Exercices de Master 2 - Novembre 2010 -

Université de Tunis El Manar

Exercice 1. *Autour du théorème des grands écarts et de l'utilisation de la transformée de Laplace dans jeu de Pile ou Face*
On munit l'espace produit $\Omega = \{0,1\}^n$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_n$ et l'on considère la suite $(X_i)_{1\le i\le n}$ de variables aléatoires définies par

$$\forall \omega = (\omega_i)_{1\le i\le n} \in \Omega \qquad X_i(\omega) = \omega_i.$$

1. Donner loi de X_k ; pourquoi peut-on dire que la suite $X_1 \ldots, X_n$ modélise le jeu de Pile ou Face ?
2. Montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$ et que l'on a $\quad \forall k \in \{0, \cdots, n\} \quad \mathbb{P}_n[S_n = k] = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
3. On pose $\forall t \in \mathbb{R} \quad L_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{tk}\mathbb{P}_n[S_n = k]$. Montrer que $L_n(t) = \left(\dfrac{e^t+1}{2}\right)^n$.
4. On se propose de démontrer un théorème de grandes déviations : pour tout $\epsilon > 0$ il existe des constantes strictement positives C_ϵ et H_ϵ telles que
$$\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \ge n\epsilon] \le C_\epsilon e^{-H_\epsilon n}.$$
   (a) Montrer que pour tout $t \ge 0$ on a
   $$\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \ge n\epsilon] = 2\mathbb{P}_n[S_n - n/2 \ge n\epsilon] \le 2e^{-n(\frac{1}{2}+\epsilon)t}\left(\frac{1+e^t}{2}\right)^n.$$
   (b) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \ge n\epsilon] \le 2e^{-nh_\epsilon(t)}$, où h_ϵ est une fonction que l'on explicitera . En étudiant les variations de la fonction f_ϵ, établir la majoration suivante
   $$\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \ge n\epsilon] \le 2e^{-nH_\epsilon}$$
   avec $H_\epsilon = \dfrac{(1+2\epsilon)\ln(1+2\epsilon) + (1-2\epsilon)\ln(1-2\epsilon)}{2} > 0.$
5. On veut montrer que la majoration ci-dessus est en un certain sens optimale en établissant la convergence suivante
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\ \ln \mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \ge n\epsilon] = \frac{(1+2\epsilon)\ln(1+2\epsilon) + (1-2\epsilon)\ln(1-2\epsilon)}{2}$$
   (a) Montrer que l'on a
   $$\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \ge n\epsilon] \ge 2\mathbb{P}_n[S_n = [n(\frac{1}{2}+\epsilon)] + 1],$$
   où $[n(\frac{1}{2}+\epsilon)]$ désigne la partie entière de $n(\frac{1}{2}+\epsilon)$.

(b) En utilisant la formule de Stirling montrer qu'il existe des constantes strictement positives K_ϵ et L_ϵ telles que

$$K_\epsilon(1+3\epsilon)^{-n(\frac{1}{2}+\epsilon)} \leq \mathbb{P}_n[S_n = [n(\frac{1}{2}+\epsilon)]+1] \leq L_\epsilon(1-3\epsilon)^{-n(\frac{1}{2}+\epsilon)}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \delta(n) = 0$. Conclure.

Exercice 2. *Fonction génératrice de la loi du premier retour en* 0 *de la marche aléatoire centrée au plus proche voisin sur* $\mathbb{Z}$.

On considère la fonction G définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \quad G(z) = 1 - \sqrt{1-z^2}$$

1. Montrer que G est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui est telle que $\mathbb{E}(X) = +\infty$. [1]
2. Vérifier que la loi de X est celle de l'instant du premier retour en 0 pour une marche aléatoire symétrique au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$).

