l'on peut donc reprendre l'argument du cas précédent pour conclure que $S_n \to +\infty \mathbb{P}$-p.s.

3. Supposons enfin $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$ et $\mathbb{P}[\tau^{*-} < +\infty] = 1$ (et donc $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1$ d'après le Fait 2.18) ; d'après l'identité (1) (et ses variantes !), on a $\mathbb{E}[\tau^+] = \mathbb{E}[\tau^{*-}] = +\infty$ et la m.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ visite $\mathbb{P}$-presque sûrement et infiniment souvent $\mathbb{Z}^{*+}$ et $\mathbb{Z}^{*-}$. En remarquant alors, grâce à la loi forte des grands nombres, que les sous-suites $(A_1^* + \cdots + A_n^*)_n$ et $(D_1^* + \cdots + D_n^*)_n$ convergent $\mathbb{P}$-presque sûrement respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$, on voit que $(S_n)_{n\geq 0}$ oscille en fait $\mathbb{P}$-presque sûrement entre $-\infty$ et $+\infty$.

□

Remarque. Les marches aléatoires relevant des cas 1 et 2 ci-dessus sont clairement transientes ; par contre, le cas 3 comprend des marches récurrentes mais aussi des marches transientes.

Étudions à présent plus précisément le cas où $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[X_1] > 0$. Nous avons la

Proposition 2.19 *Si* $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[X_1] > 0$, *alors* $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[A_1] < +\infty$ *(en particulier, les variables* τ_n^+ *et* A_n *sont* $\mathbb{P}$*-presque-sûrement finies).*

Démonstration. Sous ces hypothèse, on a $S_n \to +\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, et nous sommes dans l'alternative (2) la Proposition 2.17 ; il vient $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ et la suite $(A_1 + \cdots A_n)_n$ est alors une sous-suite de $(S_n)_n$. D' après la loi forte des grands nombres on a donc simultanément

$$\frac{S_{T_n^+}}{T_n^+} = \frac{A_1 + \cdots + A_n}{T_n^+} \to \mathbb{E}[X_1] \quad \text{et} \quad \frac{T_n^+}{n} \to \mathbb{E}[\tau^+] \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Il vient $\dfrac{A_1 + \cdots + A_n}{n} \to \mathbb{E}[X_1] \times \mathbb{E}[\tau^+]$ $\mathbb{P}$-presque sûrement et d'après la loi forte des grands nombres, on obtient la fameuse *formule de Wald* :

$$\mathbb{E}[A_1] = \mathbb{E}[X_1] \times \mathbb{E}[\tau^+].$$

En particulier $\mathbb{E}[A_1] < +\infty$.

□

De façon symétrique, lorsque $\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[X_1] < 0$, on a

$$\mathbb{E}[\tau^-] < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|D_1|] < +\infty.$$

Supposons à présent $\mathbb{E}[X_i] = 0$. Vérifions d'abord que $\mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1$; sinon, d'après la Proposition 2.17, on aurait $\mathbb{E}[\tau^+] < +\infty$ et la formule de Wald ci-dessus donnerait alors $\mathbb{E}[A_1] = 0 \times \mathbb{E}[\tau^+] = 0$, ce qui n'est pas possible. De la même façon, on a $\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = 1$. D'où la

Proposition 2.20 *Si* $\mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[X_1] = 0$ *(et bien sûr* $\mathbb{P}[X_1 = 0] \neq 1$*), alors*

$$\mathbb{P}[\tau^+ < +\infty] = \mathbb{P}[\tau^- < +\infty] = 1 \quad \text{et donc} \quad \mathbb{E}[\tau^+] = \mathbb{E}[\tau^-] = +\infty.$$

À noter cependant que dans ce cas, les variables A_1 et D_1 peuvent être d'espérance finie ou infinie ; dans le cas de la marche au plus proche voisin, on a $A_1 = 1$ et $D_1 = -1$ $\mathbb{P}$-p.s mais nous verrons dans le dernier paragraphe un exemple où $\mathbb{E}(A_1) = +\infty$ et $\mathbb{E}(D_1) = -\infty$.

