Exercices de Master 2 - Novembre 2010 -

Université de Tunis El Manar

Corrigés

Exercice 1.

1. Les variables aléatoires X_i prennent les valeurs 0 ou 1 et l'on a

$$\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}_n\{\omega = (\omega_i)_{1\leq i\leq n} \in \Omega/w_i = 1\} = \frac{\sharp\{\omega = (\omega_i)_{1\leq i\leq n} \in \Omega/w_i = 1\}}{\sharp\Omega} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2};$$

elles suivent donc une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1/2)$. Un jeu de Pile ou F consiste en la répétition de n épreuves ayant deux issues possibles, et lorsque la pièce est équilibrée, la probabilité d'obtenir telle ou telle suite de jets ne dépend pas de la suite ; les variables $X_1 \dots, X_n$ modélisent donc bien ce jeu.

2. La variable S_n est une somme de n termes valant 0 ou 1 ; elle est à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$. De plus on a

$$\forall k \in \{0, \cdots, n\} \quad \mathbb{P}_n[S_n = k] = \frac{\sharp\{(\omega_i)_{1\leq i\leq n} \in \Omega/\sum_i w_i = k\}}{2^n} = \frac{C_n^k}{2^n}.$$

On a $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{k=0}^n C_n^k k/2^n = n/2$ et $Var(S_n) = \mathbb{E}[S_n]^2 - (n/2)^2 = n/4$ (ce qui s'obtient par exemple en dérivant 1 et 2 fois l'expression $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ et en posant $x = 1/2$).

3. On a $L_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^n C_n^k e^{kt}/2^n = \Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)^n$ par la formule du binôme de Newton.

4. (a) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a $\mathbb{P}_n[S_n = k] = \mathbb{P}_n[S_n = n-k]$ si bien que $\mathbb{P}_n[S_n - n/2 \leq n\epsilon] = \mathbb{P}_n[S_n - n/2 \geq n\epsilon]$ et donc $\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \geq n\epsilon] = 2\mathbb{P}_n[S_n - n/2 \geq n\epsilon]$. L'inégalité ci-dessus s'obtient alors en remarquant que $\mathbb{P}_n[S_n - n/2 \geq n\epsilon] = \mathbb{E}_n[1_{[S_n - n/2 - n\epsilon \geq 0]}]$ et que, pour tout réel $t \geq 0$ on a $1_{[S_n - n/2 - n\epsilon \geq 0]} \leq e^{t(S_n - n/2 - n\epsilon)}$.

   (b) Posons $h_\epsilon(t) = (\frac{1}{2} + \epsilon)t + \log 2 - \log(1 + e^t)$; cette fonction est croissante sur $[0, t_\epsilon]$ et décroissante sur $[t_\epsilon, +\infty[$ avec $t_\epsilon = \log\dfrac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}$ (pour $\epsilon < 1/2$). On obtient l'inégalité annoncée en écrivant $\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \geq n\epsilon] \leq 2e^{-nh_\epsilon(t_\epsilon)}$ et en remarquant que $h_\epsilon(t_\epsilon) = H_\epsilon$.

5. (a) Posons $k = [n(\frac{1}{2} + \epsilon)] + 1$; il suffit de remarquer d'une part que l'on a $[S_n = k] \subset [S_n - n/2 \geq n\epsilon]$ et $[S_n = n-k] \subset [S_n - n/2 \leq -n\epsilon]$ et que d'autre part $\mathbb{P}_n[S_n = k] = \mathbb{P}_n[S_n = n-k]$.

