AUTOUR DE L'EXPOSANT DE POINCARÉ D'UN GROUPE KLEINIEN

par Marc PEIGNÉ *)

RÉSUMÉ. Nous nous intéressons aux exposants de Poincaré des groupes discrets d'isométries d'une variété riemannienne complète, simplement connexe et à courbures sectionnelles strictement négatives et pincées. Nous présentons quelques résultats essentiels et quelques outils classiques utiles dans ce domaine.

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit X une variété riemannienne complète de dimension N, simplement connexe et à courbures sectionnelles K pincées $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$; nous imposerons la condition de normalisation $a = 1$. Nous fixons une origine o de X ; la distance entre deux points x et y de X est notée $d(x,y)$.

Le bord visuel ∂X de X est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons asymptotes ; il permet de compactifier l'espace X, en d'autres termes la topologie induite par la distance d sur X s'étend à l'espace $X \cup \partial X$ de façon à le rendre compact. L'ensemble ∂X peut être muni d'une distance construite à partir de d et compatible avec la topologie induite par celle de $X \cup \partial X$. Pour cela, pour tous $\xi \in \partial X$ et $x \in X$, nous notons $(\xi_x(t))_{t\geq 0}$ le rayon géodésique issu de x et d'extrémité ξ ; la fonction de Busemann $B_\xi(\cdot,\cdot)$ est alors définie par :

$$\forall x, y \in X \quad B_\xi(x,y) = \lim_{t\to+\infty} t - d(y, \xi_x(t))$$

Cette fonction a été introduite par H. Busemann dans [7] ; l'existence de la limite ci-dessus découle du fait que la fonction $t \mapsto t - d(y, \xi_x(t))$ est croissante et majorée sur $\mathbf{R}^+$, conséquence directe de l'inégalité triangulaire.

*) LMPT, UMR 6083, Faculté des Sciences et Techniques, Parc de Grandmont, 37200 Tours. mail : peigne@lmpt.univ-tours.fr

La variété X étant simplement connexe, on a plus généralement $B_\xi(x,y) = \lim_{\substack{z\in X\\ z\to\xi}} d(x,z) - d(y,z)$. On note $(\cdot|\cdot)_x$ le produit de Gromov (vu de x) sur ∂X défini par :

$$\forall \xi,\eta \in \partial X \quad (\xi|\eta)_x := \lim_{\substack{y,z\in X\\ y\to\xi, z\to\eta}} \frac{d(x,y)+d(x,z)-d(y,z)}{2},$$

qui peut s'exprimer plus directement à l'aide de la fonction de Busemann comme suit : $(\xi|\eta)_x = \frac{B_\xi(x,z)+B_\eta(x,z)}{2}$ pour tout point z sur la géodésique $(\xi\eta)$ reliant les points ξ et η. Il découle alors des travaux de M. Bourdon [4] et du fait que la courbure est majorée par $-a^2=-1$ que la fonction d_x définie par

$$\forall \xi,\eta \in \partial X \quad d_x(\xi,\eta) := e^{-(\xi|\eta)_x}$$

est un distance sur ∂X, compatible avec la topologie définie précédemment et vérifiant la propriété remarquable suivante :

$$\forall x\in X, \exists C_x \geq 1, \forall \xi,\eta\in\partial X \quad \frac{e^{-d\left(x,(\xi\eta)\right)}}{C} \leq d_x(\xi,\eta) \leq Ce^{-d\left(x,(\xi\eta)\right)}.$$

L'action d'une isométrie γ de X s'étend à ∂X de façon conforme relativement aux métriques d_x, le coefficient de conformité en $\xi\in\partial X$ étant donné par

$$|\gamma'(\xi)|_x := \lim_{\eta\to\xi} \frac{d_x(\gamma\cdot\xi,\gamma\cdot\eta)}{d_x(\xi,\eta)} = e^{-B_\xi(\gamma^{-1}\cdot x,x)}.$$

De l'équation de cocycle satisfaite par la fonction de Busemann découle la formule remarquable suivante, dite des "accroissements finis"

$$\forall \xi,\eta\in\partial X \quad d_x(\gamma\cdot\xi,\gamma\cdot\eta) = \sqrt{|\gamma'(\xi)|_x|\gamma'(\eta)|_x}\; d_x(\xi,\eta). \tag{1}$$

Une isométrie $\gamma\neq 1$ de X est d'un des 3 types suivants, selon la nature de son ensemble de points fixes :

- elle est *elliptique* lorsqu'elle fixe (au moins) un point $x_\gamma\in X$;
- elle est *parabolique* lorsqu'elle fixe un unique point $\xi_\gamma\in\partial X$; ce point est attractif sur $X\cup\partial X$ puisque pour tous $x\in X$ et $\xi\in\partial X$ on a

  $$\xi_\gamma = \lim_{n\to\pm\infty}\gamma^n\cdot x = \lim_{n\to\pm\infty}\gamma^n\cdot\xi,$$

  la convergence étant uniforme sur les compacts de $X\cup\partial X\setminus\{\xi_\gamma\}$;
- elle est *hyperbolique* lorsqu'elle fixe deux points ξ_γ^- et ξ_γ^+ de ∂X ; le point noté ξ_γ^+ est dit *attractif* puisqu'il vérifie

  $$\xi_\gamma^+ = \lim_{n\to+\infty}\gamma^n\cdot x = \lim_{n\to+\infty}\gamma^n\cdot\xi$$

pour tous $x \in X$ et $\xi \in \partial X \setminus \{\xi_\gamma^-\}$, la convergence étant uniforme sur les compacts de $X \cup \partial X \setminus \{\xi_\gamma^-\}$; le point noté ξ_γ^- est quant à lui dit *répulsif* puisque

$$\xi_\gamma^- = \lim_{n \to +\infty} \gamma^{-n} \cdot x = \lim_{n \to +\infty} \gamma^{-n} \cdot \xi$$

pour tout $x \in X$ et $\xi \in \partial X \setminus \{\xi_\gamma^+\}$, la convergence étant uniforme sur les compacts de $X \cup \partial X \setminus \{\xi_\gamma^+\}$.

Soit E un sous-ensemble de ∂X, on note $E \overset{\Delta}{\times} E$ le sous-ensemble de $E \times E$ privé des points de la diagonale. Nous identifions le fibré unitaire tangent $T^1 X$ de l'espace X avec $\partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X \times \mathbf{R}$ en associant à un vecteur tangent v basé en $x \in X$ le triplet (ξ^-, ξ^+, r) où $\xi^- = v(-\infty)$ et $\xi^+ = v(+\infty)$ sont les extrémités de la géodésique passant par v et $r = B_{\xi^+}(x, o)$. Dans ces coordonnées, l'action d'une isométrie γ de X est donnée par

$$\gamma \cdot (\xi^-, \xi^+, r) = \big(\gamma \cdot \xi^-, \gamma \cdot \xi^+, r - B_{\xi^+}(\gamma^{-1} \cdot o, o)\big)$$

tandis que le flot géodésique $(\tilde{g}_t)_{t \in \mathbf{R}}$ agit sur $T^1 X$ par

$$\tilde{g}_t \cdot (\xi^-, \xi^+, r) = (\xi^-, \xi^+, r - t).$$

Nous nous intéressons dans ce qui suit à une classe particulière de groupes d'isométries de X et introduisons à cet effet la

DÉFINITION-NOTATION. Un groupe Γ d'isométries de X préservant l'orientation est dit *kleinien* s'il est infini et discret. Nous notons M la variété quotient $\Gamma \backslash X$.

Nous supposerons pour simplifier que Γ est sans torsion c'est-à-dire que ses éléments sont des isométries hyperboliques ou paraboliques; la variété quotient M admet alors un espace tangent en chacun de ses points.

L'orbite $\Gamma \cdot o$ s'accumule sur ∂X ; l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est appelé *ensemble limite de* Γ et est noté $L(\Gamma)$. Cet ensemble contient $1, 2$ ou une infinité non dénombrable de points; dans le premier cas, le groupe Γ ne contient que des isométries paraboliques fixant le même point de ∂X, on dit qu'il est parabolique, dans le second cas il est monogène et engendré par une isométrie hyperbolique et dans le dernier cas, il est dit *non élémentaire* et contient en particulier des sous-groupes libres de Schottky (cette classe de groupes est introduite au paragraphe 2.2 et étudiée dans le chapitre du présent ouvrage rédigé par J.F. Quint).

L'action du flot géodésique $(\tilde{g}_t)_t$ sur $T^1 X \simeq \partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X \times \mathbf{R}$ commute avec celle de Γ et définit par passage au quotient le *flot géodésique* $g = (g_t)_{t \in \mathbf{R}}$ sur le fibré unitaire tangent T^1M de la variété M. Si l'une des deux extrémités d'une géodésique de X n'appartient pas à l'ensemble limite de Γ, celle-ci se projette sur une géodésique qui part à l'infini dans la variété M ; on restreindra donc l'étude du flot géodésique $(g_t)_t$ à son ensemble non errant $\Omega \subset T^1M$ défini par $\Omega := \Gamma \Big\backslash \Big(L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma) \times \mathbf{R}\Big)$. Lorsque la variété M est compacte, il en est de même pour Ω et le groupe Γ est dit *cocompact*. Lorsque Ω est compact mais que M ne l'est pas, on dit que Γ est *convexe-cocompact*. Les groupes kleiniens ne sont pas tous convexe-cocompacts, loin s'en faut : citons par exemple les groupes Γ dit *géométriquement finis*, que nous étudions de façon approfondie au paragraphe 5, l'ensemble Ω correspondant n'est plus compact dès que Γ possède des éléments paraboliques mais il reste cependant contenu dans une sous-variété de volume fini.

Ce texte ne se veut pas exhaustif du sujet, le choix des thèmes qui y sont évoqués peut sembler arbitraire ; il a été guidé par la mise en lumière de certains arguments très simples mais puissants qui aboutissent à des estimations non triviales et dont l'auteur de ces lignes a étendu le champ d'applications. En particulier, nous n'étudierons pas les propriétés du flot géodésique $(g_t)_t$, mais il faut garder à l'esprit qu'un grand nombre de questions qui seront évoquées ici, comme celle de la divergence de Γ, trouvent toute leur pertinence au travers de leurs conséquences sur la dynamique du flot géodésique $(g_t)_t$; nous renvoyons le lecteur au mémoire de T. Roblin [30] pour un exposé très riche de cet aspect du sujet.

NOTATION 1.1. Soient f et g deux fonctions de $\mathbf{R}^+$ ou $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}^+$; on écrit $f \overset{c}{\preceq} g$ (ou plus simplement $f \preceq g$) lorsqu'il existe une constante $c > 0$ telle que $f(R) \leq cg(R)$ pour R suffisamment grand. La notation $f \overset{c}{\asymp} g$ (ou plus simplement $f \asymp g$) signifie $f \overset{c}{\preceq} g \overset{c}{\preceq} f$.

2. ENTROPIE VOLUMIQUE ET EXPOSANT DE POINCARÉ

Pour tout point $x \in X$, on note $\mathcal{B}(x, R)$ la boule fermée de X de centre x et de rayon R. Introduisons tout d'abord une quantité géométrique qui joue un rôle important dans le contexte des variétés à courbure négative :

DÉFINITION 2.1. L'entropie volumique, notée $\mathrm{H_{vol}}(X)$, de la variété X est égale au taux de croissance exponentielle du volume des boules de X c'est-à-dire

$$\mathrm{H_{vol}}(X) := \limsup_{R\to+\infty} \frac{\mathrm{Ln}\,\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(x,R))}{R}.$$

où $\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(x,R)$ désigne le volume de la boule de centre x et de rayon $R > 0$.

Notons que cette quantité ne dépend pas du point x choisi. De l'hypothèse de pincement, on déduit que $a(N-1) \le \mathrm{H_{vol}}(X) \le b(N-1)$ où N est la dimension de la variété [14]. En particulier, $\mathrm{H_{vol}}(X)$ est finie.

Considérons à présent un groupe kleinien Γ et sa fonction de croissance N_Γ (appelée aussi fonction "orbitale" [29]) définie par :

$$\forall x,y \in X, \forall R > 0 \quad N_\Gamma(x,y,R) := \sharp\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\cdot y \in \mathcal{B}(x,R)\}.$$

On écrira pour simplifier $N_\Gamma(R) := N_\Gamma(o,o,R)$; pour tout $R \ge d(o,x)+d(o,y)$, on a $N_\Gamma(x,y,R-d(o,x)-d(o,y)) \le N_\Gamma(R) \le N_\Gamma(x,y,R+d(o,x)+d(o,y))$, si bien que le taux de croissance exponentielle de la fonction $N_\Gamma(x,y,\cdot)$ ne dépend pas du choix de x et y ; nous introduisons à cet effet la

DÉFINITION 2.2. L'exposant de Poincaré $\delta(\Gamma)$ du groupe kleinien Γ est égal au taux de croissance exponentielle de la fonction $R \mapsto N_\Gamma(R)$ c'est-à-dire

$$\delta(\Gamma) := \limsup_{R\to+\infty} \frac{\mathrm{Ln}\, N_\Gamma(R)}{R}. \tag{2}$$

Le groupe Γ étant discret, il agit proprement discontinuement sur X ; ses éléments étant des isométries de X, on en déduit aisément que $\delta(\Gamma) \le \mathrm{H_{vol}}(X)$. Ainsi, l'exposant $\delta(\Gamma)$ est fini.

L'exposant $\delta(\Gamma)$ est aussi appelé *exposant critique* ou *exposant de convergence* de Γ puisque c'est en $\delta(\Gamma)$ que la *série de Poincaré* $P_\Gamma(x,y,s)$ définie par

$$\forall x,y \in X, \forall s \ge 0 \quad P_\Gamma(x,y,s) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma\cdot y)} \tag{3}$$

modifie son comportement : elle diverge en effet pour $s < \delta(\Gamma)$ et converge pour $s > \delta(\Gamma)$. En $s = \delta(\Gamma)$, la série de Poincaré peut converger ou diverger selon la nature de Γ, cela fera l'objet du prochain paragraphe.