2.4 Fluctuations de la marche au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$

Nous revenons ici au cas où $\mu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Les pas de la marche étant ± 1, on a nécessairement $D_1(\omega) = -1$ lorsque $\tau^-(\omega) < +\infty$; on en déduit immédiatement que τ^- (et de même τ^+) est à valeurs dans $2\mathbb{N} + 1 \cup \{\infty\}$.

Cherchons à estimer $\mathbb{P}(\tau_- = 2n+1)$. On a

$$[\tau_- = 2n+1] = [S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \cdots, S_{2n} = 0, X_{2n+1} = -1]$$

d'où $\mathbb{P}(\tau_- = 2n+1) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \cdots, S_{2n} = 0)$ avec

$$\mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \cdots, S_{2n} = 0)) = \frac{\sharp \mathcal{C}_{2n}}{2^{2n}}$$

où $\mathcal{C}_{2n}$ désigne l'ensemble des trajectoires de longueur $2n$ de la marche aléatoire au plus proche voisin qui restent suur $\mathbb{N}$ jusqu'à l'instant $2n$ et reviennent reviennent en 0 à cet instant :

$$\mathcal{C}_{2n} := \{(x_1, \cdots, x_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n} / \forall k \in \{0, \cdots, 2n\} \sum_{i=1}^{k} x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0.\}$$

Nous avons le

Fait 2.21 *On a* $\sharp \mathcal{C}_{2n} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

On en déduit de façon immédiate la

Proposition 2.22 *On a*

$$\mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \cdots, S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}.\ ^{(6)}$$

En particulier, il existe une constante $c > 0$ *telle que* $\mathbb{P}(\tau_- \geq n) \sim \dfrac{c}{\sqrt{n}}$ (7).

On a aussi le

Corollaire 2.23 *On a*

$$\mathbb{P}(S_1 \geq 1, S_2 \geq 1, \cdots, S_{2n-1} \geq 1, S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

L'événement $(S_1 \geq 1, S_2 \geq 1, \cdots, S_{2n-1} \geq 1, S_{2n} = 0)$ diffère du précédent en ceci que le premier retour en 0 se fait à l'instant $2n$; le premier pas est égal à 1, le dernier à -1 et le reste de la trajectoire correspond à un chemin $x_1, \cdots, x_{2n-2}$ de longueur $2n-2$ tel que $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0 \cdots, s_{2n-3} \geq 0, s_{2n-2} = 0$ où $s_i = x_1 + \cdots x_i$. On est ramené ainsi à la proposition précédente.

6. lorsque la marche est décentrée (de loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$) on obtient de la même façon $\mathbb{P}(\tau_- = 2n+1) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}$

7. on retrouve ainsi dans le cas de la marche au plus proche voisin que τ^- est d'espérance infinie, grâce à la formule $\mathbb{E}(\tau^-) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau^- \geq n)$.

Démonstration du Fait. On utilise le principe de réflexion d'André. Il y a $\binom{2n}{n}$ chemins $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_{2n})$ de longueur $2n$ qui reviennent en 0 au bout des $2n$ pas . Le chemin $\bar{x}$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_{2n}$ s'il passe par -1 : il existe alors $k \geq 0$ tel que $2k+1 \leq n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{2k+1} x_i = -1$, on note $k_{\bar{x}}$ le plus petit entier vérifiant cette condition et l'on peut associer à $\bar{x}$ le chemin $s(\bar{x}) = \tilde{x}$ de longueur $2n$ définie par

$$\tilde{x} = x_1, \cdots, x_{2k_{\bar{x}}+1}, -x_{2k_{\bar{x}}+2}, \cdots, -x_{2n}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{i=2k_x+2}^{2n} x_i = 1$, le chemin $\tilde{x}$ rejoint l'origine au point -2.