   (b) Comme dans la question précédente, on pose $k = [n(\frac{1}{2} + \epsilon)] + 1$ et, puisque $k \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, la formule de Stirling donne

$$\mathbb{P}_n[S_n = [n(\frac{1}{2} + \epsilon)] + 1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2^n}\Big(\frac{n}{k}\Big)^k\Big(\frac{n}{n-k}\Big)^{n-k}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}(1 + \delta(n))$$

avec $\dfrac{n}{k} \geq \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\epsilon+\frac{1}{n}}, \dfrac{n}{n-k} \geq \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\epsilon}$ (d'où l'on tire aussi la minoration

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \geq \sqrt{\frac{1}{n(\frac{1}{2}+\epsilon+\frac{1}{n})(\frac{1}{2}-\epsilon)}},$$

pour $\epsilon < 1/2$ et n assez grand) ; l'inégalité cherchée suit immédiatement.
Concluons à présent. D'après la réponse à la question 4.(b), on a

$$\liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\ln\Big(\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \geq n\epsilon]\Big) \geq H_\epsilon.$$

Par ailleurs, d'après ce qui précède, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\ln\Big(\mathbb{P}_n[|S_n - n/2| \geq n\epsilon]\Big) \leq \limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\ln\Big(\mathbb{P}_n[S_n = [n(\frac{1}{2}+\epsilon)]+1]\Big) \leq H_\epsilon,$$

d'où le résultat souhaité.

6. Comme $H_\epsilon > 0$ on a

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[|S_n - \frac{n}{2}| \geq n\epsilon] \leq 2\sum_{n\geq 0} e^{-nH_\epsilon} < +\infty$$

si bien que, en utilisant par exemple le théorème de convergence monotone, on a

$$\mathbb{E}[\sum_{n\geq 0} 1_{[|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}|\geq\epsilon]}] = \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}[1_{[|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}|\geq\epsilon]}] < +\infty.$$

En particulier, la variable aléatoire $\sum_{n\geq 0} 1_{[|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}|\geq\epsilon]}$ est $\mathbb{P}$-presque-sûrement finie et donc, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$ on a $1_{[|\frac{S_n(\omega)}{n}-\frac{1}{2}|\geq\epsilon]} = 0$ à partir d'un certain rang. Autrement dit, en prenant $\epsilon = 1/k$, il existe $\Omega_k \subset \Omega, \mathbb{P}[\Omega_k] = 1$, tel que pour tout $\omega \in \Omega$ on ait $|\frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{1}{2}| \leq 1/k$ à partir d'un certain rang. On pose alors $\Omega_0 = \cap_{k\geq 1}\Omega_k$; pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\omega \in \Omega_0$ on a $|\frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{1}{2}| \leq \epsilon$ à partir d'un certain rang (dépendant de ϵ et ω), ce qui signifie que la suite $(S_n/n)_n$ converge presque-sûrement vers $1/2$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2. Développons de façon formelle en série entière en 0 la fonction $G(z) = 1 - \sqrt{1-z^2}$. Puisque $\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n\geq 1}\dfrac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}u^n$ dès que $|u| < 1$, on obtient $G(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}z^{2n}$, série entière de la forme $\sum_{k\geq 0} g_k z^k$ avec $g_k \geq 0$ et $\sum_{k\geq 0} g_k = 1$. C'est donc bien la transformée de Laplace d'une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$. Notons que le rayon de convergence de G vaut 1 (on vérifie en effet que $\frac{g_{2n+2}}{g_{2n}} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.)

Pour $|z| < 1$, on a $G'(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ si bien que $\lim_{\substack{0<s<1\\ s\to 1}} G'(s) = +\infty$; or $G'(s) = \sum_{k\geq 1} kg_k s^k \to \sum_{k\geq 1} kg_k = \mathbb{E}[N]$ lorsque $s \to 1$. Il vient $\mathbb{E}[N] = +\infty$.

Exercice 3.

1. La modélisation du jeu de pile ou face, sans que le nombre de jets de la pièce soit spécifié, est délicat et nécessite la mise en oeuvre de la théorie de la mesure. Nous pouvons utiliser par exemple une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{P, F\}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ que nous n'explicitons pas, en supposant que l'événement *le* $i^{\text{ème}}$ *tirage est pile* correspond à $[X_i = 1]$. Pour tout $n \geq 1$ on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T = n] &= \mathbb{P}[X_1 = F, \cdots, X_{n-1} = F, X_n = P] \\
&= \mathbb{P}[X_1 = F] \times \cdots \times \mathbb{P}[X_{n-1} = F] \times \mathbb{P}[X_n = P] \quad \text{par indépendance des } X_i \\
&= (\mathbb{P}[X_1 = F])^{n-1}\mathbb{P}[X_n = P] = (1/2)^n.
\end{aligned}$$