On considère aussi les "anneaux " de X définis par

$$\mathcal{A}(x,R,\Delta) := \{y \in X / R-\Delta \le d(x,y) \le R+\Delta\}$$

pour tous $x \in X$ et $R, \Delta > 0$ et la fonction de comptage correspondante n_Γ définie par :

$$\forall x, y \in X, \forall R, \Delta > 0 \quad n_\Gamma(x, y, R, \Delta) := \sharp\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot y \in \mathcal{A}(x, R, \Delta)\}$$

(avec la notation simplifiée $n_\Gamma(R, \Delta) := n_\Gamma(o, o, R, \Delta)$).

Le taux de croissance exponentielle de cette fonction ne dépend ni des points x, y ni de Δ puisque l'on a

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{\mathrm{Ln}\, n_\Gamma(x, y, R, \Delta)}{R} = \limsup_{R \to +\infty} \frac{\mathrm{Ln}\, N_\Gamma(R)}{R}$$

grâce au lemme suivant :

LEMME 2.3. *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels > 0 telle que $\sum_n u_n = +\infty$; on pose $U_n := u_0 + \cdots + u_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors, pour tout $s > 0$, les séries $\sum_n u_n e^{-sn}$ et $\sum_n U_n e^{-sn}$ convergent ou divergent simultanément; en particulier, elles ont le même exposant de convergence u, donné par*

$$u := \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Ln}\, u_n = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Ln}\, U_n \geq 0.$$

Preuve. Pour tout $s > 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n e^{-sn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big) e^{-sn} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \Big(\sum_{n=k}^{+\infty} e^{-sn}\Big) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k e^{-sk}$$

d'où le résultat. □

2.1 EXEMPLES

- Soit h est isométrie hyperbolique de X ; l'exposant de Poincaré du groupe $\langle h \rangle$ engendré par h est nul (dans ce cas, la "limsup" est en fait une limite et la série de Poincaré diverge en $\delta(\langle h \rangle) = 0$).
- Notons p l'isométrie parabolique $z \mapsto z + 1$ du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$; un calcul explicite en géométrie hyperbolique donne

$$d(i, p^n \cdot i) = d(i, i + n) = 2\,\mathrm{Ln}\, n + O(1)$$

  si bien que l'exposant de $\langle p \rangle$ vaut $\frac{1}{2}$. La "limsup" est ici encore une limite et la série de Poincaré de $\langle p \rangle$ diverge en $1/2$. Remarquons que si $\mathbf{H}^2$ est remplacé par une variété à courbure constante égale à $-b^2$, l'exposant de Poincaré du groupe $\langle p \rangle$ vaut $b/2$.

- On peut modifier la métrique hyperbolique de $\mathbf{H}^2$ de façon à avoir des larges bandes $\{z : a_n \leq \mathrm{Im} z \leq b_n\}$ deux 2 à deux disjointes, avec $b_n < a_{n+1}$, où la métrique est alternativement à courbure $-b^2$ ou $-a^2 = -1$ et comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ entre deux bandes consécutives. Lorsque la largeur $b_n - a_n$ des bandes croît suffisamment vite (auquel cas il en est de même pour la suite $(a_{n+1} - b_n)_n$ afin que la courbure reste pincée), on aura
$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Ln} N_{\langle p\rangle}(R) = a/2 \qquad < \qquad \limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Ln} N_{\langle p\rangle}(R) = b/2.$$
- Si Γ est un groupe cocompact d'isométries de $\mathbf{H}^d, d \geq 2$, son exposant de Poincaré vaut $d-1$; il en est de même en courbure variable, la valeur $d-1$ étant alors remplacée par l'entropie volumique de X et la "limsup" est une limite dans ce cas. Ce résultat est du à A. Manning [18] qui a démontré aussi que l'exposant de Poincaré d'un tel groupe coïncide avec l'entropie topologique du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la variété compacte considérée.
L'argument d'A. Manning a été repris par G. Robert [28] pour étudier la croissance des groupes hyperboliques; précisons en les grandes lignes. On choisit un domaine fondamental $\mathcal{D}$ pour l'action de Γ, domaine que l'on peut supposer relativement compact et dont on note Δ le diamètre; on a alors, pour tout $R > 0$
$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma/d(o,\gamma\cdot o)\leq R-\Delta} \gamma\cdot\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(o,R) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma/d(o,\gamma\cdot o)\leq R+\Delta} \gamma\cdot\mathcal{D}.$$
L'égalité $\mathrm{H}_{\mathrm{vol}}(X) = \delta(\Gamma)$ s'en déduit immédiatement. Posons alors $u_k := n_\Gamma(k, 2\Delta)$ pour tout entier $k \geq 2\Delta$; en utilisant le fait que tout segment géodésique reste à distance $\leq \Delta$ de l'orbite $\Gamma\cdot o$, on obtient $u_{k+l} \leq u_k u_l$ pour tout $k,l \geq \Delta$. En d'autres termes, la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ est sous-multiplicative; le lemme de Feteke [26] entraîne alors
$$\lim_{k\to+\infty} u_k^{1/k} = u := \inf_{k\geq 1} u_k^{1/k}, \tag{4}$$
avec $u = e^{\delta(\Gamma)}$ par définition de $\delta(\Gamma)$. On a en particulier $u_k \geq e^{\delta(\Gamma)k}$ pour tout entier $k \geq 0$ d'où $n_\Gamma(R, 2\Delta+1) \succeq e^{\delta(\Gamma)R}$ puisque $\mathcal{A}([R], 2\Delta) \subset \mathcal{A}(R, 2\Delta+1)$ pour tout $R \geq 2\Delta+1$. Ainsi, lorsque Γ est cocompact, non seulement on a $\mathrm{H}_{\mathrm{vol}}(X) = \delta(\Gamma)$ mais aussi $n_\Gamma(R, 2\Delta+1) \succeq e^{\delta(\Gamma)R}$ et a fortiori $N_\Gamma(R) \succeq e^{\delta(\Gamma)R}$.
- Si Γ est un réseau non uniforme de $\mathbf{H}^d, d \geq 2$, (ie $\mathrm{Vol}(\mathbf{H}^d/\Gamma) < +\infty$ mais $\mathbf{H}^d/\Gamma$ non compact), son exposant de Poincaré vaut $d-1$. Il en

est de même en courbure variable $1/4$-pincée (ie $b^2 \leq 4a^2$), la valeur $d-1$ étant remplacée comme dans le cas des réseaux uniformes par l'entropie volumique $\mathrm{H}_{\mathrm{vol}}(X)$ de X ; l'argument est plus subtil que dans le cas des groupes discrets cocompacts et nécessite une compréhension du comportement des segments géodésiques à l'intérieur des horoboules. Le point central de l'argumentation est le suivant: pour toute horoboule $\mathcal{H}$ et tout point x sur l'horosphère $\partial\mathcal{H}$, l'ensemble $\mathcal{B}(x,R)\cap\mathcal{H}$ est approximativement égal à la boule de rayon $R/2$ intérieure à $\mathcal{H}$ et tangente à $\partial\mathcal{H}$ au point x ; son volume est donc comparable à celui d'une boule de rayon $R/2$ et n'influe pas sur la croissance du volume global lorsque la courbure est $1/4$-pincée. Attention, lorsque la courbure n'est plus $1/4$-pincée, on peut avoir $\delta(\Gamma) < \mathrm{H}_{\mathrm{vol}}(X)$ (voir [11] pour les détails).

2.2 L'exposant de Poincaré des groupes non élementaires

Une question naturelle est de savoir si la "limsup" qui apparaît dans la définition de $\delta(\Gamma)$ est une limite; la réponse est "non" en général, comme le suggère l'exemple du groupe parabolique vu au paragraphe précédent. Cependant, dès que Γ n'est pas élémentaire, nous avons le

THÉORÈME 2.4. *(T. Roblin [29] & D. Sullivan [35]) Si Γ est un groupe kleinien non élémentaire, alors pour tous points x, y de X on a*

$$\delta(\Gamma) = \lim_{R\to+\infty} \frac{\mathrm{Ln}\, N_\Gamma(x,y,R)}{R}. \tag{5}$$

De plus, il existe une constante $C := C(\Gamma, x, y) > 0$ telle que

$$N_\Gamma(x,y,R) \leq Ce^{\delta(\Gamma)R}. \tag{6}$$

Preuve. L'égalité (5) est due à T. Roblin; l'inégalité (6) découle du célèbre "lemme de l'ombre" de D. Sullivan et repose sur l'existence de densités conformes Γ-invariantes et de dimension $\delta(\Gamma)$. Nous proposons ici une approche radicalement différente en montrant que la suite $(n_\Gamma(k, 2\Delta))_{k\geq1}$ vérifie un inégalité proche de la sur-multiplicativité et que son comportement à l'infini peut alors être décrit via à un argument "à la Feteke" (voir Lemme 2.5).

On fixe des constantes $A, B, C > 0$ et on considère deux isométries $\alpha, \beta \in \Gamma$ telles que $\alpha \cdot o \in \mathcal{A}(A, C)$ et $\beta \cdot o \in \mathcal{A}(B, C)$. Le groupe Γ étant non élémentaire, il possède un sous-groupe libre de type *θ-Schottky* $H = \langle h_1, h_2\rangle$ avec $\theta > 0$ (le qualificatif θ-Schottky signifie que pour tous mots "admissibles" g et g' en les lettres $h_1^{\pm1}$ et $h_2^{\pm1}$ et dont les premières lettres diffèrent, l'angle en o du triangle $g\cdot o, o, g'\cdot o$ est $\geq \theta$). On peut alors, selon les positions relatives des points $\alpha^{-1}\cdot o$ et $\beta\cdot o$, associer de façon unique au couple (α,β) un couple $(\alpha',\beta)=(\alpha h,\beta)$ avec $h\in\{Id, h_1^{\pm}, h_2^{\pm}\}$ de telle sorte que l'angle en o du triangle $\Delta_h := (\alpha h)^{-1}\cdot o,\ o,\ \beta\cdot o$ soit $\geq \theta > 0$: en effet l'angle en o d'au moins un de ces triangles Δ_h est $\geq \theta$, il suffit alors de prendre un à un les éléments de $\{Id, h_1^{\pm}, h_2^{\pm}\}$ et de choisir pour lettre h la première, selon un ordre fixé au préalable, qui corresponde à un triangle Δ_h dont l'angle en o est $\geq \theta$. La courbure étant majorée par $-a^2$, il existe alors une constante $D = D(a) > 0$ telle que $A+B-2C-D \leq d(o,\alpha'\beta\cdot o) \leq A+B+2C+D$. On a ainsi défini une application Φ de $\mathcal{A}(A,C)\times\mathcal{A}(B,C)$ dans $\mathcal{A}(A+B,2C+D)$, en associant au couple (α,β) l'élément $\gamma := \alpha'\beta$, via la procédure ci-dessus.

Cette application Φ n'a aucune raison d'être injective, cependant la préimage de chaque $\gamma \in \mathcal{A}(A+B,2C+D)$ est de cardinal uniformément borné, indépendemment des valeurs de A et B. En effet, si $\gamma\in\Gamma$ tel que $\gamma\cdot o\in\mathcal{A}(A+B,2C+D)$ se décompose sous la forme $\gamma_1\gamma_2$ avec $\gamma_1\cdot o\in\mathcal{A}(A,C)$ et $\gamma_2\cdot o\in\mathcal{A}(B,C)$, on a alors $d(o,\gamma_1\cdot o)+d(o,\gamma_2\cdot o)-d(o,\gamma\cdot o)\leq 4C+D$; d'après le lemme 2.2 de [33], il existe alors une constante $E>0$, dépendant de C, D et de la borne supérieure de la courbure $-a^2$ telle que $\gamma_1\cdot o$ appartienne à un E-voisinage du segment géodésique $[o,\gamma\cdot o]$. Or, le groupe Γ étant discret, le nombre de $\gamma_1\cdot o\in\mathcal{A}(A,C)\cap\Gamma\cdot o$ vérifiant cette dernière condition est majoré par un entier $M\geq 1$ ne dépendant que de Γ ; le cardinal de l'ensemble $\Phi^{-1}(\gamma)$ est donc $\leq M$ et on a

$$n_\Gamma(A,C)\times n_\Gamma(B,C)\leq M\times n_\Gamma(A+B,2C+D).$$

En posant $u_k := n_\Gamma(k,C), k\geq C$, et en décomposant l'anneau $\mathcal{A}(A+B,2C+D)$ en une réunion d'anneaux de la forme $\mathcal{A}(l,C), l\geq C$, on prouve ainsi l'existence d'un entier $\kappa\geq 1$ tels que

$$\forall k,l\geq C \qquad u_k u_l \leq M\sum_{i=k+l-\kappa}^{k+l+\kappa} u_i. \tag{7}$$

Quitte à remplacer u_k par u_k/M, on peut supposer $M=1$ dans ce qui suit. Lorsque Γ est convexe-cocompact, la suite $(u_{k+1}/u_k)_k$ est majorée et l'argument se simplifie singulièrement; en effet, on déduit de l'inégalité (7) que la suite $(u_k)_k$ est sur-multiplicative, la suite $\left(u_k^{1/k}\right)_k$ converge alors vers sa borne supérieure u.