Réciproquement, l'application s fait correspondre à tout chemin $\tilde{y}$ de longueur $2n$ joignant 0 à -2 une boucle $\bar{y}$ de longueur $2n$, d'extrémités 0 et incluse dans $\mathbb{N}$. Le nombre de chemins de longueur $2n$ qui reviennent en 0 au bout des $2n$ pas en passant par -1 est donc égal à $\binom{2n}{n+1}$ si bien que

$$\sharp\mathcal{C}_{2n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□

À noter que l'événement $(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \cdots, S_{2n} = 0)$ s'écrit aussi $(\tau_- \geq 2n, S_{2n} = 0)$. Plus généralement, pour tout entier $k \geq -1$ fixé, on peut montrer qu'il existe $c_k > 0$ tel que pour tout entier n de même parité que k on ait

$$\mathbb{P}(\tau_- \geq n, S_n = k) \sim \frac{c_k}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

Application : le théorème limite local pour la marche aléatoire au plus proche voisin sur le groupe libre $\mathbb{F}_2$

On note $\mathbb{F}_2$ le groupe libre à 2 générateurs a et b ; $\mathbb{F}_2$ s'identifie à l'ensemble des mots finis et *réduits* $\bar{x} = x_1 \cdots x_k, k \geq 1$ en les lettres $x_i \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$, l'adjectif "réduit" signifiant que $x_{i+1} \neq x_i^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$; par convention, le "mot vide" correspond à l'élément neutre e du groupe. $\bar{x}$ est dit *admissible.* La loi de groupe $*$ sur $\mathbb{F}_2$ n'est autre que la "concaténation" des mots admissibles en un mot admissible, définie de façon inductive par

1. $\bar{x} * \bar{y} = x_1 \cdots x_n * y_1 \cdots y_m = x_1 \cdots x_{n-1} * y_2 \cdots y_m$ quand $x_n = y_1^{-1}$
2. $\bar{x} * \bar{y} = x_1 \cdots x_n * y_1 \cdots y_m = x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$ quand $x_n \neq y_1^{-1}$, et

Le graphe de Cayley associé à $\mathbb{F}_2$ est l'arbre régulier de valence 4.

Ce groupe $\mathbb{F}_2$ est engendré par a et b et l'on peut considérer sur $\mathbb{F}_2$ la marche aléatoire "gauche" $(\Pi_n)_n$ au plus proche voisin définie par

$$\Pi_0 = e \quad \text{et} \quad \Pi_{n+1} = \Pi_n * g_n$$

où $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mu = \frac{1}{4}(\delta_a + \delta_{a^{-1}} + \delta_b + \delta_{b^{-1}})$.

On veut estimer la probabilité $\mathbb{P}[\Pi_m = e]$ pour $m \geq 1$; on vérifie aisément que cette probabilité est nulle lorsque m est impair, on supposera donc $m = 2n$ par la suite.

Pour tout mot réduit $\bar{x}$, on note $|\bar{x}|$ sa longueur "de mots", égale au nombre de lettres $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ nécessaire pour décomposer $\bar{x}$ en un mot réduit ; on a

1. $\mathbb{P}(|\Pi_{n+1}| = 1) = 1$ lorsque $|\Pi_n| = 0$
2. $\mathbb{P}(|\Pi_{n+1}| = |\Pi_n| + 1) = 3/4$ et $\mathbb{P}(|\Pi_{n+1}| = |\Pi_n| - 1) = 1/4$ lorsque $|\Pi_n| \geq 1$

Ainsi, si l'on introduit une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de loi $\mu = \frac{1}{4}\delta_{-1} + \frac{3}{4}\delta_1$ et si l'on note $(S_n)_{n\geq 1}$ la marche aléatoire associée ($S_0 = 0$ et $S_{n+1} = S_n + X_n$), on vérifie que $\mathcal{L}(|\Pi_n|) = \mathcal{L}(|S_n|)$. On dit que $(|S_n|)_{n\geq 1}$ est la *marche aléatoire réfléchie au plus proche voisin sur* $\mathbb{N}$*, de loi* μ.

Pour estimer $\mathbb{P}[\Pi_m = e]$, il nous suffit donc d'évaluer $\mathbb{P}[|S_n| = 0]$.