Exercice 3. *Un exemple simple de temps d'arrêt et la propriété de perte de mémoire*

Dans un jeu de *pile ou face*, on s'intéresse au premier instant T où la pièce tombe sur *pile*. On modélise cette expérience par une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$: dans cette modélisation, $[X_n = 1]$ représente l'évènement *le* $n^{\text{ème}}$ *jet est pile* et $[X_n = 0]$ représente l'évènement *le* $n^{\text{ème}}$ *jet est face*. On pose

$$T = \inf\{n \geq 1 / X_n = 1\}.$$

1. Pour $n \geq 1$ fixé, exprimer à l'aide des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ l'évènement $[T = n]$. En déduire la loi de T, puis pour $n, m \geq 1$, calculer $P[T > n]$ et $\mathbb{P}[T > n + m / T > n]$.
2. On considère maintenant une variable aléatoire $S : \Omega \to \mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}[S = k] > 0$ pour tout entier $k \geq 1$ et vérifiant la propriété suivante

$$\forall n, m \geq 1 \quad \mathbb{P}[S > n + m / S > n] = \mathbb{P}[S > m].$$

Montrer que $\mathbb{P}[S > n+1] = \mathbb{P}[S > 1]\mathbb{P}[S > n]$ puis exprimer $\mathbb{P}[S > n]$ en fonction de $q' = \mathbb{P}[S > 1]$. En déduire la loi de S.

Exercice 4. *Autour de la loi des grands nombres et des oscillations d'une marche aléatoire dont les pas n'ont pas de moment d'ordre* 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées** définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \geq 1$ on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

---

[1] on rappelle que la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est définie formellement par $\forall z \in \mathbb{C}\ G_X(z) = \sum_{k=0}^{+} \infty \mathbb{P}(Z = k) z^k$.

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que Y est intégrable si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[|Y| \geq n] < +\infty$.

2. On suppose que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (a) En remarquant que $\frac{X_n}{n} = \frac{n+1}{n}\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ donner le comportement asymptotique presque-sûr de la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geq 1}$.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to+\infty} [|X_n| > n]\right] = 0$ puis que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[|X_n| > n] < +\infty$.

   (c) Conclure que $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et déterminer la variable aléatoire X.

3. On suppose que $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$ et l'on se propose de montrer que non seulement la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas $\mathbb{P}$-p.s. mais que l'on a $\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{S_n}{n}\right| = +\infty \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$

   (a) On fixe $k \geq 1$ et on pose $C_k = \left[\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{S_n}{n}\right| \leq k\right]$. Justifier le fait que pour chaque $k \geq 1$ la probabilité de l'évènement C_k ne peut être que 0 ou 1.

   (b) Montrer que $C_k \subset \liminf_{n\to+\infty} \left[\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq k+1\right]$ puis que $C_k \subset \liminf_{n\to+\infty} \left[\left|\frac{X_n}{n}\right| \leq 3(k+1)\right]$.

   (c) On suppose $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{S_n}{n}\right| < +\infty\right] > 0$. Montrer qu'il existe alors $k_0 \geq 1$ tel que $\mathbb{P}[C_{k_0}] = 1$. En déduire que

   $$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to+\infty} \left[\left|\frac{X_n}{n}\right| > 3(k_0+1)\right]\right] = 0$$

   puis que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left[\left|\frac{X_n}{n}\right| > 3(k_0+1)\right] < +\infty$.

   (d) Conclure.

4. On suppose encore que $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$ et l'on se propose de préciser le résultat précédent en montrant que pour toute suite réelle $a = (a_n)_{n\geq 1}$ on a

   $$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{S_n}{n} - a_n\right| = +\infty \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

   On introduit une suite $(X'_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de même loi que X_1 et l'on suppose que les variables $X_1, X'_1, X_2, X'_2 \ldots$ sont indépendantes. Pour chaque entier $n \geq 1$ on pose $S'_n = X'_1 + \cdots + X'_n$ et $Y_n = X_n - X'_n$.

   (a) En notant μ la loi de X_1, justifier la formule $\mathbb{E}[|Y_1|] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[|X_1 - x|] d\mu(x)$ et en déduire que Y_1 n'est pas intégrable.

(b) On fixe une suite réelle $a = (a_n)_{n\geq 1}$ et l'on pose

$$C_a = \left[\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n}{n} - a_n\right| < +\infty\right] \quad \text{et} \quad C'_a = \left[\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{S'_n}{n} - a_n\right| < +\infty\right].$$

Montrer que C_a et C'_a sont des évènements indépendants de même probabilité et que l'on a

$$C_a \cap C'_a \subset \left[\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}\right| < +\infty\right].$$

(c) A l'aide de la partie 2 conclure que $\mathbb{P}[C_a] = 0$.