2. La propriété de perte de mémoire appliquée à $n \geq 0$ quelconque et $m = 1$ donne

$$P[X > n+1/X > n] = \frac{\mathbb{P}[X > n+1]}{\mathbb{P}[X > n]} = P[X > 1],$$

d'où $\mathbb{P}[X > n+1] = \Big(\mathbb{P}[X > 1]\Big)^n$. Posons $q := \mathbb{P}[X > 1]$; pour tout $k \geq 1$, il vient

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}[X > k-1] - \mathbb{P}[X > k] = q^k - q^{k+1} = 1-q)q^{k-1}.$$

Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \mathbb{P}[X > 1] = \mathbb{P}[X = 1]$.

Exercice 4.

1. On a, en notant μ la loi de Y et en utilisant le théorème de Funini

$$\mathbb{E}[|Y|] = \int_{\mathbb{R}} |y| d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^{|y|} dt \Big) d\mu(y) = \int_0^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{-t} d\mu(y) + \int_t^{+\infty} d\mu(y) \Big) dt$$

d'où $\mathbb{E}[|Y|] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[|y| \geq t] dt$. La fonction $t \mapsto \mathbb{P}[|y| \geq t]$ est décroissante, la comparaison de son intégrale avec une série donne le résultat escompté.

2. Soit $\Omega_0 \subset \Omega$, de $\mathbb{P}$-mesure 1, tel que $\forall \omega \in \Omega_0 \ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(\omega)}{n} = X(\omega) \in \mathbb{R}$.
   (a) Si *omega* $\in \Omega_0$, puisque $X(\omega) \in \mathbb{R}$, on voit que

   $$\frac{X_n(\omega)}{n} = \frac{n+1}{n} \frac{S_{n+1}(\omega)}{N+1} - \frac{S_n(\omega)}{n} \to X(\omega) - X(\omega) = 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

   (b) La suite $\dfrac{X_n}{n}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers 0 et donc, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, on a $|X_n(\omega)| \leq 1$ à partir d'un certain rand (dépendant de ω) ; autrement dit $\mathbb{P}[\liminf_{n\to+\infty} [|X_n| \leq n] = 1$, ce qui donne le résultat escompté en passant au complémentaire. La suite $([|X_n| > n])_n$ étant une suite d'événements indépendants, on obtient $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[|X_n| > n] < +\infty$ en appliquant la réciproque du théorème de Borel-Cantelli.

   (c) Les variables $X_1, X_2, \cdots$ ayant la même loi, on a donc $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[|X_1| > n] < +\infty$ et donc $\mathbb{E}|X_1|] < +\infty$ d'après la question 1. On peut alors appliquer la loi forte des grands nombres à la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ et conclure que $X = \mathbb{E}[X_1]$.

3. (a) C'est encore une application de la loi du $0-1$ de Kolmogorov, l'événement C_k ne dépendant en fait que des variables $X_n, X_{n+1}, \cdots$ pour tout entier n et étant donc un élément de la tribu asymptotique.

   (b) Si $\omega \in C_k$, on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| \leq k$ et donc $\left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| \leq k+1$ à partir d'un certain rand n_ω, dépendant de ω. L'égalité $\frac{X_n}{n} = \frac{n+1}{n}\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ entraîne alors
$$\left|\frac{X_n(\omega)}{n}\right| \leq 3(k+1)$$
pour $n \geq n_\omega$, pourvu que $\frac{n_\omega+1}{n_\omega} \leq 2$. Autrement dit $\omega \in \liminf\limits_{n\to+\infty}\left[\left|\frac{X_n(\omega)}{n}\right| \leq k+1\right]$.