Si on note v_1 le premier instant ≥ 1 auquel la marche $(S_n)_{n\geq 1}$ revient en 0, on a d'après le corollaire 2.23

$$\mathbb{P}(\Pi_1 \neq e, \cdots, \Pi_{2n-1} \neq e, \Pi_{2n} = e) = \mathbb{P}[v_1 = 2n] \sim \Big(\frac{3}{4}\Big)^{n-1} \frac{1}{4\sqrt{\pi}n^{3/2}}. \text{ [8]}$$

On peut affiner cette estimation et montrer que plus généralement, il existe $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\Pi_{2n} = e) \sim \Big(\frac{3}{4}\Big)^{n-1} \frac{c}{n^{3/2}} \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

2.5 Complément : une application de la factorisation de Wiener-Hopf

On utilisera dans ce paragraphe la *factorisation de Wiener-Hopf*, qui permet d'estimer la loi des variables S_{τ^+} et S_{τ^-} en fonction de celle des v.a. X_i. Pour tout $s \in [0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose

$$\chi(s,\lambda) := \mathbb{E}[s^{\tau^+} \exp(i\lambda S_{\tau^+}].$$

Nous avons l'identité suivante, dont la démonstration est délicate (nous renvoyons le lecteur aux livres de W. Feller ([2]) et Spitzer ([4]), où on pourra trouver des arguments variés pour l'obtention de cette formule) :

$$\chi(s,\lambda) = 1 - \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}[e^{i\lambda S_n}, S_n > 0]\Big) \quad \text{(factorisation de Wiener-Hopf)}$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à λ ; en $\lambda = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}(s,0) = i\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}[S_n 1_{[S_n>0]}]\Big)\exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{P}[S_n > 0]\Big). \tag{3}$$

On a $\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}(s,0) \longrightarrow i\mathbb{E}[S_{\tau^+}]$ lorsque $s \to 1$. D'autre part, d'après le théorème central limite, il vient

$$\mathbb{P}[S_n > 0] \to \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathbb{E}[S_n 1_{[S_n>0]}] = \mathbb{E}[\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} 1_{[S_n>0]}] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tag{4}$$

quand $n \to +\infty$. En notant que $\frac{1}{\sqrt{1-s}} = \sum_n a_n s^n$ avec $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ quand $n \to +\infty$, et $\log(1-s) = -\sum_{n\geq 1}\frac{s^n}{n}$, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{E}[S_n 1_{[S_n>0]}] \sim \frac{\sigma}{\sqrt{2(1-s)}} \tag{5}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\mathbb{P}[S_n > 0] = -\frac{1}{2}\log(1-s) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n > 0] - \frac{1}{2}\Big),$$

8. le terme $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ provenant du fait que la loi μ n'est pas centrée ici et que le coefficient de relativisation nécessaire est $4pq = \frac{3}{4}$ puisque $p = \frac{3}{4}$

lorsque $s \to 1$. On déduit alors de (3) que

$$\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(s,0) = i\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n>0]-\frac{1}{2}\Big)\Big)(1+\epsilon(s)),$$

ce qui s'écrit encore $\quad \exp -\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n>0]-\frac{1}{2}\Big)\Big) = -i\frac{\sqrt{2}}{\sigma}.\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(s,0)(1+\epsilon(s))$; lorsque $s\to 1$, le terme de droite de cette dernière égalité tend vers $\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\mathbb{E}[S_{\tau^+}] \in]0,+\infty]$, d'où

$$\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n>0]-\frac{1}{2}\Big)$$

existe, et appartient à $[-\infty,\infty[$. Le même raisonnement en remplaçant τ^+ par τ^- montre que

$$\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s^n}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n>0]-\frac{1}{2}\Big)$$

existe, et appartient à $]-\infty,\infty]$. Finalement $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n>0]-\frac{1}{2}\Big) = c\in\mathbb{R}$ et l'on a le

Théorème 2.24 *Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire associée. Si $\mathbb{E}[X_n^2]=\sigma^2<+\infty$ et $\mathbb{E}[X_n]=0$, alors la variable S_{τ^+} est intégrable et l'on a*

$$\mathbb{E}[S_{\tau^+}] = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\exp(-c),$$

avec $c := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\Big(\mathbb{P}[S_n>0]-\frac{1}{2}\Big)$.

Remarque 1. *L'utilisation du TCL dans (4) n'est peut être pas immédiate ; on peut utiliser le fait suivant*

Fait. *Soient $(\nu_n)_n$ une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ qui converge étroitement vers ν et ψ une fonction positive qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ telle que $\sup_n \mu_n(\psi)<+\infty$; alors, pour toute fonction borélienne ϕ dont l'ensemble des points de discontinuités est ν-négligeable, et telle que $\phi/\psi\to 0$ en $\pm\infty$, on a $\nu_n(\phi)\to\nu(\phi)$.*
On applique ce fait en prenant pour ν_n la loi de $S_n/\sigma\sqrt{n}$, pour ν la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et $\psi(x)=x^2$.