Exercice 5. *Une généralisation de l'identité de Wald et son prolongement au calcul de la variance*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $0 < \mathbb{E}[X_k^2] < +\infty$ et l'on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Pour tout $n \geq 1$ on note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$ et l'on considère un temps d'arrêt T relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tel que $\mathbb{E}[T] < +\infty$ (*on rappelle que T est un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq 0$ on a $[T = n] \in \mathcal{F}_n$*).

1. On cherche ici à calculer $\mathbb{E}[S_T]$.
   (a) Montrer que $|S_T| \leq \sum_{n\geq 1} |X_n|\mathbf{1}_{[T\geq n]}$ et que $[T \geq n] \in \mathcal{F}_{n-1}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}[|S_T|] < +\infty$.
   (c) Etablir *l'égalité de Wald* : $\quad \mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[T]$.
2. On suppose maintenant que les variables X_n sont centrées et on propose de calculer $\mathbb{E}[S_T^2]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}[S_T^2] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[X_n^2 1_{[T\geq n]}\right] + 2 \sum_{1\leq n<m<+\infty} \mathbb{E}\left[X_n X_m 1_{[T\geq m]}\right]$. En déduire que la variable aléatoire S_T est de carré intégrale.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}[S_T^2] = E[X_n^2]\mathbb{E}[T]$.
   (c) En déduire une expression de la variance de S_T

Exercice 6. *Sur les oscillations de la marche aléatoire au plus proche voisin*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et dont la loi est donnée par $\mathbb{P}[X_n = -1] = \mathbb{P}[X_n = 1] = 1/2$. Pour tout $n \geq 1$ on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Décrire le comportement en loi de la suite $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$.
2. Démontrer que $\mathbb{P}$-presque sûrement on a

$$\liminf_{n\to+\infty} S_n = -\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

3. En déduire que l'ensemble $\{n \geq 1 | S_n = 1\}$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement infini.
4. On pose $T = \inf\{n \geq 1 | S_n = 1\}$.
   (a) Vérifier que T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\sigma(X_1, \cdots, X_n))_{n\geq 1}$.
   (b) Donner la loi et l'espérance de la variable S_T
   (c) En déduire, à l'aide de l'exercice précédent, que la variable T n'est pas intégrable.

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et on note $\|.\|$ la norme dite "infinie" sur $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\forall x = (x_i)_{1\leq i\leq d} \qquad \|x\| = \sup_{1\leq i\leq d} |x_i|.$$

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$. On note μ la loi des variables X_i et $\hat{\mu}$ sa fonction caractéristique.

On note $(S_n)_{n\geq 1}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de loi μ, définie par $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

On va montrer ici que la marche $(S_n)_n$ est transiente si et seulement si pour tout sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, on a $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_0[S_n \in K] < +\infty$.

1. Soit F un ensemble fini d'entiers contenant 0 ; montrer que
$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_0[S_n \in F] \leq \text{card}(F) \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_0[S_n = 0]. \tag{1}$$
   Conclure.
2. **Le théorème de Chung-Fuchs.** On suppose maintenant $d = 1$ et on veut montrer que si $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ converge vers 0 en probabilité alors $(S_n)_n$ est récurrente. C'est le théorème de Chung-Fuchs.
   On suppose donc que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ converge vers 0 en probabilité. Pour tout $n \geq 1$ et $x > 0$ on pose $p_n(x) := \mathbb{P}[|S_n| < x]$. On fixe deux entiers $m, a \geq 2$.
   (a) Vérifier que les fonctions $x \mapsto p_n(x)$ sont positives et croissantes.
   (b) On fixe $x > 0$. Quelle est la limite de la suite $(p_n(nx))_n$? En déduire que
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} p_n(nx) = 1.$$
   (c) À l'aide de (1), montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(1) \geq \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(m) \geq \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{am} p_n(n/a)$. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(1) \geq \frac{a}{2}$.
   (d) Conclure.

Exercice 8. *Autour du principe de symétrie d'André*

Un jour d'élection deux candidats A et B obtiennent respectivement a voix et b voix ; on suppose $a > b$. Quelle est la probabilité qu'au cours du dépouillement on tire d'abord les suffrages de A puis ceux de B ? que le candidat A ait toujours la majorité stricte ? large ?