En général, la suite $(u_{k+1}/u_k)_k$ n'est pas majorée; il est alors nécessaire d'utiliser un argument légèrement différent et dont on trouvera une variante dans [27] :

LEMME 2.5. *Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathbf{R}^+$ telle que $\limsup_{n\to+\infty} u_n > 0$ et*

$$\forall k, l \geq \kappa \qquad \sum_{i=k+l-\kappa}^{k+l+\kappa} u_i \geq u_k u_l \tag{8}$$

où $\kappa \geq 1$ est un entier fixé et on pose $U_n := u_0 + \cdots + u_n$ pour tout $n \geq 0$. La suite $(U_n^{1/n})_n$ converge alors vers un nombre $u \geq 1$; on a de plus $u_n \preceq u^n$.

Le théorème s'en déduit immédiatement. En effet, puisque $u_k = n_\Gamma(k, C)$ et $U_n = N_\Gamma(n + C)$ pour tous $n, k \geq 0$, on a, en notant $[x]$ la partie entière de $x \in \mathbf{R}^+$

$$\forall R > 0 \qquad U_{[R-C]} \leq N_\Gamma(R) \leq U_{[R+C]+1}$$

si bien que, d'après le lemme 8, on a d'une part $\lim_{R\to+\infty} N_\Gamma(R)^{1/R} = u$ (avec $u = e^{\delta(\Gamma)}$ par définition de l'exposant de Poincaré de Γ) et d'autre part $N_\Gamma(R) \leq U_{[R+C]} \preceq u^{[R+C]+1} \preceq e^{\delta(\Gamma)R}$. □

Avant de clore ce paragraphe, donnons les grandes lignes de la démonstration du lemme 2.5. De (8), on déduit l'inégalité $\forall k, l \geq 0 \quad (2\kappa+1)U_{k+l+\kappa} \geq u_k U_l$; quitte à diviser chaque terme u_k par $(2\kappa+1)$, cette inégalité se simplifie sous la forme

$$\forall k, l \geq 0 \quad U_{k+l+\kappa} \geq u_k U_l. \tag{9}$$

Pour tout $q, b > 0$ et $0 \leq r < b$, on a donc

$$U_{(b+\kappa)q+r+\kappa} \geq u_r U_{(b+\kappa)q} \geq u_r u_b U_{(b+\kappa)(q-1)} \geq \ldots \geq u_r (u_b)^q$$

d'où, en posant $m := (b + \kappa)q + r + \kappa$

$$\Big(U_m\Big)^{1/m} \geq (u_r)^{1/m} (u_b)^{q/m}. \tag{10}$$

En faisant tendre q puis b vers $+\infty$, on obtient

$$\liminf_{+\infty} \Big(U_m\Big)^{1/m} \geq \limsup_{b\to+\infty} \Big(u_b\Big)^{1/b} := u$$

avec $u \geq 1$ puisque $\limsup_{n\to+\infty} u_n > 0$. Il vient $\lim_{n\to+\infty} U_n^{1/n} = u$ car $\limsup_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} U_n^{1/n}$ d'après le lemme 2.3. En faisant tendre q vers $+\infty$ dans l'inégalité (10), on peut écrire $\forall b \geq 0 \quad u \geq u_b^{1/b+\kappa}$ d'où le lemme.

3. Sur les groupes divergents

On dit qu'un groupe kleinien Γ est *divergent* lorsque sa série de Poincaré diverge en $s = \delta(\Gamma)$; dans le cas contraire on dit qu'il est *convergent.*

EXEMPLES 3.1.

- L'exposant de Poincaré du groupe élémentaire $\langle h \rangle$ engendré par une isométrie hyperbolique h de X est nul ; ce groupe est donc divergent.
- L'exposant de Poincaré du groupe élémentaire $\langle p \rangle$ engendré par l'isométrie parabolique $z \mapsto z+1$ de $\mathbf{H}^2$ vaut $1/2$ puisque $d(i, p^n \cdot i) = 2\,\mathrm{Ln}\, n + O(1)$; de plus ce groupe est divergent.
- Il existe en courbure variable des groupes paraboliques convergents [10].
- Les groupes cocompacts ou convexe-cocompacts sont divergents ; cela se déduit d'un résultat général sur les mesures conformes, via encore une fois le lemme de l'ombre de Sullivan. On peut aussi le démontrer en utilisant (4) qui entraîne immédiatement $n_\Gamma(n, \Delta) \succeq e^{\delta(\Gamma)n}$.

La question de la convergence/divergence d'un groupe kleinien est intéressante à plus d'un titre, et en particulier en ce qui concerne le comportement dynamique du flot géodésique $(g_t)_t$ sur T^1M ; le théorème de dichotomie de Hopf, Tsuji & Sullivan en est l'illustration parfaite, le lecteur pourra consulter [30] pour un énoncé précis et sa démonstration détaillée.

3.1 Un critère simple de séparation des exposants

Le calcul explicite de l'exposant de Poincaré d'un groupe kleinien est très souvent délicat. Une question plus accessible est de comparer cet exposant avec celui de sous-groupes de Γ et de dégager un critère qui assure que l'inégalité est stricte. Nous avons le

THÉORÈME 3.2. *[10] Soient Γ un groupe kleinien non élémentaire et H un sous-groupe divergent de Γ tels que $L(H) \neq L(\Gamma)$. On a alors $\delta(\Gamma) > \delta(H)$.*

Preuve. Nous développons ici un argument élémentaire reposant sur la construction d'un sous-groupe de Γ, produit libre de H avec un sous-groupe engendré par une isométrie hyperbolique dont les points fixes n'appartiennent pas à $L(H)$.

Fixons en effet $\xi \in L(\Gamma) \setminus L(H)$; il existe un voisinage ouvert U de ξ dans ∂X qui ne rencontre pas $L(H)$. L'action de H sur $\partial X \setminus L(H)$

étant propre et discontinue, on peut, quitte à réduire U, supposer que $\forall h \in H \setminus \{Id\} \quad h(U) \subset \partial X \setminus U$. Par ailleurs, l'action de Γ étant minimale sur $L(\Gamma)$, l'orbite d'un point fixe d'une de ses isométries est dense dans $L(\Gamma)$ et rencontre donc U. On en déduit alors l'existence de $\gamma \in \Gamma \setminus H$ dont le point fixe attractif appartient à U ; quitte à remplacer γ par γ^n avec n grand, on peut supposer que l'isométrie γ, qu'elle soit hyperbolique ou parabolique, envoit l'extérieur de U dans U. Fixons alors un élément hyperbolique $\gamma' \in \Gamma$ dont les points fixes sont distincts de ceux de γ, et donc extérieurs à U quitte à réduire cet ouvert; l'isométrie $g := \gamma\gamma'\gamma^{-1}$ a ses deux points fixes dans U et quitte à remplaçer g par une de ses puissances on peut supposer que $g^{\pm 1}(\partial X \setminus U) \subset U$. D'après le lemme du ping-pong de Klein, le sous-groupe G de Γ engendré par H et g est alors un produit libre : il contient en particulier tous les mots de la forme $h_1 g h_2 g \cdots h_k g$ avec $k \geq 1$ et $h_i \in H \setminus \{Id\}$. On a alors, pour tout $s > \delta(H)$

$$\begin{aligned}
P_\Gamma(s) &\geq \sum_{k \geq 1} \sum_{h_1, \cdots, h_k \in H \setminus \{Id\}} e^{-sd(o, h_1 g h_2 g \cdots h_k g \cdot o)} \\
&\geq \sum_{k \geq 1} e^{-skd(o, g\cdot o)} \sum_{h_1, \cdots, h_k \in H \setminus \{Id\}} e^{-sd(o, h_1 \cdot o)} \times \cdots \times e^{-sd(o, h_k \cdot o)} \\
&\geq \sum_{k \geq 1} \Big(e^{-sd(o, g\cdot o)} \times \sum_{h \in H \setminus \{Id\}} e^{-sd(o, h\cdot o)} \Big)^k \\
&\geq \sum_{k \geq 1} \Big(e^{-\delta(H) d(o, g\cdot o)} \times \sum_{h \in H \setminus \{Id\}} e^{-sd(o, h\cdot o)} \Big)^k .
\end{aligned}$$

Le groupe H étant divergent, on peut choisir $s_0 > \delta(H)$ suffisamment proche de $\delta(H)$ de telle sorte que $e^{-\delta(H)d(o,g\cdot o)} \times \sum_{h \in H \setminus \{Id\}} e^{-s_0 d(o, h\cdot o)} > 1$. Il vient $P_\Gamma(s_0) = +\infty$, d'où $\delta(\Gamma) \geq s_0 > \delta(H)$. $\square$

Le théorème précédent permet aussi d'exhiber de façon simple des exemples de groupes convergents. Considérons par exemple un groupe de Schottky Γ engendré par deux isométries hyperboliques α et β et notons G le sous-groupe de Γ engendré par la famille de transformations $\{\alpha^{-n}\beta\alpha^n / n \geq 0\}$. Les groupes G et $H := \alpha^{-1} G \alpha$ sont conjugués, ils ont donc le même exposant de Poincaré et sont simultanément convergents ou divergents. Par ailleurs $L(H) \subset L(G)$ puisque $H \subset G$ mais $L(H) \neq L(G)$ car les points fixes de β appartiennent à $L(G)$ mais pas à $L(H)$. D'après le théorème 3.2, le groupe H est donc convergent et il en est de même pour G.

Soulignons que l'énoncé du Théorème 3.2 est presque optimal :

- en effet, si H est convergent et $L(H) \neq L(\Gamma)$, on vérifie en reprenant l'argument ci-dessus que le groupe $G_n = H * \langle g^n \rangle$ devient convergent lorsque n est assez grand,
- si le groupe H est divergent et normal dans Γ, on a $L(H) = L(\Gamma)$ et $\delta(\Gamma) = \delta(H)$ (voir Théorème 4.2 au paragraphe suivant).

3.2 La question de la croissance "tendue" (*growth tight* en anglais)

On considère un groupe Kleinien Γ et N un sous-groupe normal de Γ. Le groupe quotient $\overline{\Gamma} := N\backslash\Gamma$ est le groupe des isométries du revêtement Riemannien normal $\bar{X} := N\backslash X$ de $\Gamma\backslash X$, muni de la métrique "quotient"

$$\overline{d}(\bar{x}, \bar{y}) := \inf\{d(x, n \cdot y)/n \in N\}.$$

On note $\delta(\overline{\Gamma})$ l'exposant de Poincaré de $\overline{\Gamma}$ relativement à $\overline{d}$; on a $\delta(\overline{\Gamma}) \leq \delta(\Gamma)$. La question de savoir quand cette inégalité est stricte est la transposition dans un cadre Riemannien (voir [32]) de celle de la croissance tendue des groupes de type fini, posée par R. Grigorchuk et P. de la Harpe dans [15] et que nous rappelons en quelques mots. Soit G un groupe de type fini et S est un ensemble fini et symétrique de générateurs de G ; on munit G de la métrique des mots $|.|_S$ relativement à S et on note $w_{G,S} := \lim_{n\to+\infty}\Big(\sharp\{g/|g|_S \leq n\}\Big)^{1/n}$ le taux de croissance exponentielle de G correspondant au système S. Considérons à présent un sous-groupe normal N de G, l'ensemble $\overline{S} := \{\overline{S} := Ns/s \in S\}$ engendre le groupe quotient $\overline{G} := N\backslash G$, on munit $\overline{G}$ de la métrique des mots correspondant au système $\overline{S}$ et on note $w_{\overline{G},\overline{S}}$ le taux de croissance exponentielle de $\overline{G}$ correspondant au système $\overline{S}$. On dit que G est à croissance tendue relativement à S lorsque $w_{\overline{G},\overline{S}} < w_{G,S}$ pour tout sous-groupe normal propre N de G. On montre aisément que les groupes libres sont à croissance tendue, il en est de même pour les produits amalgamés et les groupes hyperboliques [1]; cette question est d'ailleurs étroitement liée à celle de la croissance des sous-décalages de type fini avec mots interdits (voir par exemple [17]).

En reprenant les arguments développés ci-dessus, on peut montrer que si $\overline{\Gamma}$ est divergent pour la métrique quotient, alors $\delta(\overline{\Gamma}) < \delta(\Gamma)$; pour les détails, on renvoit le lecteur à [12] où sont aussi énoncés des critères assurant que $\overline{\Gamma}$ est divergent.

4. Mesure de Patterson et exposant de Poincaré

4.1 Définitions et notations

On appelle *densité* sur ∂X une famille $\mu = (\mu_x)_{x\in X}$ de mesures positives finies sur ∂X. Une telle densité est dite *conforme de dimension* $\delta \geq 0$ lorsque pour tous $x, x' \in X$, la mesure $\mu_{x'}$ est absolument continue par rapport à μ_x avec $\frac{d\mu_{x'}}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\delta B_\xi(x',x)}$; cette densité est dite Γ*-invariante* si pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in X$ on a $\gamma^*\mu_x = \mu_{\gamma^{-1}\cdot x}$ où la mesure $\gamma^*\mu_x$ est définie par $\gamma^*\mu_x(A) = \mu_x(\gamma A)$ pour tout borélien A de ∂X. On note $Conf(\Gamma, \delta)$ l'ensemble des densités conformes Γ-invariantes et de dimension δ, satisfaisant la condition de normalisation $\|\mu_o\| = 1$.

Rappelons le procédé de Patterson qui propose une construction explicite d'éléments de $Conf(\Gamma, \delta(\Gamma))$. Pour chaque $s > \delta(\Gamma)$ et tous $x, y \in X$ on note $\mu^s_{x,y}$ la mesure orbitale

$$\mu^s_{x,y} := \frac{1}{P_\Gamma(o, y, s)} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma\cdot y)} \epsilon_{\gamma\cdot y}$$

où $\epsilon_{\gamma\cdot y}$ désigne la masse de Dirac en $\gamma \cdot y$ et P_Γ la série de Poincaré de Γ définie en (3). Lorsque Γ est divergent, toute valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence étroite de la famille $(\mu^s_{x,y})_{x,y,s}$ est portée par $L(\Gamma)$; on peut alors montrer que lorsque $s \to \delta(\Gamma)$ par valeurs supérieures la famille de mesures $\left(\mu^s_{x,y}\right)_s$ converge étroitement vers une mesure $\mu_{x,y}$ portée par $L(\Gamma)$, la famille $\left(\mu_{x,y}\right)_{x\in X}$ formant une densité conforme Γ-invariante et de dimension $\delta(\Gamma)$.