Remarque 2. *Pour obtenir les équivalents (5), on utilise le fait élémentaire suivant, qui est le "sens" facile d'un théorème taubérien général dont on trouvera un énoncé et sa démonstration dans le livre de W. Feller :*

Fait. *Soient $\sum_n a_n s^n$ et $\sum_n b_n s^n$ des séries entières à coefficients positifs et de rayon de convergence 1. Si $\frac{a_n}{b_n}\to 1$, on a*

$$\lim_{s\to 1}\frac{\sum_{n\geq 0}a_n s^n}{\sum_{n\geq 0}b_n s^n}=1.$$

Nous terminons ce paragraphe en citant un résultat classique, dont la démonstration utilise la factorisation de Wienner Hopf, et dont on trouvera une démonstration par exemple dans le livre de Spitzer [4].

Proposition 2.25 *Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une m. a. admettant des moments d'ordre 2 et centrée. Alors, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\mathbb{P}[\tau^+>n] = \frac{e^{c'}}{\sqrt{\pi}},$$

avec $c' := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{P}[S_n\leq 0]-1/2}{n}\in\mathbb{R}$.

2.6 Théorie du renouvellement sur $\mathbb{R}$

Le nom de la "théorie du renouvellement" vient du problème classique suivant. On considère que la durée de vie d'une ampoule peut être modélisée par une variable aléatoire positive de loi μ d'espérance finie m et l'on s'intéresse au nombre moyen $N([0,T])$ d'ampoules nécessaires durant un intervalle de temps de longueur T. On suppose dans un premier temps que les durées de vie $X_1, X_2, \cdots$ des ampoules successives sont des variables aléatoires indépendantes et de loi μ. Lorsque $T \to +\infty$ les fluctuations aléatoires s'estompent, et l'on s'attend à ce que $N([0,T])$ soit équivalent à T/m ; c'est en substance l'énoncé du théorème du renouvellement sur $\mathbb{R}^+$.
Cet énoncé reste valable lorsque les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots$ ne sont pas forcément positives mais admettent un moment d'ordre 1 et une espérance strictement positive.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifiant la condition suivante $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $m = \mathbb{E}[X_1] > 0$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$. On note G_μ le groupe engendré par le support de μ ; c'est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{R}$ sur lequel "vie" la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$. Le nombre moyen $N([0,T])$ de termes de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ dans l'intervalle $[0,T]$ peut s'exprimer de la façon suivante

$$N([0,T]) = \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[0,T]}(S_n)].$$

Pour tout $\alpha > 0$, nous notons l_α la mesure uniforme sur $\alpha\mathbb{Z}$ qui donne la masse α à chaque point du réseau $\alpha\mathbb{Z}$ et l_0 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Nous avons le

Théorème 2.26 *Si $G_\mu = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$ alors $N([0,T]) \sim T/\alpha m$ lorsque $T \to +\infty$. Sinon G_μ est dense dans $\mathbb{R}$ et l'on a $N([0,T]) \sim T/m$.*

Une démonstration directe de ce résultat est proposée en exercice.
On peut de façon plus précise étudier le nombre moyen $N(I)$ de termes de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ dans un intervalle I donné ; cette question n'est en fait pertinente que lorsque l'intervalle I est "poussé" vers $\pm\infty$, ce qui revient intuitivement à observer la marche aléatoire en régime stationnaire On s'intéresse donc dans ce qui suit au comportement lorsque $a \to \pm\infty$ de la quantité

$$\mathbb{E}[N(a+I)] = E[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{a+I}(S_n)]$$

pour tout intervalle I borné.
Remarquons que l'application qui à tout borélien $B \subset \mathbb{R}$ associe le réel

$$G_a(B) = E[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{a+B}(S_n)] = E[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_B(-a + S_n)]$$

est une mesure à valeurs dans $[0, +\infty]$. Comme $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[X_1] > 0$, la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ est transiente et $G_a(.)$ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$; on redémontrera cette propriété au cours de la démonstration du théorème du renouvellement.