Exercice 9. *Autour des marches aléatoires symétriques sur $\mathbb{Z}$*

Pour tout $\alpha > 0$, on considère une suite de variables aléatoires i.i.d $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs entières et de loi μ_α donnée par

$$\mu(0) = 0 \text{ et } \quad \forall n \geq 1 \quad \mu(n) = \mu(-n) = \frac{c_\alpha}{n^{\alpha+1}},$$

où $c_\alpha > 0$ est une constante de normalisation convenablement choisie. On note $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoires associée sur $\mathbb{Z}$.

1. Pour quelles valeurs de α les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont elles intégrables ? pour ces valeurs de α, la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ est elle transiente ? récurrente ?
2. Montrer que $1 - \hat{\mu}(t) = c_\alpha |t|^\alpha \sum_{n\geq 1} \frac{1 - \cos tn}{(|t|n)^{\alpha+1}} |t|$ et en déduire que
$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \hat{\mu}(t)}{|t|^\alpha} = c_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^{\alpha+1}} du.$$
3. Pour quelles valeurs de α la marche $(S_n)_n$ est elle récurrente ? transiente ?
4. Vérifier que pour tout $\alpha > 0$, on a
$$\limsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} S_n = -\infty \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$
(on utilisera le fait que $(S_n/n^{\frac{1}{\alpha}})_n$ converge dans ce cas vers une loi non dégénérée de fonction caractéristique $e^{-|t|^\alpha}$).

Exercice 10. *Propriétés "arithmétiques" du support d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}^d$*

1. Les lois de probabilités suivantes définies sur sont elles adaptées ? apériodiques ? sur $\mathbb{Z}$
   (a) $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_3$
   (b) $\mu_2 = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3$
   (c) $\mu_3 = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$
2. Les lois de probabilités suivantes définies sur sont elles adaptées ? apériodiques ? sur $\mathbb{Z}^2$
   (a) $\mu'_1 = \frac{1}{2}\delta_{\vec{i}} + \frac{1}{2}\delta_{2\vec{j}}$
   (b) $\mu'_2 = \frac{1}{3}\delta_{-\vec{i}} + \frac{1}{3}\delta_{\vec{0}} + \frac{1}{3}\delta_{\vec{j}}$
   (c) $\mu'_3 = \frac{1}{3}\delta_{\vec{i}} + \frac{1}{3}\delta_{\vec{i}+\vec{j}} + \frac{1}{3}\delta_{2\vec{j}}$

Exercice 11. *Où l'on précise le théorème limite local du cours pour la marche au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$*

1. On considère la marche au plus proche voisin centrée sur $\mathbb{Z}$ et on fixe $x \in \mathbb{Z}$
   (a) Que dire de $\mathbb{P}(S_n = x)$ lorsque $x+n$ est impair ? On suppose $x+n$ pair dans la suite.
   (b) Expliciter $\mathbb{P}(S_n = x)$.
   (c) On pose $k = \frac{x+n}{2}$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = x) = \dfrac{2}{(1+\frac{x}{n})^k(1-\frac{x}{n})^{n-k}\sqrt{2\pi n}}(1+o(n))$.
   (d) Montrer que la suite de fonction $\xi_n : x \mapsto \dfrac{2}{(1+x)^k(1-x)^{n-k}\sqrt{2\pi n}}$ avec $k = \frac{x+n}{2}$, converge uniformément vers e^{-x^2} sur $\{y \in \mathbb{Z} : /y+n \ \in 2\mathbb{Z}\}$.
   (e) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ x+n\in 2\mathbb{Z}}} \left|\sqrt{n}\mathbb{P}(S_n = x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2n}}\right| = 0. \tag{2}$$
   (f) Que se passe-t-il lorsque $(S_n)_n$ n'est pas centrée ?
2. Etendre le résultat précédent aux marches aléatoires apériodiques sur $\mathbb{Z}^d$ (on reprendra la démonstration du cours et on utilisera le fait que
$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}Q(t)}e^{-i\frac{\langle x,t\rangle}{\sqrt{n}}}dt = \frac{1}{\sqrt{\det Q}}e^{-\frac{1}{2n}t^*Q^{-1}t}$$
   où t^* désigne le transposé de t)

Exercice 12. *Sur une forme "faible" du théorème du renouvellement sur $\mathbb{R}$*

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées et intégrables définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose de plus que $0 < m = \mathbb{E}[X_n] < +\infty$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$ on note S_n la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$. On introduit alors la famille $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^{*+}}$ de variables aléatoires définies par
$$N_t = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}.$$

1. Dans cette partie nous nous intéressons au comportement $\mathbb{P}-p.s.$ de $\dfrac{N_t}{t}$ lorsque $t \to +\infty$. On note S_{N_t} la variable aléatoire définie par
$$S_{N_t}(\omega) = S_{N_t(\omega)}(\omega).$$
   (a) Décrire le comportement presque-sûr de la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ tend $\mathbb{P}$-p.s. vers $+\infty$ et que pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{P}[N_t < +\infty] = 1$.