On a vu qu'il peut être délicat de montrer qu'un groupe Γ est divergent; D. Sullivan a établi cette propriété lorsque Γ est géométriquement fini, en étudiant le type des densités conformes Γ-invariantes et de dimension $\delta(\Gamma)$. Pour ce faire, il faut pouvoir construire de telles densités $\delta(\Gamma)$-conformes, sans savoir à priori si Γ est divergent ou convergent; dans ce dernier cas, S.J. Patterson a proposé de modifier légèrement la série de Poincaré en posant

$$P'_\Gamma(x, y, s) = \sum_{g\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma\cdot y)} h\left(d(x, \gamma \cdot y)\right)$$

où h est une fonction croissante de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ choisie de façon à ce que les séries $P_\Gamma(x, y, s)$ et $P'_\Gamma(x, y, s)$ aient le même exposant de Poincaré et

$$\forall \eta > 0, \exists t_\eta > 0, \forall t \geq t_\eta, \forall s \geq 0 \quad h(t + s) \leq h(t)e^{\eta s}.$$

L'existence d'une densité Γ-invariante μ de dimension $\delta(\Gamma)$ étant acquise, D. Sullivan [35] a proposé en courbure constante -1 une construction élégante de la mesure dite de Bowen-Margulis m_{BM}, qui s'étend naturellement en courbure variable comme suit. La propriété de $\delta(\Gamma)$-conformité de μ montre que la mesure c^μ définie sur $L(\Gamma)\overset{\Delta}{\times}L(\Gamma)$ par

$$c^\mu(d\eta\ d\xi) = \frac{\mu_x(d\eta)\ \mu_x(d\xi)}{d_x(\eta,\xi)}$$

ne dépend pas du point x ; par la formule (1) elle est aussi invariante sous l'action diagonale de Γ d'après la formule des accroissements finis. La mesure $c^\mu \otimes dt$ sur T^1X est donc invariante par les actions de $(\tilde{g}_t)_t$ et de Γ ; après passage au quotient elle induit la *mesure de Bowen-Margulis* m_{BM} sur l'ensemble non errant Ω du flot géodésique $(g_t)_t$. Le célèbre théorème de Hopf, Tsuji et Sullivan, dont on trouvera une démonstration détaillée dans [30], éclaire l'importance de la divergence de Γ : cette propriété est en effet équivalente au fait que la mesure m_{BM} est complètement conservative et ergodique pour le flot géodésique $(g_t)_t$, elle est forcément acquise quand m_{BM} est finie (et en particulier quand Ω est compact !) grâce au théorème de récurrence de Poincaré, auquel cas m_{BM} est même l'unique mesure d'entropie maximale pour la restriction de $(g_t)_t$ à Ω [21] (voir le chapitre du présent ouvrage rédigé par F. Ledrappier).

4.2 LE LEMME DE L'OMBRE ET QUELQUES CONSÉQUENCES

Intéressons nous tout d'abord aux propriétés locales d'une densité conforme Γ-invariante et de dimension δ. Pour tous $x, y \in X$ et tout $r > 0$ nous noterons $\mathcal{O}_x(y,r)$ l'ombre de la boule $\mathcal{B}(y,r)$ vue de x, c'est-à-dire l'ensemble des points $\xi \in \partial X$ tels que le rayon géodésique $[x,\xi)$ rencontre $\mathcal{B}(y,r)$. Nous avons le

LEMME 4.1. *(Lemme de l'ombre de Sullivan) Soit Γ un groupe non élémentaire et μ une densité conforme Γ-invariante et de dimension δ. Il existe $C > 1$ et $r_0 > 0$ tels que pour tout $r \geq r_0$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on ait*

$$\frac{1}{C}e^{-\delta d(o,\gamma\cdot o)} \leq \mu_{o,o}(\mathcal{O}_x(\gamma\cdot o, r)) \leq Ce^{-\delta d(o,\gamma\cdot o)+2\delta}.$$

Ce lemme a les importantes conséquences suivantes :

- En remarquant que pour tout $\Delta > 0$, la famille

$$\{\mathcal{O}_x(\gamma\cdot o, r)/\gamma \in \Gamma \text{ et } R - \Delta \leq d(o,\gamma\cdot o) \leq R + \Delta\}$$

forme un recouvrement de $L(\Gamma)$ à multiplicité bornée, on montre que l'existence d'une densité conforme Γ-invariante et de dimension δ entraîne $\sharp\{\gamma \in \Gamma/d(o,\gamma\cdot o) \leq R\} \preceq e^{\delta R}$ et donc $\delta \geq \delta(\Gamma)$.

- Rappelons qu'un point $\xi \in L(\Gamma)$ est dit *conique* (ou *radial*) lorsque qu'il existe une infinité de points de l'orbite d'un (de tout) point fixé dans X à distance bornée d'un (de tout) rayon géodésique d'extrémité ξ. On note $L_c(\Gamma)$ l'ensemble des points limite coniques de Γ ; on a $L_c(\Gamma) = \cup_{r>0} L_c^r(\Gamma)$ avec, en posant $\Gamma := \{\gamma_k \mid k \geq 1\}$,
$$L_c^r(\Gamma) := \limsup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \to \infty}} O_o(\gamma \cdot o, r) = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} O_o(\gamma_k \cdot o, r).$$
Par conséquent, si $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\delta d(o, \gamma \cdot o)} < +\infty$, et en particulier lorsque $\delta > \delta(\Gamma)$, toute densité conforme Γ-invariante et de dimension δ donne une mesure nulle à $L_c(\Gamma)$.
- Lorsque Γ est divergent et $\mu \in Conf(\Gamma, \delta(\Gamma))$, on montre que $\mu_{o,o}(L_c(\Gamma)) = \mu_{o,o}(\partial X) > 0$ et que cette propriété entraîne l'ergodicité de l'action de Γ relativement à la famille $(\mu_{x,y})_{x,y}$. Dans ce cas, la densité construite par le procédé de S.J. Patterson est, à constante multiplicative près, l'unique densité conforme Γ-invariante de dimension $\delta(\Gamma)$; en particulier, elle ne dépend ni du point y ni de la sous-suite qui a permis de la construire.
- Lorsque Γ est cocompact ou convexe-cocompact, on peut montrer que $Conf(\Gamma, \delta) \neq \varnothing$ si et seulement si $\delta = \delta(\Gamma)$; dans le cas contraire, $Conf(\Gamma, \delta) \neq \varnothing$ pour tout $\delta \geq \delta(\Gamma)$.

Remarquons que pour tout élément g du normalisateur $N(\Gamma)$ de Γ dans le groupe des isométries de X et toute densité $\mu \in Conf(\Gamma, \delta)$, la famille de mesures $(\nu_x^g)_{x \in X}$ définie par

$$\nu_x^g := \frac{1}{\|\mu_{g \cdot o}\|} g^* \mu_{g \cdot x} \tag{11}$$

appartient aussi à $Conf(\Gamma, \delta)$. Cette famille est en effet Γ-invariante puisque pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $g\gamma = \tilde{\gamma} g$ avec $\tilde{\gamma} = g\gamma g^{-1} \in \Gamma$ d'où
$$\gamma^* \nu_{\gamma \cdot x}^g = \gamma^* g^* \mu_{g\gamma \cdot x} = g^* \tilde{\gamma}^* \mu_{g\gamma \cdot x} = g^* \mu_{\tilde{\gamma}^{-1} g\gamma \cdot x} = g^* \mu_{g \cdot x} = \nu_x^g.$$

Lorsque Γ est divergent, l'ensemble $Conf(\Gamma, \delta(\Gamma))$ est réduit à un point $\mu = (\mu_x)_{x \in X}$ et on a $(\nu_x^g)_x = (\mu_x)_x$ pour tout $g \in N(\Gamma)$; ainsi $Conf(N(\Gamma), \delta(\Gamma)) \neq \varnothing$ et donc $\delta(\Gamma) \geq \delta(N(\Gamma))$. On a donc le

THÉORÈME 4.2. *([20], Corollary 4.2) Soit Γ un groupe kleinien divergent et G un groupe kleinien contenant Γ comme sous-groupe normal. Alors G est divergent d'exposant $\delta(G) = \delta(\Gamma)$.*

Plus généralement, T. Roblin à introduit la notion de principe des ombres. On note $C(L(\Gamma))$ l'enveloppe convexe de $L(\Gamma)$ dans X et on considère un sous-ensemble Y de $C(L(\Gamma))$ invariant sous l'action de Γ. On dit que Y vérifie *le principe des ombres en* $\delta \geq \delta(\Gamma)$ si pour toute densité $\mu \in Conf(\Gamma, \delta)$ et tous $x, y \in Y$ on a

$$\frac{1}{C}\|\mu_y\|e^{-\delta d(x,y)} \leq \mu_x\big(\mathcal{O}_x(y,r)\big) \leq C\|\mu_y\|e^{-\delta d(x,y)}$$

où r et C sont des constantes positives ne dépendant que de Y et de δ (et non de x, y et μ). T. Roblin a montré dans [31] que l'orbite de o sous l'action de $N(\Gamma)$ vérifie le principe des ombres pour tout $\delta \geq \delta(\Gamma)$. La démonstration de ce résultat est analogue à celle du lemme de l'ombre de Sullivan et utilise de façon cruciale le fait que pour tout $\mu \in Conf(\Gamma, \delta)$ et tout $g \in N(\Gamma)$ la famille $(\nu^g)_{x \in X}$ définie par la formule (11) est une densité conforme Γ-invariante et de dimension δ.

Le fait qu'un ensemble Γ-invariant Y satisfasse au principe des ombres entraîne que la suite $(\|\mu_y\|)_{y \in Y}$ croît de façon contrôlée; on a en effet le

THÉORÈME 4.3. *[31] Soit Γ un groupe kleinien et $N(\Gamma)$ son normalisateur dans le groupe des isométries de X. Alors, pour toute densité $\mu \in Conf(\Gamma, \delta)$, l'exposant de Poincaré de la série $\sum_{g \in N(\Gamma)} \|\mu_{g\cdot o}\| e^{-sd(o, g\cdot o)}$ est inférieur ou égal à δ.*

Citons comme très jolie conséquence le corollaire suivant, dont on trouvera une démonstration détaillée dans [31]:

COROLLAIRE 4.4. *Pour tout groupe kleinien Γ de X on a $\delta(\Gamma) \geq \frac{1}{2}\delta(N(\Gamma))$, l'inégalité étant stricte lorsque $N(\Gamma)$ est divergent.*

On a donc $\frac{\delta(N(\Gamma))}{2} \leq \delta(\Gamma) \leq \delta(N(\Gamma))$, la première inégalité étant stricte dès que $N(\Gamma)$ est divergent; par ailleurs, $\delta(\Gamma) = \delta(N(\Gamma))$ dès que Γ est divergent. Ainsi, si $\delta(\Gamma) \in [\frac{\delta(N(\Gamma))}{2}, \delta(N(\Gamma))[$, le groupe Γ est convergent; par contre lorsque $\delta(\Gamma) = \delta(N(\Gamma))$, on peut avoir Γ convergent ou divergent (pour des exemples explicites, on cherchera dans la classe des revêtements abéliens de variétés compactes [25]).

Pour conclure ce paragraphe et illustrer la puissance de cette approche, citons le

THÉORÈME 4.5. *Si $N(\Gamma)/\Gamma$ est moyennable, alors $\delta(\Gamma) = \delta(N(\Gamma))$.*

La réciproque de ce théorème est partiellement démontrée lorsque $N(\Gamma)$ est convexe-cocompact (cas où $X = \mathbf{H}^{n+1}$ avec la condition $\delta(N(\Gamma)) > n/2$

[6]) ; la question de savoir si elle est vraie pour tous les groupes convexe-cocompacts, et plus généralement pour les groupes géométriquement finis, est toujours ouverte. Nous renvoyons le lecteur au chapitre du présent ouvrage rédigé par T. Roblin et S. Tapie.

5. Autour des groupes géométriquement finis

5.1 Divergence des groupes géométriquement finis

Nous avons vu dans le paragraphe 3 que les groupes cocompacts ou convexe-cocompacts sont divergents. Curieusement, il est assez délicat d'étendre cette propriété à d'autres classes de groupes kleiniens ; nous répondons ici à cette question dans le cas des réseaux non uniformes et leur généralisation naturelle que sont les groupes *géométriquement finis*.

Introduisons quelques notations nécessaires pour définir cette large classe de groupes kleiniens. Rappelons que $C(L(\Gamma))$ désigne l'enveloppe convexe de $L(\Gamma)$ dans X ; cet ensemble est invariant sous l'action de Γ et le quotient $\mathcal{N}(\Gamma) = C(L(\Gamma))/\Gamma$ est le coeur de Nielsen de la variété $\Gamma\backslash X$. On notera $\mathcal{N}_\epsilon(\Gamma)$ un ϵ-voisinage de $\mathcal{N}(\Gamma)$. Cet ensemble est compact lorsque Γ est cocompact ou convexe-cocompact et on a $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$. Le groupe Γ est dit *géométriquement fini* lorsqu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathcal{N}_\epsilon(\Gamma)$ soit de volume fini. La perte de compacité de $\mathcal{N}_\epsilon(\Gamma)$ provient de l'existence d'isométries paraboliques dans Γ, d'autres points limite que les points coniques peuvent alors apparaître ; on dit que $\xi \in L(\Gamma)$ est *parabolique borné* si son stabilisateur Π est constitué d'isométries paraboliques et agit de façon cocompacte sur $L(\Gamma) \setminus \{\xi\}$.