Le théorème 2.26 est une conséquence directe du résultat suivant, via un argument de type Cesaro :

Théorème 2.27 *Sous l'hypothèse $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[X_1] = m > 0$, la famille de mesure $(G_a(.))_{a\in\mathbb{R}}$ converge vaguement vers la mesure nulle lorsque a tend vers $-\infty$; lorsque $a \to +\infty$ on a*

- si $G_\mu = \alpha\mathbb{Z}$ alors $G_a(.)$ converge vaguement vers l_α/m

- si G_μ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $G_a(.)$ converge vaguement vers l_0/m.

Nous allons démontrer ce théorème sous l'hypothèse un peu plus forte

$$\mathbb{E}[|X_1|^{1+\delta}] < +\infty$$

pour un certain $\delta \in]0,1[$. Nous renvoyons le lecteur au livre de L. Breiman pour le cas où seule la condition de moment d'ordre 1 est satisfaite ; la démonstration que nous donnons est plus simple et illustre bien le phénomène d'identité approché sous-jacent. Nous supposerons dans un premier temps $G_\mu = \mathbb{R}$, le cas arithmétique est traité en fin de paragraphe.
Rappelons qu'une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ converge vaguement vers μ si pour toute fonction φ continue et à support compact sur $\mathbb{R}$ la suite $(\mu_n(\varphi))_{n\geq 1}$ converge vers $\mu(\varphi)$.
Au lieu de travailler avec des fonctions à support compact nous allons utiliser une classe de fonctions plus adaptée à notre problème. Il suffira d'établir le théorème précédent pour cette classe de fonctions en vertu du lemme suivant
Lemme 1- *Soit $\mathcal{H}$ une classe de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ contenant un élément strictement positif h_0 et stable sous l'action du produit par les exponentielles $x \mapsto e^{itx}$ pour tout réel t. Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$ pour laquelle les fonctions de $\mathcal{H}$ sont μ-intégrables.*
Si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est une suite de mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}$ telle que $(\mu_n(h))_{n\geq 1}$ converge vers $\mu(h)$ pour toute fonction $h \in \mathcal{H}$, alors $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers μ.
Démontrons ce lemme. Notons ν et $\nu_n, n \geq 1$, les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ définies par

$$\nu_n(B) = \frac{1}{\mu(h_0)} \int_B h_0(x)\mu(dx) \quad \text{et} \quad \nu_n(B) = \frac{1}{\mu_n(h_0)} \int_B h_0(x)\mu_n(dx)$$

pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{itx}h_0(x)$ appartient à $\mathcal{H}$ et donc $(\nu_n(e^{itx}))_{n\geq 1}$ converge vers $(\nu(e^{itx}))_{n\geq 1}$; en d'autres termes, $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement vers ν. En écrivant $\mu_n(\varphi) = \mu_n(h_0)\nu_n(\frac{\varphi}{h_0})$ pour toute fonction φ continue et à support compact sur $\mathbb{R}$, on montre que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge vaguement vers μ.
□
La classe $\mathcal{H}$ que nous considérons ici est celle des fonctions h de la forme $x \mapsto h_0(x)e^{itx}$ où h_0 est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h_0(x) = x \mapsto \frac{sin^2(x) + sin^2(\alpha x)}{x^2} \quad \text{avec } \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

Puisque α est irrationnel, cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$; sa transformée de Fourier est la fonction à support compact

$$t \mapsto \frac{\pi}{2}(2 - |t|)1_{[-2,2]}(t) + \frac{\pi}{2}(2\alpha - |t|)1_{[-2\alpha,2\alpha]}(t).$$

Fixons $h \in \mathcal{H}$ et considérons la quantité $\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{+\infty} h(-a + S_n)]$; dans un premier temps, il faut s'assurer que la variable aléatoire $|\sum_{n=0}^{+\infty} h(-a + S_n)|$ est d'espérance finie, il suffit en fait de le faire pour $h = h_0$ et ceci sera établi au cours de la démonstration. A cet effet, mais aussi pour des raisons techniques d'intervertions de signe $\int$ et $\sum$, nous sommes amenés à considérer les quantités $\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a + S_n)]$ où $0 < r < 1$. En utilisant la formule d'inversion de Fourier on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n h(-a + S_n)] &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(t)e^{-ita}\hat{\mu}(t)^n dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}(t)}{1 - r\hat{\mu}(t)} e^{-ita} dt.
\end{aligned}$$

Il nous faut dans un premier temps étudier le comportement lorsque $r \to 1$ de cette intégrale. Le choix de l'ensemble $\mathcal{H}$ va nous permettre de contrôler le terme $\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(t)}$ lorsque t n'appartient pas à un voisinage de l'origine.