(c) Remarquer que $\mathbb{P}[\bigcap_{n\geq 0}[S_n < +\infty]] = 1$ et en déduire que

$$\lim_{t\to+\infty} N_t = +\infty \quad \mathbb{P}-p.s.$$

(d) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = m \quad \mathbb{P}-p.s.$

(e) En utilisant l'encadrement $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$ montrer que l'on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{m} \quad \mathbb{P}-p.s. \qquad (*)$$

2. Dans cette partie nous supposons de plus que les variables aléatoires $X_i, i \geq 1$, sont positives et nous nous attachons à préciser la convergence précédente $(*)$ en montrant que l'on a

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{N_t}{t}\right] = \frac{1}{m} \qquad (**).$$

Ce résultat est appelé *théorème du renouvellement* en Calcul des Probabilités et a été établi sous cette forme par Blackwell en 1948.

(a) Dans cette partie nous allons montrer que $\displaystyle\sup_{t\geq 1} \mathbb{E}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2\right] < +\infty$. Soit $c > 0$ tel que $p = \mathbb{P}[X_i > c] \in]0,1]$. Pour tout entier $i \geq 1$ posons $X'_i = \mathbf{1}_{[X_i > c]}$.

i. Donner la loi de X'_i puis celle de $S'_n = X'_1 + \cdots + X'_n$. Montrer que $0 \leq cS'_n \leq S_n \quad \mathbb{P}-p.s.$

ii. Pour tout $t \geq 1$ on pose $N'_t = \sup\{n \geq 0 : cS'_n \leq t\}$. Montrer que $N_t \leq N'_t \quad \mathbb{P}-p.s.$

iii. Pour tout réel $x > 0$ montrer que l'on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2 \geq x\right] &\leq \mathbb{P}[N'_t \geq t\sqrt{x}] \\ &\leq \mathbb{P}\left[S'_{[t\sqrt{x}]} - p[t\sqrt{x}] \leq K(c,x,t)\right]\end{aligned}$$

avec $K(c,x,t) = \frac{t}{c} - p[t\sqrt{x}]$.

iv. En déduire qu'il existe des constantes strictement positives C et k telles que

$$\forall t \geq 1 \quad \mathbb{P}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2 \geq x\right] \leq Ce^{-k\sqrt{x}}.$$

Indication : on remarquera que pour x assez grand on a

$$\forall t \geq 1 \quad K(c,x,t) \leq -p[t\sqrt{x}]/2$$

et on admettra l'inégalité de grandes déviations suivante : *pour tout $\epsilon > 0$ il existe des constantes strictement positives C_ϵ et k_ϵ telles que* $\mathbb{P}[S'_n - np < -n\epsilon] \leq C_\epsilon e^{-k_\epsilon n}$.

v. En utilisant l'exercice II conclure que

$$\forall t \geq 1 \quad \mathbb{E}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2\right] \leq C \int_0^{+\infty} e^{-k\sqrt{x}} dx < +\infty.$$

(b) Nous établissons maintenant la convergence $(**)$ en nous appuyant sur la majoration de la question 2. a. v.

i. Montrer que pour toute constante $M > 1/m$ on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} \mathbf{1}_{\left[\frac{N_t}{t} \leq M\right)} = \frac{1}{m}$$

au sens de la convergence $\mathbb{P}$-presque sûre et de la convergence $\mathbb{L}^1$.

ii. Montrer que pour toute constante $M > 0$ et tout $t \geq 1$ on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{N_t}{t} \mathbf{1}_{\left[\frac{N_t}{t} > M\right]}\right] \leq \frac{1}{M} \sup_{t\geq 1} \mathbb{E}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2\right].$$

iii. Conclure.