Rappelons que la finitude géométrique peut être caractérisée de façon équivalente comme suit (voir [5] pour plus de détails) :

- pour tout $\epsilon > 0$ le volume de $\mathcal{N}_\epsilon(\Gamma)$ est fini,
- le coeur de Nielsen $\mathcal{N}(\Gamma)$ peut se décomposer sous la forme suivante

$$\mathcal{N}(\Gamma) = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cdots \cup \mathcal{C}_l \tag{12}$$

  où $\mathcal{C}_0$ est un ensemble relativement compact et où, pour chaque $i = 1, \cdots, l$ il existe un groupe parabolique $\Pi_i \subset \Gamma$ et une horoboule $\mathcal{H}_i$ basée au point fixe ξ_i de Π_i tels que $\mathcal{C}_i$ soit isométrique au quotient de $\mathcal{H}_i \cap C(L(\Gamma))$ par Π_i : notons que ξ_i est alors nécessairement un point limite parabolique borné, que le groupe Π_i agit sur $C(L(G)) \cap \partial\mathcal{H}_i$ où $\partial\mathcal{H}_i$ désigne l'horosphère qui borde l'horoboule $\mathcal{H}_i$ et que cette action admet un domaine fondamental relativement compact,

- l'ensemble limite $L(\Gamma)$ est la réunion disjointe de $L_c(\Gamma)$ et d'un nombre fini d'orbites $\Gamma \cdot \xi_i, 1 \leq i \leq l$, de points paraboliques bornés.

Ainsi, chaque partie cuspidale $\mathcal{C}_i, 1 \leq i \leq l$, est isométrique au quotient $\Gamma \backslash \widetilde{\mathcal{C}_i}$, où on a posé $\widetilde{\mathcal{C}_i} := \Gamma \cdot (\mathcal{H}_i \cap C(L(\Gamma))$; quant à la partie $\mathcal{C}_0$, elle est isométrique à $\Gamma \backslash \widetilde{\mathcal{C}_0}$ avec $\widetilde{\mathcal{C}_0} := C(L(\Gamma)) \setminus \left(\bigcup_{1 \leq i \leq l} \widetilde{\mathcal{C}_i} \right)$.

Introduisons à présent la

DÉFINITION 5.1. On dit qu'un groupe géométriquement fini Γ satisfait la propriété de *trou critique* lorsque $\delta(\Gamma) > \delta(\Pi)$ pour tout sous-groupe parabolique $\Pi \subset \Gamma$.

Nous avons le

THÉORÈME 5.2. *([35], [8] & [10]) Tout groupe kleinien géométriquement fini Γ satisfaisant la propriété de trou critique est divergent.*

Notons qu'il est possible de construire des groupes géométriquement finis divergents Γ ne satisfaisant pas la propriété de trou critique ; ces groupes possèdent alors des sous-groupes paraboliques convergents d'exposant $\delta(\Gamma)$, le choix de la métrique dans la partie cuspidale correspondante est cependant délicat pour assurer que Γ est divergent [24].

Preuve. L'approche initiée par D. Sullivan pour démontrer ce résultat repose sur l'existence d'une densité conforme Γ-invariante et de dimension $\delta(\Gamma)$; or, la définition même de la finitude géométrique, avec une partie épaisse relativement compacte et une partie fine sur laquelle la dynamique de Γ est très simple à contrôler fait espérer l'existence d'un autre argument de type sous-multiplicativité, comme dans le cas compact ou convexe-cocompact.

Pour ce faire, nous notons $\delta^*(\Gamma)$ le maximum des exposants de Poincaré des sous-groupes paraboliques de Γ, nous fixons $\delta \in]\delta^*(\Gamma); \delta(\Gamma)[$ et posons $w_\Gamma(R, \Delta) := e^{-\delta R} n_\Gamma(R, \Delta)$; on a alors $\limsup_{R \to +\infty} \frac{\operatorname{Ln} v_\Gamma(R,\Delta)}{R} = \delta(\Gamma) - \delta > 0$. Pour tous réels $A, B > 0$ et tout Δ supérieur au diamètre de la partie épaisse $\mathcal{C}_0$, on a

$$w_\Gamma(A+B, 2\Delta) \leq c \cdot \Big(\sum_{0 \leq u \leq A} w_\Gamma(u, 2\Delta) \Big) \times \Big(\sum_{0 \leq v \leq B} w_\Gamma(v, 2\Delta) \Big) \tag{13}$$

où c est une constante strictement positive. En effet, pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \cdot o \in \mathcal{A}(o, A+B, 2\Delta)$, on écrit $d(o, \gamma \cdot o) = A + B + 2\Lambda$ avec $-\Delta < \Lambda < \Delta$ et on note x le point du segment géodésique $[o, \gamma \cdot o]$ qui se trouve à distance

$A+\Lambda$ de o ; lorsque le projeté de x sur la variété quotient appartient à $\mathcal{C}_0$, on pose $u=v=0$, sinon ce projeté appartient à une zone cuspidale $\mathcal{C}_i, 1 \leq i \leq l$, autrement dit il existe $g \in \Gamma$ tel que x appartienne à l'horoboule $g \cdot \mathcal{H}_i$ et le paramètre u (resp. v) représente alors la partie entière de la longueur du segment géodésique $[o,x] \cap g \cdot \mathcal{H}_i$ (resp. $[x, \gamma \cdot o] \cap g \cdot \mathcal{H}_i$). L'inégalité (13) s'obtient en décomposant l'ensemble $\Gamma \cdot o \cap \mathcal{A}(o, A+B, 2\Delta)$ selon les valeurs possibles de u et v.

On pose $w_k := \frac{v_\Gamma(k,2\Delta)}{c}$ puis $W_k := w_1 + \cdots + w_k$ et $\widetilde{W}_k := 1+W_1+\cdots+W_k$ pour tout $k \geq 1$. L'inégalité (13) s'écrit $\forall k,l \geq 1 \quad w_{k+l} \leq W_k \times W_l$ et entraîne successivement $W_{k+l} \leq W_k \widetilde{W}_l$ puis $\widetilde{W}_{k+l} \leq \widetilde{W}_k \widetilde{W}_l$. La suite $(\widetilde{W}_n)_n$ est donc sous-multiplicative et on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{Ln} \widetilde{W}_n}{n} = L := \inf_{n \geq 1} \frac{\operatorname{Ln} \widetilde{W}_n}{n}$$

L'exposant de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \widetilde{W}_n e^{-sn}$ est donc égal à L et on a $\widetilde{W}_n \succeq e^{Ln}$, si bien $\sum_{n \geq 1} \widetilde{W}_n e^{-Ln} = +\infty$. On déduit immédiatement du Lemme 2.3 que les séries $\sum_{n \geq 1} W_n e^{-sn}$ et $\sum_{n \geq 1} w_n e^{-sn}$ admettent aussi L comme exposant de convergence et qu'elles divergent en L puisque $L > 0$. L'exposant de convergence de $\sum_{n \geq 1} n_\Gamma(n, \Delta) e^{-sn}$ est donc $L + \delta = \delta(\Gamma)$ et cette série diverge en $\delta(\Gamma)$. $\square$

Nous retrouvons en particulier le résultat suivant du à D. Sullivan [35] et K. Corlette & A. Iozzi [8] :

COROLLAIRE 5.3. *Tout groupe kleinien géométriquement fini d'un espace symétrique de rang* 1 *est divergent.*

Preuve. Il suffit de vérifier que les sous-groupes paraboliques bornées sont divergents ; cela découle d'un calcul direct effectué dans [2] dans le cas de l'espace hyperbolique et étendu au cas général dans [8]. $\square$

5.2 ESTIMATION DE LA FONCTION DE CROISSANCE

En combinant les arguments des démonstrations des Théorèmes 2.4 et 5.2, on obtient de façon élémentaire l'estimation suivante de $N_\Gamma(R)$:

THÉORÈME 5.4. *[13] Pour tout groupe kleinien géométriquement fini* Γ *satisfaisant la propriété de trou critique, on a* $N_\Gamma(R) \asymp e^{\delta(\Gamma)R}$.

Preuve. D'après la démonstration du Théorème 5.2, nous avons $\widetilde{W}_n \succeq e^{Ln}$ et donc $W_n \succeq \frac{e^{Ln}}{n}$ puisque la suite $(W_k)_k$ est croissante. Nous allons utiliser de façon cruciale l'estimation (6), qui entraîne $W_n \leq W\ e^{Ln}$ pour un certaine constante $W > 0$; nous imposerons $W \geq 1$ dans ce qui suit. Pour montrer que $W_n \succeq e^{Ln}$, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_n$ telle que $\epsilon_n := W_{k_n} e^{-Lk_n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $k_n - k_{n-1} \to +\infty$ et on pose $l_n := \inf\left(\frac{k_n - k_{n-1}}{2}, \left[\frac{-\operatorname{Ln} \epsilon_n}{L}\right]\right)$; la suite $(l_n)_n$ tend vers $+\infty$ et on a $k_n - l_n \geq k_{n-1}$ et $\epsilon_n \leq e^{-Ll_n}$. On pose alors, pour tout $n, m \geq 0$

$$W'_n = \begin{cases} W\ e^{Ln} & \text{si} \quad n \in \{k_{m-1}+1, \cdots, k_m - l_m - 1\} \\ \epsilon_m e^{Lk_m} & \text{si} \quad n \in \{k_m - l_m, \cdots, k_m\} \end{cases} .$$

On a $W_n \leq W'_n \leq W\ e^{Ln}$ pour tout $n \geq 1$; il vient

$$\begin{aligned} e^{Lk_m} \preceq \widetilde{W}_{k_m} & \leq 1 + \sum_{k=1}^{k_m} W_k \\ & \leq W\Big(1 + \sum_{k=1}^{k_m - l_m - 1} e^{Lk}\Big) + l_m \epsilon_m e^{Lk_m} \quad (\text{puisque} \quad W \geq 1) \\ & \preceq l_m e^{L(k_m - l_m)} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $l_m e^{-Ll_m} \succeq 1$. Ceci contredit le fait que $\lim_{m\to+\infty} l_m = +\infty$. □

On renvoit le lecteur à [34] pour une démonstration très technique de cet encadrement. En utilisant de façon ingénieuse la propriété de mélange du flot géodésique, T. Roblin a obtenu dans [29] et sous une hypothèse très générale le résultat plus précis suivant : il existe une constante $C = C(\Gamma) > 0$ telle que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{N_\Gamma(R)}{e^{\delta(\Gamma)R}} = C.$$

L'énoncé du Théorème 5.4 reste valable pour les groupes hyperboliques au sens de Gromov (voir [9] via l'utilisation des densités conformes) et peut s'obtenir directement par des arguments de sous-multiplicativité comme nous le faisons ici. L'approche que nous décrivons ici a été initiée par G. Robert il y a une quinzaine d'années dans un texte non publié [28].

5.3 Sur les isométries paraboliques d'un groupe géométriquement fini et sa mesure de Bowen Margulis

Pour pouvoir décrire l'action des isométries paraboliques de X, il faut au préalable comprendre le lien entre la distance $d(x,y)$ entre deux points $x,y\in X$ situés sur une même horosphère $\partial\mathcal{H}$ centrée en $\xi\in\partial X$ et l'excursion dans l'horoboule $\mathcal{H}$ du segment géodésique $[x,y]$. On suppose que $d(x,y)\geq 1$ et on pose $t_{x,y}:=\inf\{t\geq 0/d_{(t)}(\xi_x(t),\xi_y(t))\leq 1\}$ où $d_{(t)}$ désigne la distance intrinsèque sur l'horosphère $\partial\mathcal{H}_t:=\{z\in X/B_\xi(x,z)=t\}$. On a le

Lemme 5.5. *[10] Il existe une constante $c=c(a,b)>0$ ne dépendant que des bornes sur la courbure, telle que pour tout $\xi\in\partial X$, toute horosphère $\partial\mathcal{H}$ centrée en ξ et tous points $x,y\in\partial\mathcal{H}$ tels que $d(x,y)\geq 1$, l'arc constitué des 3 segments géodésiques $[x,\xi_x(t_{x,y})],[\xi_x(t_{x,y}),\xi_y(t_{x,y}]$ et $[\xi_y(t_{x,y}),y]$ est une $(1,c)$-quasigéodésique; en particulier, les quantités $d(x,y)$ et $2t_{x,y}$ diffèrent d'au plus c.*

Ainsi, dans l'espace hyperbolique, en prenant $\xi=\infty, x=i$ et $y=i+n$, on a $t_{x,y}=\operatorname{Ln} n$ et comprend géométriquement pourquoi la quantité $d(i,i+n)-2\operatorname{Ln} n$ est bornée. Ce lemme est crucial pour construire de groupes paraboliques convergents et expliciter ainsi des groupes géométriquement finis convergents en courbure variable [10].

Lorsque Γ est convexe-cocompact, l'ensemble Ω est compact; la mesure m_{BM} est alors finie et c'est la mesure d'entropie maximale [35]. Lorsque Γ est géométriquement fini et contient des transformations paraboliques, la question de la finitude de m_{BM} se pose de façon naturelle. Si Γ est convergent, les mesures de Patterson $\mu_{x,y}$ ne chargent que les points paraboliques et la mesure m_{BM} est clairement de masse infinie; lorsque Γ est divergent, nous avons le

Théorème 5.6. *Si Γ est un groupe kleinien géométriquement fini divergent, les deux assertions suivantes sont équivalentes*

- *la mesure m_{BM} est finie*
- *on a $\sum_{p\in\Pi} d(o,p\cdot o)e^{-\delta(\Gamma)d(o,p\cdot o)}<+\infty$ pour tout sous-groupe parabolique Π de Γ.*

On renvoit le lecteur à [10] pour une démonstration détaillée; précisons cependant une conséquence immédiate de ce résultat:

COROLLAIRE 5.7. *Soit* Γ *un groupe kleinien géométriquement fini de* X *satisfaisant la propriété de trou critique. Le groupe* Γ *est divergent et sa mesure de Bowen-Margulis* m_{BM} *est finie et ergodique.*

5.4 MESURES DE HAUSDORFF ET DE PACKING DE L'ENSEMBLE LIMITE

Nous nous intéressons ici aux mesures et dimensions de Hausdorff et de packing de l'ensemble limite d'un groupe kleinien géométriquement fini vérifiant la propriété de trou critique. Dans un premier temps, nous faisons quelques rappels théoriques sur ces notions, puis nous décrivons le comportement local des mesures de Patterson afin de les comparer avec les mesures de Hausdorff et de packing.