   (c) L'événement $\left[\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| < +\infty\right]$ est la réunion croissante des événements $\bigcup_{k\geq 1}\left[\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq\right.$
il existe donc $k_0 \geq 1$ tel que $\mathbb{P}\left[\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq k\right] > 0$, soit $\mathbb{P}[C_{k_0}] > 0$ et donc $\mathbb{P}[C_{k_0}] = 1$ d'après la question (a).
D'après le (b), on en déduit que $\mathbb{P}\Big[\liminf\limits_{n\to+\infty}\Big[\left|\frac{X_n(\omega)}{n}\right| \leq 3(k_0+1)\Big]\Big] = 1$ soit
$$\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to+\infty}\Big[\left|\frac{X_n(\omega)}{n}\right| > 3(k_0+1)\Big]\Big] = 0.$$
La réciproque du théorème de Borel-Cantelli, valide pour des événements indépendants, entraîne alors $\sum\limits_{n\geq 1}\mathbb{P}\left[\left|\frac{X_n}{n}\right| > 3(k_0+1)\right] < +\infty$.

   (d) On a $\left[\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| < +\infty\right] = \bigcup\limits_{k\geq 1}\left[\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq k\right]$ et on a montré que si $\mathbb{P}\left[\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| < +\infty\right] > 0$ alors $\sum\limits_{n\geq 1}\mathbb{P}\left[|X_n| > 3n(k_0+1)\right] < +\infty$ c'est-à-dire $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$. Par conséquent, lorsque $\mathbb{E}(|X_n|) = +\infty$, on a $\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n}{n}\right| = +\infty$ $\mathbb{P}-$p.s..

4. (a) On a $\mathbb{E}[|Y_1|] = \mathbb{E}[|X_1 - X_1'|] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[|x-x'|]d\mu(x)d\mu(x')$, la loi de (X_1, X_1') étant $\mu\otimes\mu'$ et l'on conclut aisément. On a $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$ et donc $\mathbb{E}[|X_1 - x|] = +\infty$ pour tout réel x, d'où $\mathbb{E}[|Y_1|] = +\infty$ d'après la formule précédente.

   (b) L'événement C_a est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(X_n)_{n\geq 1}$ et C_a' par rapport à celle engendrée par $(X_n')_{n\geq 1}$; ces deux suites étant indépendantes et de même loi, il en est de même pour C_a et $C_{a'}$. De plus, si $\omega \in C_a \cap C_{a'}$, les suites $\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - a_n\right|$ et $\left|\frac{S_n'(\omega)}{n} - a_n\right|$ sont bornées et il en est de même pour la différence $\left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{S_n'(\omega)}{n}\right|$.; ainsi $\limsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{Y_1(\omega)+\cdots+Y_n(\omega)}{n}\right| < +\infty$ d'où l'inclusion souhaitée.

   (c) Si $\mathbb{P}(C_a) > 0$, on a $\mathbb{P}[C_a] = 1$ d'après la loi du 0-1 de Kolmogorov ; il en est de même pour $\mathbb{P}[C_{a'}]$ et donc, d'après la question précédente
$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}\right| < +\infty\right] = 1.$$

Mais ceci contredit la partie 3 de l'exercice puisque $\mathbb{E}[|Y_1| = +\infty$!

Exercice 5.

1. On a $\mathbb{P}[T < +\infty] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[T = n] = 1$ et donc $S_T = \sum_{k\geq 1} S_k 1_{[T=k]}$ $\mathbb{P}$-p.s. Il vient

$$|S_T| = \sum_{k\geq 1} |S_k| 1_{[T=k]} \leq \sum_{k\geq 1} \Big(\sum_{n=1}^{k} |X_n|\Big) 1_{[T=k]} = \sum_{n\geq 1} \Big(\sum_{k\geq n} 1_{[T=k]}\Big)|X_n| = \sum_{n\geq 1} |X_n| 1_{[T\geq n]}.$$

Par ailleurs $[T \geq n] = [T \leq n-1]^c = \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1}[T = k]\Big)^c$ appartient à $\mathcal{F}_{n-1}$, puisque chaque événement $[T = k], 1 \leq k \leq n$, appartient à $\mathcal{F}_{n-1}$.