Lemme 2 - *Si $G_\mu = \mathbb{R}$ alors $\hat{\mu}(t) = 1$ si et seulement si $t = 0$. Si $G_\mu = \alpha\mathbb{Z}$ alors $\hat{\mu}(t) = 1$ si et seulement si $t \in \frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$.*

Démonstration- On a $\hat{\mu}(t) = 1$ si et seulement si $tX_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ $\mathbb{P}-p.s.$ Lorsque $G_\mu = \mathbb{R}$ ceci entraîne $t = 0$, sinon $G_\mu = \alpha\mathbb{Z} \subset \frac{2\pi}{t}\mathbb{Z}$ d'où $t \in \frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$.

□

Le comportement au voisinage de 0 de $t \mapsto \hat{\mu}(t)$ dépend de l'existence de moments pour μ. Du fait que pour tout $\delta \in]0,1]$ la fonction $u \mapsto \frac{e^{iu}-1-iu}{|u|^{1+\delta}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ on déduit le

Lemme 3- *Sous l'hypothèse $\mathbb{E}[|X_1|^{1+\delta}] < +\infty$ pour un $\delta \in]0,1[$ on a*

$$\hat{\mu}(t) = 1 + i\mathbb{E}[X_1]t + |t|^{1+\delta}O(t)$$

où $O(t)$ est bornée au voisinage de 0.

Pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons décomposer l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}(t)}{1-r\hat{\mu}(t)}e^{-ita}dt$ en

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \frac{\hat{h}(t)}{1-r\hat{\mu}(t)}e^{-ita}dt \quad + \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Big(\frac{\hat{h}(t)}{1-r\hat{\mu}(t)} - \frac{\hat{h}(0)}{1-r(1+imt)}\Big)e^{-ita}dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\hat{h}(0)}{1-r(1+imt)}e^{-ita}dt$$

D'après le lemme 3 il existe des constantes strictement positives ϵ et C telles que pour tout $r \in [1/2, 1[$ et $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ on ait

$$|1 - r\hat{\mu}(t)| \geq |t|/C \quad \text{et} \quad |\hat{\mu}(t) - 1 - imt| \leq C|t|^{1+\delta}.$$

Quitte à modifier C on peut supposer que pour tout $r \in [1/2, 1[$ et $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ on a aussi

$$|1 - r(1 + imt)| \geq |t|/C.$$

En utilisant le fait que $\hat{h}$ est Lipschitz continue, on déduit de ces estimations que la fonction $t \mapsto \frac{\hat{h}(t)}{1-r\hat{\mu}(t)} - \frac{\hat{h}(0)}{1-r(1+imt)}$ est majorée à une constante multiplicative près par $1/|t|^{1-\delta}$ sur $[-\epsilon, \epsilon]$ uniformément par rapport à $r \in [1/2, 1[$. Par ailleurs, comme $G_\mu = \mathbb{R}$, la fonction $\hat{\mu}$ est de module < 1 sur tout compact ne contenant pas 0 ; ainsi ; $t \mapsto \frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}$ est bornée sur $[-\epsilon, \epsilon]^c$, uniformément par rapport à $r \in [1/2, 1[$. En utilisant le théorème de convergence dominée on a alors

$$\lim_{r\to1}\int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \frac{\hat{h}(t)}{1-r\hat{\mu}(t)}e^{-ita}dt = \int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \frac{\hat{h}(t)}{1-\hat{\mu}(t)}e^{-ita}dt$$

et

$$\lim_{r\to1}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Big(\frac{\hat{h}(t)}{1-r\hat{\mu}(t)} - \frac{\hat{h}(0)}{1-r(1+imt)}\Big)e^{-ita}dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\Big(\frac{\hat{h}(t)}{1-\hat{\mu}(t)} + \frac{\hat{h}(0)}{imt}\Big)e^{-ita}dt$$

les fonctions $t \mapsto \frac{\hat{h}(t)}{1-\hat{\mu}(t)}$ et $t \mapsto \frac{\hat{h}(t)}{1-\hat{\mu}(t)} + \frac{\hat{h}(0)}{imt}$ étant intégrables respectivement sur $[-\epsilon, \epsilon]c$ et $[-\epsilon, \epsilon]$. Lorsque $a \to \pm\infty$, ces intégrales tendent vers 0 d'après le lemme de Riemann-Lebesgue.