5.4.1 QUELQUES RAPPELS THÉORIQUES Soit F un sous-ensemble borélien d'un espace métrique (E,d). La *mesure de Hausdorff* $\mathcal{H}_s$ de dimension s de F est définie par

$$\mathcal{H}_s(F) = \lim_{\epsilon\to 0} \inf\Big\{\sum_{U\in\mathcal{U}} (\text{diam } U)^s\Big\}$$

où l'infimum porte sur l'ensemble des recouvrements dénombrables de F par des ouverts de diamètre $\leq \epsilon$. La *dimension de Hausdorff* de F est définie par

$$HD(F) = \sup\{s>0 : \mathcal{H}_s(F) = +\infty\} = \inf\{s>0 : \mathcal{H}_s(F) = 0\}.$$

Par ailleurs, la *pré-mesure de packing* $\mathcal{P}_{*s}$ de dimension s de F est définie par

$$\mathcal{P}_{*s}(F) = \lim_{\epsilon\to 0} \sup\Big\{\sum_{B\in\mathcal{B}} (\text{diam } B)^s\Big\}$$

où le supremum porte sur l'ensemble des familles dénombrables $\mathcal{B}$ de boules centrées en des points de F, deux à deux disjointes et de diamètre $\leq \epsilon$; rappelons que l'application $\mathcal{P}_{*s}$ n'est pas une mesure car elle n'est pas σ-additive sur la tribu des boréliens. Une étape supplémentaire est nécessaire pour construire la *mesure* dite *de packing* $\mathcal{P}_s$ de dimension s de F en posant

$$\mathcal{P}_s(F) = \inf\Big\{\sum_j \mathcal{P}_{*s}(F_j) \mid F\subset \cup_j F_j, J \text{ dénombrable}\Big\}$$

et la *dimension de packing* de F est alors donnée par

$$PD(F) = \sup\{s>0 : \mathcal{P}_s(F) = +\infty\} = \inf\{s>0 : \mathcal{P}_s(F) = 0\}.$$

Enfin, une famille dénombrable de points $\{x_i\}$ de F est dite ϵ-séparée lorsque les boules $\mathcal{B}(x_i,\epsilon)$ sont deux à deux disjointes; on note $s(F,\epsilon)$ le cardinal maximal des familles ϵ-séparées de F. Les *dimensions de Minkowski inférieure* $\underline{MD}(F)$ et *supérieure* $\overline{MD}(F)$ de l'ensemble F sont définies par

$$\underline{MD}(F) := \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{Ln}\, s(F,\epsilon)}{\mathrm{Ln}(1/\epsilon)} \quad \text{et} \quad \overline{MD}(F) := \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{Ln}\, s(F,\epsilon)}{\mathrm{Ln}(1/\epsilon)}.$$

Lorsque $\underline{MD}(F) = \overline{MD}(F)$, la valeur commune est appelée *dimension de Minkowski* et notée $MD(F)$. Pour tout borélien F de $\mathbf{R}^N$, on a $HD(F) \leq PD(F) \leq \overline{MD}(F)$.

Dans [3], C. Bishop et P.W. Jones ont montré que pour tout groupe kleinien Γ de l'espace hyperbolique on avait $HD(L_c(\Gamma)) = \delta(\Gamma)$ et $HD(L(\Gamma)) = MD(L(\Gamma))$; lorsque Γ est géométriquement fini, il vient $HD(L(\Gamma) = PD(L(\Gamma) = MD(L(\Gamma)) = \delta(\Gamma)$ puisque dans ce cas les points limite non coniques sont au plus dénombrables. Ces égalités ont été étendues en courbure variable [22].

Afin d'obtenir des estimations des mesures de Hausdorff et de packing de certains sous-ensembles de ∂X, on utilisera le résultat classique suivant de type "lemme de Frostman" et qui découle des définitions ci-dessus et du théorème de recouvrement de Besicovitch. Nous renvoyons le lecteur au livre de P. Mattila [19] pour les détails.

PROPOSITION 5.8. *Soient un ensemble compact $E \subset \mathbf{R}^N$, un réel $s > 0$ et une mesure μ borélienne sur E. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout borélien F de E et tout $a \in [0, +\infty]$, on ait*

- *si* $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(\mathcal{B}(x,R))}{r^s} \geq a$ *pour tout* $x \in F$ *alors* $\mathcal{H}_s(B) \leq \frac{2^s C}{a}\mu(B)$ *pour tout borélien* B *de* F,
- *si* $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(\mathcal{B}(x,R))}{r^s} \leq a$ *pour tout* $x \in F$ *alors* $\mathcal{H}_s(B) \geq \frac{2^s}{a}\mu(B)$ *pour tout borélien* B *de* F,
- *si* $\liminf_{r\to 0} \frac{\mu(\mathcal{B}(x,R))}{r^s} \geq a$ *pour tout* $x \in F$ *alors* $\mathcal{P}_s(B) \leq \frac{1}{a}\mu(B)$ *pour tout borélien* B *de* F,
- *si* $\liminf_{r\to 0} \frac{\mu(\mathcal{B}(x,R))}{r^s} \leq a$ *pour tout* $x \in F$, *alors* $\mathcal{P}_s(B) \geq \frac{1}{Ca}\mu(B)$ *pour tout borélien* B *de* F.

5.5 COMPORTEMENT LOCAL DE LA MESURE DE PATTERSON

Nous nous intéressons ici au comportement local d'une densité conforme Γ-invariante et de dimension δ ; dans le paragraphe suivant, nous spécifierons le cas où $\delta = \delta(\Gamma)$ afin de comparer mesure de Patterson, de Hausfdorff et de packing. Cette étude a été menée en courbure -1 par D. Sullivan dans [36] et précisée par B. Stramann et S.L. Velani dans [34] ; l'approche de ces derniers été considérablement simplifiée par l'auteur du présent texte dans [23] et étendue en courbure variable par B. Schapira [33].

Le lemme de l'ombre de Sullivan précise le comportement de la mesure de certains ouverts de ∂X, précisément les ombres de boules ouvertes de X de rayon suffisamment grand et centrées en un point d'une orbite $\Gamma \cdot x$; nous cherchons ici à nous affranchir de la condition portant sur le centre des boules considérées et examinons pour ce faire une autre classe d'ouverts, de maniement plus aisé.

Dans ce qui suit, nous fixons $x \in X, \xi \in \partial X$ et $r, t > 0$ et considérons les 3 familles suivantes d'ouverts de ∂X :

- les boules $\mathcal{B}_x(\xi, r)$ de centre ξ et rayon r, relativement à la métrique d_x sur ∂X ;
- l'ombre $\mathcal{O}_x(\xi(t), r)$ de la boule de centre $\xi(t)$ et de rayon r, vue du point x ;
- la "calotte" $V(x, \xi, t)$ définie comme l'ensemble des points de ∂X dont le projeté sur le rayon géodésique $[x, \xi)$ appartient à $]\xi(t), \xi[$.

Nous avons le résultat classique suivant :

LEMME 5.9. *[16] [33] Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\mathcal{B}_x\left(\xi, \frac{e^{-t}}{c}\right) \subset \mathcal{O}_x(\xi(t), 1) \subset \mathcal{B}_x(\xi, ce^{-t})$$

et

$$\mathcal{B}_x\left(\xi, \frac{e^{-t}}{c}\right) \subset V(x, \xi, t) \subset \mathcal{B}_x(\xi, ce^{-t}).$$

Nous aurons besoin de contrôler la façon dont les calottes $V(x, \xi, t)$ varient en fonction de x et ξ :

LEMME 5.10. *[33] Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tous $x \in X, \xi \in \partial X, t \geq C_1$ et tout $\eta \in V(x, \xi, t + 2C_1)$ on ait*

$$V(x, \eta, t + C_1) \subset V(x, \xi, t) \subset V(x, \eta, t - C_1).$$

De plus, pour tout $D > 0$, il existe une constante $C_2 = C_2(D) > 0$ telle que, pour tous $x \in X, \xi \in \partial X, t \geq C_2$ et tout $y \in \mathcal{B}(x, D)$ on ait

$$V(y, \xi, t + C_2) \subset V(x, \xi, t) \subset V(y, \eta, t - C_2).$$

Le résultat qui suit illustre clairement le fait que les "calottes" $V(x,\xi,t)$ sont adaptées pour décrire l'action des isométries paraboliques de Γ sur ∂X ; il se déduit du Lemme 5.5, on en trouvera dans [33] une démonstration détaillée :

LEMME 5.11. *Fixons $\xi \in \partial X$ et K un compact de $\partial X \setminus \{\xi\}$; il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute isométrie parabolique p fixant ξ, tout $t \geq 0$ et tout point $\eta \in K$, on ait*

- *si $d(o,p\cdot o) \geq 2t$ alors $p\cdot K \subset V(o,\xi,t-C)$ et*
$$\left|B_{p\cdot\eta}\big(\xi(t),p\cdot\xi(t)\big) - d(o,p\cdot o) + 2t\right| \leq 2C,$$
- *si $d(o,p\cdot o) \leq 2t$ alors $p\cdot K \cap V(o,\xi,t+C) = \varnothing$ et*
$$\left|B_{p\cdot\eta}\big(\xi(t),p\cdot\xi(t)\big)\right| \leq 2C.$$

L'énoncé qui suit précise la mesure au sens d'une densité conforme Γ-invariante et de dimension δ d'une calotte $V(o,\xi,t)$ en fonction des positions des points $\xi(t)$ et ξ :

THÉORÈME 5.12. *Soit Γ un groupe kleinien géométriquement fini et $\nu = (\nu_x)_{x\in X}$ une densité conforme Γ-invariante et de dimension $\delta \geq \delta(\Gamma)$, sans atome et de support $L(\Gamma)$. Fixons des représentants $\Pi_1,\cdots,\Pi_l$ des classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques maximaux de Γ, de points fixes respectifs $\xi_1,\cdots,\xi_l$ et notons $\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1\ldots\cup\mathcal{C}_l$ une décomposition du coeur de Nielsen $\mathcal{N}(\Gamma)$ de la forme (12) et $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_l$ les horoboules correspondantes. Il existe alors des constantes $A,K>0$ telles que, pour tout $\xi\in L(\Gamma)$ et tout $t\geq 0$, on ait*

- *si $\xi(t)\in\widetilde{\mathcal{C}}_0$ alors $\frac{e^{-\delta t}}{A} \leq \nu_o\big(V(o,\xi,t)\big) \leq Ae^{-\delta t}$;*
- *sinon il existe $i\in\{1,\cdots,l\}$ et $\gamma\in\Gamma$ tel que $\xi(t)\in\gamma\cdot\mathcal{H}_i$ et on a*
  - *lorsque $\gamma\cdot\xi_i\in V(o,\xi,t)$*
$$\begin{aligned}\frac{e^{-\delta(t-\bar{t})}}{A}\sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ d(o,p\cdot o)\geq 2\bar{t}+K}} e^{-\delta d(o,p\cdot o)} \quad &\leq \quad \nu_o\big(V(o,\xi,t)\big)\\ &\leq Ae^{-\delta(t-\bar{t})}\sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ d(o,p\cdot o)\geq 2\bar{t}-K}} e^{-\delta d(o,p\cdot o)}\end{aligned}$$
  - *lorsque $\gamma\cdot\xi_i\notin V(o,\xi,t)$*
$$\frac{e^{-\delta(t+\bar{t})}}{A}N_{\Pi_i}(2\bar{t}-K) \leq \nu_o\big(V(o,\xi,t)\big) \leq Ae^{-\delta(t+\bar{t})}N_{\Pi_i}(2\bar{t}+K).$$

avec $\bar{t} := d(\xi(t), \Gamma \cdot o)$.

Preuve. Notons tout d'abord que la quantité $B_\eta(o, \xi(t)) - t$ est bornée uniformément en $\eta \in V(o, \xi, t)$; il vient $\nu_o\big(V(o,\xi,t)\big) \asymp e^{-\delta t}\nu_{\xi(t)}\big(V(o,\xi,t)\big)$ et il nous suffit d'estimer $\nu_{\xi(t)}\big(V(o,\xi,t)\big)$.

Considérons tout d'abord le cas où $\xi(t) \in \widetilde{\mathcal{C}_0}$; il existe alors $\gamma \in \Gamma$ tel que $d(\xi(t), \gamma \cdot o) \leq \Delta$ où Δ désigne le diamètre de $\mathcal{C}_0$, si bien que

$$\nu_{\xi(t)}\big(V(o,\xi,t)\big) \asymp \nu_{\gamma\cdot o}\big(V(o,\xi,t)\big) \asymp \nu_o\big(V(\gamma^{-1}\cdot o, \gamma^{-1}\cdot\xi, t)\big).$$

Cette dernière quantité est majorée par 1 puisque ν_o est une mesure de probabilité. Elle est aussi minorée par une constante non nulle : en effet, d'après la définition des métriques d_x sur ∂X et le lemme 5.9, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{B}_o(\gamma^{-1}\cdot\xi, \epsilon) \subset \mathcal{B}_{\gamma^{-1}\cdot o}\Big(\gamma^{-1}\cdot\xi, \frac{e^{-t}}{c}\Big) \subset V(\gamma^{-1}\cdot o, \gamma^{-1}\cdot\xi, t)$$

d'où $\nu_o(V(\gamma^{-1}\cdot o, \gamma^{-1}\cdot\xi, t)) \geq \inf_{\eta\in L(\Gamma)} \nu_o(\mathcal{B}_o(\eta,\epsilon)) > 0$.

Considérons à présent le cas où $\xi(t)$ se projette sur la partie mince de $\mathcal{N}(\Gamma)$; il existe donc $i \in \{1, \cdots, l\}$ et $\gamma \in \Gamma$ tel que $\xi(t) \in \gamma \cdot \mathcal{H}_i$. Nous allons décomposer l'étude en plusieurs cas, selon les positions relatives de ξ et de $\gamma \cdot \xi_i$.

1. *Supposons tout d'abord que* $\xi = \gamma\cdot\xi_i$. Considérons dans une premier temps le cas où $\gamma = Id$ et donc $\xi = \xi_i$. On fixe un domaine fondamental borélien et relativement compact $\mathcal{D}_i$ pour l'action de Π_i sur $L(\Gamma)\smallsetminus\{\xi_i\}$. La mesure ν étant sans atome et de support $L(\Gamma)$, on a $\nu(\partial X) = \nu\big(L(\Gamma)\smallsetminus\{\xi_i\}\big)$ si bien que

$$\sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ p\cdot\mathcal{D}_i\subset V(o,\xi,t)}} \nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i) \leq \nu_{\xi(t)}\big(V(o,\xi,t)\big) \leq \sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ p\cdot\mathcal{D}_i\cap V(o,\xi,t)\neq\varnothing}} \nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i).$$

En appliquant le lemme 5.11 avec $K = \overline{\mathcal{D}_i}$, on obtient

$$\sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ d(o,p\cdot o)\geq 2t+2C}} \nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i) \leq \nu_{\xi(t)}\big(V(o,\xi,t)\big) \leq \sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ d(o,p\cdot o)\geq 2t-2C}} \nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i). \tag{14}$$

De la même façon, on obtient

$$\sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ d(o,p\cdot o)<2t-2C}} \nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i) \leq \nu_{\xi(t)}\big(\partial X\smallsetminus V(o,\xi,t)\big) \leq \sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ d(o,p\cdot o)<2t+2C}} \nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i). \tag{15}$$

Estimons à présent $\nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i)$; par conformité et invariance sous Γ, on a

$$\nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i)=\int_{\mathcal{D}_i}e^{-\delta B_{p\cdot\eta}(\xi(t),p\cdot\xi(t))}\nu_{\xi(t)}(d\eta)$$

et du Lemme 5.11 on déduit $\nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i)\asymp\nu_{\xi(t)}(\mathcal{D}_i)e^{2\delta t-\delta d(o,p\cdot o)}\asymp e^{\delta t-\delta d(o,p\cdot o)}$ lorsque $d(o,p\cdot o)\geq 2t$ et $\nu_{\xi(t)}(p\cdot\mathcal{D}_i)\asymp\nu_{\xi(t)}(\mathcal{D}_i)\asymp e^{-\delta t}$ lorsque $d(o,p\cdot o)\leq 2t$. En injectant ces estimations dans les inégalités (14) et (15), on obtient finalement

$$e^{\delta t}\sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ d(o,p\cdot o)\geq 2t+2C}}e^{-\delta d(o,p\cdot o)}\preceq\nu_{\xi(t)}\big(V(o,\xi,t)\big)\preceq e^{\delta t}\sum_{\substack{p\in\Pi_i\\ d(o,p\cdot o)\geq 2t-2C}}e^{-\delta d(o,p\cdot o)}$$

et

$$e^{-\delta t}N_{\Pi_i}(2t-2C)\preceq\nu_{\xi(t)}\big(\partial X\smallsetminus V(o,\xi,t)\big)\preceq e^{-\delta t}N_{\Pi_i}(2t+2C).$$

Il nous reste à considérer le cas où $\gamma\neq Id$; le point $\xi(t)$ appartient à $\gamma\cdot\mathcal{H}_i$ et, quitte à remplacer γ par γp pour un choix judicieux de $p\in\Pi_i$, on peut supposer que $\gamma\cdot o$ se trouve à distance $\leq\Delta$ du rayon géodésique $[o,\xi)$. On en déduit l'existence d'une constante $C>0$ telle que, en posant $s_i=d(o,\gamma\cdot\mathcal{H}_i)$, on ait

$$V(\gamma\cdot o,\xi,t-s_i-C)\subset V(o,\xi,t)\subset V(\gamma\cdot o,\xi,t-s_i+C);$$

l'estimation annoncée découle alors de l'étude précédente en notant que $\bar{t}$ et $t-s_i$ diffèrent d'une constante.

2. *Supposons à présent que* $\xi(t)\in\gamma\cdot\mathcal{H}_i, 1\leq i\leq l$, *et* $\xi\neq\gamma\cdot\xi_i$. Comme ci-dessus, nous nous ramenons au cas où $\gamma=Id$ et distinguons 3 sous-cas (la constante C_1 à venir est celle qui apparaît dans le lemme 5.10) :
   - *Cas où* $\xi_i\in V(o,\xi,t+2C_1)$ On a alors
   $$V(o,\xi_i,t+C_1)\subset V(o,\xi,t)\subset V(x,\xi_i,t-C_1)$$
   d'où l'on déduit
   $$\nu_{\xi_i(t)}\big(V(o,\xi_i,t+C_1)\big)\preceq\nu_{\xi(t)}\big(V(o,\xi,t)\big)\preceq\nu_{\xi_i(t)}\big(V(o,\xi_i,t-C_1)\big).$$
   On conclut en appliquant les estimations obtenues en 1. et en notant que $d(\xi(t),\Gamma\cdot o)$ et $d(\xi_i(t),\Gamma\cdot o)$ diffèrent d'au plus une constante.
   - *Cas où* $\xi_i\notin V(o,\xi,t-2C_1)$ Dans ce cas, le point ξ_i est plus proche du point antipodal de ξ par rapport à o, noté $\bar{\xi}$; le rayon géodésique $[\xi(t),\xi)$ sort de l'horoboule $\mathcal{H}_i$ en un point $\bar{o}:=[\xi(t),\xi)\cap\partial\mathcal{H}_i$ et nous posons $\bar{t}:=d(\xi(t),\bar{o})$. On a $V(o,\xi,t)=\partial X\smallsetminus V(\bar{o},\bar{\xi},\bar{t})$ et $\xi_i\in V(\bar{o},\bar{\xi},\bar{t}+C_1)$ si bien que
   $$\partial X\smallsetminus V(\bar{o},\xi_i,\bar{t}-C_1)\subset V(o,\xi,t)\subset\partial X\smallsetminus V(\bar{o},\xi_i,\bar{t}+C_1).$$

Il nous faut donc, aux constantes près, estimer $\nu_{\xi(t)}(\partial X \setminus V(\bar{o}, \xi_i, \bar{t}))$. Notons $\gamma' \cdot o$ le point de $\Gamma \cdot o$ le plus proche de $\bar{o}$; on a $d(\bar{o}, \gamma' \cdot o) \leq \Delta$ et d'après le lemme 5.10, il existe $C_2 = C_2(\Delta)$ tel que

$$\partial X \setminus V(\gamma' \cdot o, \xi_i, \bar{t} - C_1 - C_2) \subset V(o, \xi, t) \subset \partial X \setminus V(\gamma' \cdot o, \xi_i, \bar{t} + C_1 + C_2).$$

Soit $(\bar{\xi}(s))_{s \geq 0}$ le rayon $[\gamma' \cdot o, \xi_i)$. Comme $\xi_i \in V(\bar{o}, \bar{\xi}, \bar{t} + 2C_1)$ et $d(\bar{o}, \gamma' \cdot o) \leq \Delta$, les points $\xi(t)$ et $\bar{\xi}(\bar{t})$ sont à distance bornée l'un de l'autre ; il vient

$$\nu_{\bar{\xi}(\bar{t} - C_1 - C_2)}\big(\partial X \setminus V(\gamma' \cdot o, \xi_i, \bar{t} - C_1 - C_2)\big) \preceq \nu_{\xi(t)}\big(V(o, \xi, t)\big)$$

et

$$\nu_{\xi(t)}\big(V(o, \xi, t)\big) \preceq \nu_{\bar{\xi}(\bar{t} + C_1 + C_2)}\big(\partial X \setminus V(\gamma' \cdot o, \xi_i, \bar{t} + C_1 + C_2)\big),$$

on conclut en appliquant les estimations obtenues précédemment et en notant que $d(\xi(t), \Gamma \cdot o)$ diffère de $\bar{t}$ d'au plus une constante.

- *Cas où* $\xi_i \in V(o, \xi, t - 2C_1) \setminus V(o, \xi, t + 2C_1)$ Il suffit de poser $t_1 = t - 4C_1, t_2 = t + 4C_1$ et de se ramener aux deux sous-cas précédents (en remplaçant respectivement t par t_1 puis t_2) puisque $\xi_i \in V(o, \xi, t_1 + 2C_1)$ et $\xi_i \notin V(o, \xi, t_2 - 2C_1)$.

□

Il n'y a malheureusement pas d'espoir de comparer en toute généralité les quantités $e^{\delta \bar{t}} \sum_{\substack{p \in \Pi_i \\ d(o, p \cdot o) \geq 2\bar{t}}} e^{-\delta d(o, p \cdot o)}$ et $e^{-\delta \bar{t}} N_{\Pi_i}(2\bar{t})$ comme on peut s'en convaincre aisément ; ceci devient cependant possible dès que l'on suppose une certaine "homogénéité" dans les cusps qui se traduit par le fait que les fonctions de croissance des sous-groupes paraboliques de Γ fluctuent peu. Rappelons que, contrairement au cas des groupes kleiniens non élémentaires, on peut avoir $\liminf_{r \to +\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Ln} N_{\Pi_i}(R) < \limsup_{r \to +\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Ln} N_{\Pi_i}(R)$ pour un tel sous-groupe ; les quantités $e^{\delta R} \sum_{\substack{p \in \Pi_i \\ d(o, p \cdot o) \geq 2R}} e^{-\delta d(o, p \cdot o)}$ et $e^{-\delta R} N_{\Pi_i}(2R)$ peuvent avoir alors des comportements tout à fait distincts lorsque $R \to +\infty$. Dans l'énoncé qui suit, nous proposons une condition générale qui permet de contrôler la mesure δ-conforme des calottes de ∂X.

Introduisons tout d'abord l'hypothèse d'homogénéité cuspidale suivante :

DÉFINITION 5.13. Soit Γ un groupe kleinien géométriquement fini possédant $l \geq 1$ classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques maximaux, de représentants respectifs $\Pi_1, \cdots, \Pi_l$. On dit que Γ satisfait *l'hypothèse* H s'il existe des fonctions $p_1, \cdots, p_l$ de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^{*+}$ de classe C_1 telles que, pour tout $i \in \{1, \cdots, l\}$

$$n_{\Pi_i}(o, t, 1) \asymp e^{\delta(\Pi_i)t} p_i(t) \qquad et \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} = 0.$$

Le théorème 5.12 admet alors le

COROLLAIRE 5.14. *Soit Γ un groupe kleinien géométriquement fini satisfaisant la propriété de trou critique et l'hypothèse H. Soit $\nu = (\nu_x)_{x \in X}$ une densité conforme Γ-invariante, de dimension $\delta \geq \delta(\Gamma)$, sans atome et de support $L(\Gamma)$. On a alors*

$$e^{\delta R} \sum_{\substack{p \in \Pi_i \\ d(o, p \cdot o) \geq 2R}} e^{-\delta d(o, p\cdot o)} \asymp e^{-\delta R} N_{\Pi_i}(2R) \tag{16}$$

si bien que pour tout $\xi \in L(\Gamma)$ et $t \geq 0$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \nu_o\big(V(o, \xi, t)\big) &\asymp e^{-\delta t} \quad \textit{lorsque } \xi(t) \in \widetilde{\mathcal{C}}_0, \\ \nu_o\big(V(o, \xi, t)\big) &\asymp e^{-\delta(t - \bar{t})} \sum_{\substack{p \in \Pi_i \\ d(o, p\cdot o) \geq 2\bar{t}}} e^{-\delta d(o, p \cdot o)} \asymp e^{-\delta(t + \bar{t})} N_{\Pi_i}(2\bar{t}) \\ &\qquad \textit{lorsque } \xi(t) \in \widetilde{\mathcal{C}}_i, 1 \leq i \leq l, \ \textit{avec } \bar{t} := d(\xi(t), \Gamma \cdot o). \end{aligned}$$

Preuve. Il nous suffit de vérifier que sous les hypothèses ci-dessus on a $N_{\Pi_i}(R) \asymp e^{\delta R} \sum_{\substack{p \in \Pi_i \\ d(o, p \cdot o) \geq R}} e^{-\delta d(o, p\cdot o)}$; nous utiliserons le

LEMME 5.15. *Soit p une fonction de classe C_1 de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^{*+}$ telle que $\lim_{t \to +\infty} \frac{p'(t)}{p(t)} = 0$. On a alors $\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{Ln}\, p(t)}{t} = 0$ et, pour tout $\epsilon > 0$,*

- $\int_0^R p(t) e^{\epsilon t} dt \asymp \int_{R-1}^R p(t) e^{\epsilon t} dt \asymp p(R) e^{\epsilon R}$,
- $\int_R^{+\infty} p(t) e^{-\epsilon t} dt \asymp \int_R^{R+1} p(t) e^{-\epsilon t} dt \asymp p(R) e^{-\epsilon R}$.