Décomposons maintenant le terme résiduel $I(r, a) = \frac{\hat{h}(0)}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{1}{1-r(1+imt)}e^{-ita}dt$ en $I_1(r)+$

$I_2(r,a)+I_3(r,a)$ avec

$$\begin{array}{rcl} I_1(r) &=& \dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi}\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{1}{1-r(1+imt)}dt \\ I_2(r,a) &=& \dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi}\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\cos(ta)-1}{1-r(1+imt)}dt \\ \text{et}\quad I_3(r,a) &=& -\dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi}\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{i\sin(ta)}{1-r(1+imt)}dt. \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} I_1(r) &=& \dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi}\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{1-r}{(1-r)^2+m^2t^2}dt+im\frac{\hat{h}(0)}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{t}{(1-r)^2+m^2t^2}dt \\ &=& \dfrac{\hat{h}(0)}{rm\pi}\arctan\Big(\dfrac{mr\epsilon}{1-r}\Big) \end{array}$$

l'intégrale $\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{t}{(1-r)^2+m^2t^2}dt$ étant nulle puisque l'intégrande est impaire. Ainsi $\lim_{r\to 1} I_1(r)=\dfrac{\hat{h}(0)}{2m}$.

Par ailleurs $\lim_{r\to 1} I_2(r,a)=\dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi}\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\cos(ta)-1}{imt}dt=0$, cette dernière intégrale est nulle car l'intégrande $t\mapsto\dfrac{\cos(ta)-1}{t}$ est impaire.

Enfin $I_3(r,a)$ converge vers $\dfrac{\hat{h}(0)}{2\pi m}\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\sin(ta)}{t}dt$ lorsque $r\to 1$; cette dernière intégrale tend vers $\dfrac{\hat{h}(0)}{2m}$ lorsque $a\to+\infty$ et vers $-\dfrac{\hat{h}(0)}{2m}$ lorsque $a\to-\infty$.

En conclusion, on a

$$\lim_{a\to+\infty}\lim_{r\to 1}\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}r^n h(-a+S_n)\Big]=\frac{\hat{h}(0)}{m}\quad\text{et}\quad\lim_{a\to-\infty}\lim_{r\to 1}\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}r^n h(-a+S_n)\Big]=0.$$

Considérons maintenant le cas où μ est arithmétique c'est-à-dire $G_\mu=\alpha\mathbb{Z}$; pour simplifier les notations nous supposons $\alpha=1$. La fonction $\hat{\mu}$ est alors $2\pi-$périodique. Il suffit aussi dans ce cas de prendre pour "fonction test" h l'indicatrice d'un point x de $\alpha\mathbb{Z}$; on obtient

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}r^n 1_{\{x\}}(-a+S_n)\Big]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-r\hat{\mu}(t)}e^{-it(a+x)}dt$$

et la fonction $|1-\hat{\mu}|$ est strictement positive sur $[-\pi,\pi]-\{0\}$. En reprenant la démarche précédente on obtient de la même façon

$$\lim_{a\to+\infty}\lim_{r\to 1}\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}r^n 1_{\{x\}}(-a+S_n)\Big]=\frac{1}{m}\quad\text{et}\quad\lim_{a\to-\infty}\lim_{r\to 1}\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}r^n 1_{\{x\}}(-a+S_n)\Big]=0.$$

□

Références

[1] Durrett R. *Probability : Theory and Examples*, Duxburry Press, (1995).

[2] Feller W. *An introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, J. Wiley, (1970).

[3] Revuz D. *Markov chains*, North Holland, (1984)

[4] Spitzer F. *Principles of random walks* , Springer, (1964)

[5] Woess *Denumerable Markov Chains* , EMS, (2009)