Preuve. Pour tout $\eta > 0$, on a $-\eta p(t) \leq p'(t) \leq \eta p(t)$ pourvu que t soit assez grand ; on en déduit que le taux de croissance exponentielle de p est nul. Par ailleurs, il existe $C \geq 1$ tel que, pour tout $R > 1$ et tout $r \in [R-1, R]$, on ait $\frac{p(r)}{C} \leq \int_{R-1}^R p(t) dt \leq C p(r)$ (d'où l'on déduit $\frac{p(r)}{C^2} \leq p(t) \leq C^2 p(r)$ pour tout $r, t \in [R-1, R]$) ; en effet

$$\int_{R-1}^{R} p(t)dt = p(r) + \int_{R-1}^{R} \Big(\int_{r}^{t} p'(u)\ du \Big) dt = p(r) + q(r)$$

avec $|q(r)| \leq \int_{R-1}^{R} |p'(u)|du \leq \sup_{R-1\leq u\leq R} \left|\frac{p'(u)}{p(u)}\right| \int_{R-1}^{R} p(t)dt$; on conclut en notant que $\lim_{R\to+\infty} \sup_{R-1\leq u\leq R} \left|\frac{p'(u)}{p(u)}\right| = 0$. Fixons alors $\epsilon > 0$; d'après ce qui précède, on a

$$\frac{p(R)}{C^2} e^{\epsilon(R-1)} \leq \int_{R-1}^{R} p(t)e^{\epsilon t}dt \leq C^2 p(R)e^{\epsilon R},$$

d'où l'on déduit immédiatement l'estimation annoncée. Le cas des intégrales $\int_{R}^{R+1} p(t)e^{-\epsilon t}dt$ et $\int_{R}^{+\infty} p(t)e^{-\epsilon t}dt$ se traite de façon analogue. □

Fort de ce résultat, démontrons à présent l'encadrement suivant

$$N_{\Pi_i}(R) \asymp e^{\delta R} \sum_{\substack{p\in\Pi_i \\ d(o,p\cdot o)\geq R}} e^{-\delta d(o,p\cdot o)}.$$

Notons pour simplifier $\delta(\Pi_i) = \delta_i$; puisque $\delta_i > 0$, on peut appliquer le lemme et écrire

$$N_{\Pi_i}(R) \asymp \sum_{0\leq n\leq R} n_{\Pi_i}(n,1) \asymp \int_0^R p_i(t)e^{\delta_i t}dt \asymp p_i(R)e^{\delta_i R}.$$

Par ailleurs, puisque $\delta > \delta_i$, la dernière estimation du lemme nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p\in\Pi_i \\ d(o,p\cdot o)\geq R}} e^{-\delta d(o,p\cdot o)} &\asymp \sum_{0\leq n\leq R} n_{\Pi_i}(n,1)e^{-\delta n} \\ &\asymp \int_R^{+\infty} p_i(t)e^{(\delta_i-\delta)t}dt \\ &\asymp p_i(R)e^{(\delta_i-\delta)R}. \end{aligned}$$

Il vient $N_{\Pi_i}(R) \asymp e^{\delta R} \sum_{\substack{p\in\Pi_i \\ d(o,p\cdot o)\geq R}} e^{-\delta d(o,p\cdot o)}$. □

Soulignons que sous les hypothèses du Corollaire 5.14, on a nécessairement $\delta(\Pi_i) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Ln} N_{\Pi_i}(R)$, d'après la première assertion du Lemme 5.15.

EXEMPLE 5.16. Explicitons quelques exemples "classiques" de variétés d'Hadamard satisfaisant ces hypothèses :

- lorsque X est l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^N, N \geq 2$, les fonctions p_i sont constantes et les conclusions du corollaire sont valides ; il en est de même pour les espaces symétriques de rang 1.

- Lorsque les fonctions p_i sont de la forme $p_i(t) = t^{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathbf{R}^*$, on a bien $p_i'(t)/p_i(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Notons que si tous les α_i sont ≥ -1, les groupes Π_i sont divergents et Γ vérifient donc la propriété de trou critique; a contrario, lorsque $\alpha_i < -1$, le groupe Π_i devient convergent et l'hypothèse de trou critique doit être faite explicitement dans ce cas.
- B. Schapira a considéré dans [33] le cas où la fonction p_i est de la forme $e^{\sqrt{t}}$, illustrant ainsi par un exemple exotique une condition faible sous laquelle le flot horocyclique d'une surface de type fini et à courbure négative pincée s'équidistribue.

5.6 Comparaisons entre les mesures de Patterson, de hausdorff et de packing

Nous étendons ici en courbure variable les résultats de D. Sullivan [36].

THÉORÈME 5.17. *Soit Γ un groupe kleinien géométriquement fini satisfaisant la propriété de trou critique et l'hypothèse H. Alors*

1. *si $\delta(\Pi_i) \geq \delta(\Gamma)/2$ pour tout $i \in \{1, \cdots, l\}$, on a $\mu_{o,o} = \mathcal{P}_{\delta(\Gamma)}$,*
2. *s'il existe $i \in \{1, \cdots, l\}$ tel que $\delta(\Pi_i) > \delta(\Gamma)/2$, la mesure $\mathcal{H}_{\delta(\Gamma)}$ est nulle sur tout sous-ensemble de $L(\Gamma)$ de $\mu_{o,o}$-mesure positive,*
3. *si $\delta(\Pi_i) \leq \delta(\Gamma)/2$ pour tout $i \in \{1, \cdots, l\}$, on a $\mu_{o,o} = \mathcal{H}_{\delta(\Gamma)}$*
4. *s'il existe $i \in \{1, \cdots, l\}$ tel que $\delta(\Pi_i) < \delta(\Gamma)/2$, la mesure $\mathcal{P}_{\delta(\Gamma)}$ est infinie sur tout sous-ensemble de $L(\Gamma)$ de $\mu_{o,o}$-mesure positive.*

Preuve. Simplifions les notations en posant $\delta = \delta(\Gamma)$.

(1) Supposons que $\delta(\Pi_i) \geq \delta/2$ pour tout $i \in \{1, \cdots, l\}$. D'après les estimations précédentes, il existe $c > 0$ tel que $\frac{\mu_{o,o}(\mathcal{B}(\xi,r))}{r^\delta} \geq c$ pour tout point $\xi \in L(\Gamma)$. Par ailleurs, la mesure de Bowen-Margulis étant ergodique pour l'action du flot géodésique sur T^1M il vient

$$\limsup_{t \to +\infty} \mathbf{1}_{T^1\mathcal{C}_0}(g_t \cdot v) = 1 \quad m_{BM}(dv) - p.s.$$

puisque $m_{BM}(T^1\mathcal{C}_0) > 0$. Par conséquent, pour $\mu_{o,o}$-presque tout point $\xi \in L(\Gamma)$, on a $\limsup_{t\to+\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_0}(\xi(t)) = 1$; d'après le corollaire 5.14, il existe donc $C > 0$ tel que $\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{o,o}(\mathcal{B}(\xi,r))}{r^\delta} \leq C$ pour $\mu_{o,o}$-presque tout point $\xi \in L(\Gamma)$. D'après la Proposition 5.8, il existe alors $K \geq 1$ tel que $\frac{1}{K}\mathcal{P}_\delta \leq \mu_{o,o} \leq K\mathcal{P}_\delta$. La mesure $\mathcal{P}_\delta$ étant conforme de dimension δ sur $L(\Gamma)$ elle coïncide nécessairement avec $\mu_{o,o}$ par unicité d'une telle mesure.

(2) Supposons maintenant qu'il existe $i \in \{1, \cdots, l\}$ tel que $\delta(\Pi_i) > \delta/2$; par ergodicité de la mesure de Bowen-Margulis on a comme précédemment

$\limsup_{t\to+\infty} d(\pi(g_t \cdot v), o)\mathbf{1}_{T^1\mathcal{C}_i}(g_t \cdot v) = +\infty \quad m_{BM}(dv) - p.s.$ et comme $\delta(\Pi_i) > \delta$, il vient $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu_{o,o}(B_e(\xi,r))}{r^\delta} = +\infty \quad \mu_{o,o}(d\xi) - p.s.$ Une nouvelle fois, la Proposition 5.8 permet de conclure.

Les cas 3 et 4 se traitent de façon analogue. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARZHANTSEVA G.N. & LYSENOK I.G. *Growth tightness for word hyperbolic groups*, Math. Z. 241 n^o 3 (2002), 597–611.

[2] BEARDON A.F. *The exponent of convergence of Poincaré series* Proc. London Math. Soc. (3) vol. 18 1968) p. 461-483.

[3] BISHOP C. J. & JONES P. *Hausdorff dimension and Kleinian groups*, Acta Math. 179 (1997), no. 1, 1–39.
W. .

[4] BOURDON M. *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace*, Enseign. Math. (2) 41 (1995), no. 1-2, 63–102.

[5] BOWDITCH B. *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. vol. 77, (1995), p. 229-274.

[6] BROOKS R. *The bottom of the spectrum of a Riemannian covering*, J. Reine Angew. Math. 357 (1985), 101–114.

[7] BUSEMANN H. *The geometry of geodesics*, Academic Press Inc., New York (1955).

[8] CORLETTE K. & IOZZI A. *Limit sets of isometry groups of exotic hyperbolic spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 n^o 4 (1999), 1507–1530.

[9] COORNAERT M. & KNIEPER G. *An upper bound for the growth of conjugacy classes in torsion-free word hyperbolic groups*, Internat. J. Algebra Comput. 14 (2004), no. 4, 395–401.

[10] DAL'BO F., OTAL J.P. & PEIGNÉ M. *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel Journal of Math. 118 (2000), 109–124.

[11] DAL'BO F., PEIGNÉ M., PICAUD J.C. & SAMBUSETTI A. *On the growth of non-uniform lattices in pinched negatively curved manifolds*, J. Reine Angew. Math. 627 (2009), 31–52.

[12] DALBO F., PEIGNÉ M., PICAUD J.C. & SAMBUSETTI A. *On the growth of quotients of Kleinian groups*, Ergodic Theory Dynam. Systems 31 (2011), no. 3, 83–851.

[13] DAL'BO F., PEIGNÉ M. & SAMBUSETTI A. *No universal upperbound for the orbital function of quotient of Kleinien groups in negative curvature*, en préparation.

[14] GALLOT S., HULIN D. & LAFONTAINE J. *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag Universitext 2nd Edition.

[15] GRIGORCHUK R. & DE LA HARPE P. *On problems related to growth, entropy and spectrum in group theory*, J. Dyn. Control Systems **3** n^o 1 (1997), 51–89.

[16] KAIMANOVITCH V. *Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces*, J. Reine Angew. Math. 455 (1994), 57–103.

[17] HUSS W., SAVA E. & WOESS W. *Entropy sensitivity of languages defined by infinite automata, via Markov chains with forbidden transitions*, Theoret. Comput. Sci. 411 (2010), no. 44-46, 3917–3922.

[18] MANNING A. *Topological entropy for geodesic flows* , Ann. of Math. (2) 110 (1979), no. 3, 567–573.

[19] MATTILA P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Advanced Mathematics 44, Cambridge University Press 1995.

[20] MATSUZAKI K. & YABUKI Y. *The Patterson-Sullivan measure and proper conjugation for Kleinian groupes of divergence type*, Ergodic Theory Dynam. Systems 29 (2009), no. 2, 657–665.

[21] OTAL J.P. & PEIGNÉ M. *Principe variationnel et groupes kleiniens*, Duke Math. J. Vol. 125, no. 1 (2004), 15–44.

[22] PAULIN F. *On the critical exponent of a discrete group of hyperbolic isometries*, Differential Geom. Appl. 7 (1997), no. 3, 231–236.

[23] PEIGNÉ M. *Mesures de Hausdorff de l'ensemble limite de groupes kleiniens géométriquement finis*, http: //hal.archives-ouvertes.fr/.

[24] PEIGNÉ M. *On some exotic Schottky groups*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 31 (2011), no. 2, 559–579.

[25] POLLICOTT M. & SHARP R. *Orbit counting for some discrete groups acting on simply connected manifolds with negative curvature*, Invent. Math. 117 (1994), no. 2, 27–302.

[26] PÓLYA G. & SZEGÖ G. *Problems and theorems in analysis, vol. I & II*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 193 und Band 216, Springer, 1972 & 1976.

[27] QUINT J.F. *L'indicateur de croissance des groupes de Schottky* , Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), no. 1, 249–272.

[28] ROBERT, G. *Comptage pour des groupes cocompacts d'isométries d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, exposé oral(1997).

[29] ROBLIN T. *Sur la fonction orbitale des groupes discrets en courbure négative. (French) [The orbit function of discrete groups in negative curvature* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002), no. 1, 145–151.

[30] ROBLIN T. *Ergodicité et Equidistribution en courbure négative* , Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) n^o 95 (2003).

[31] ROBLIN T. *Un théorème de Fatou pour les densités conformes avec applications aux revêtements galoisiens en courbure négative*, Israel J. Math. 147 (2005), 33–357.

[32] SAMBUSETTI A. *Growth tightness of surfaces groups*, Expositiones Mathematicae 20 (2002), 335–363.

[33] SCHAPIRA B. *Lemme de l'ombre et non divergence des horosphères d'une variété géométriquement finie*, Anna. Inst. Fourier 54, n$^\circ$ 4 (2004), 939–989.

[34] STRAMANN B. & VELANI S. L. *The Patterson measure for geometrically finite groups with parabolic elements, new and old*, Proc. London Math. Soc. (3) 71 (1995), no. 1, 197–220.

[35] SULLIVAN D. *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, IHES Publ. Math. 50 (1979), 171–202.

[36] SULLIVAN D. *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta. Math. 153, no. 1, (1984), 259–277.