À noter que puisque

(a) La variable X_n étant indépendante de la tribu $\mathcal{F}_{n-1}$, on a

$$\mathbb{E}[|X_n| 1_{[T\geq n]}] = \mathbb{E}[|X_n|]\ \mathbb{P}[T \geq n]$$

et donc

$$\mathbb{E}[|S_T|] \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|]\ \mathbb{P}[T \geq n] = \mathbb{E}[|X_1|] \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[T \geq n] = \mathbb{E}[|X_1|] \times \mathbb{E}[T] < +\infty.$$

(b) D'après ce qui précède, puisque $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|]\ \mathbb{P}[T \geq n] < +\infty$, on peut appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$\mathbb{E}[S_T] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n]\ \mathbb{P}[T \geq n] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[T \geq n] = \mathbb{E}[X_1] \times \mathbb{E}[T].$$

C'est l'identité de Wald.

2. (a) Comme précédemment, en utilisant l'égalité $S_T = \sum_{k\geq 1} S_k 1_{[T=k]}$ $\mathbb{P}$-p.s., on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k\geq 1} S_k^2 1_{[T=k]}\Big] &\leq \mathbb{E}\Big[\sum_{k\geq 1}\Big(\sum_{n=1}^{k} |X_n|\Big)^2 1_{[T=k]}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{k\geq 1}\Big(\sum_{n=1}^{k} X_n^2 + 2\sum_{1\leq n<m\leq k} |X_n X_m|\Big) 1_{[T=k]}\Big] \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\Big[X_n^2 \sum_{k\geq 1} 1_{[T=k]}\Big] + 2\sum_{1\leq n<m<+\infty} \mathbb{E}\Big[|X_n X_m| \sum_{k\geq m} 1_{[T=k]}\Big] \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\Big[X_n^2 1_{[T\geq n]}\Big] + 2\sum_{1\leq n<m<+\infty} \mathbb{E}\Big[|X_n X_m| 1_{[T\geq m]}\Big]
\end{aligned}$$

Malheureusement, il s'avère délicat de montrer que le second terme du membre de droite dans cette dernière inégalité est fini, ce qui est nécessaire pour pouvoir s'affranchir ensuite des signes $|\cdot|$.

Pour établir l'égalité souhaitée, on va supposer dans un premier temps que T est $\mathbb{P}$-p.s. bornée : il existe $N \geq 1$ tel que $\mathbb{P}[T \leq N] = 1$. Par linéarité de l'espérance, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_T^2] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{N} S_k^2 1_{[T=k]}\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{n=1}^{k} X_n\Big)^2 1_{[T=k]}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{n=1}^{k} X_n^2 + 2\sum_{1\leq n<m\leq k} X_n X_m\Big) 1_{[T=k]}\Big] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}\Big[X_n^2 1_{[T\geq n]}\Big] + 2\sum_{1\leq n<m\leq N} \mathbb{E}\Big[X_n X_m 1_{[T\geq m]}\Big] \\
&= \mathbb{E}[X_1^2]\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}[T\geq n] + 2\sum_{1\leq n<m\leq N} \mathbb{E}\Big[X_n 1_{[T\geq m]}\Big] \times \mathbb{E}[X_m]
\end{aligned}$$

la dernière égalité utilisant le fait que les variables X_n et $1_{[T\geq n]}$ sont indépendantes puisque $[T \geq n] \in \mathcal{F}_{n-1}$. Comme $\mathbb{E}[X_m] = 0$ on obtient $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[T] \times \mathbb{E}[X_1^2]$.
Lorsque T n'est par borné, on fixe un entier N quelconque et on remplace T par $T \wedge N$ (qui est encore un temps d'arrêt) ; d'après ce qui précède on a $\mathbb{E}[S_{T\wedge N}^2] = \mathbb{E}[T \wedge N] \times \mathbb{E}[X_1^2]$, ce qui s'écrit encore

$$\mathbb{E}[S_T^2 1_{[T\leq N]}] + N\mathbb{P}[T > N]\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{E}[T \wedge N] \times \mathbb{E}[X_1^2] \qquad (1)$$

puisque $\mathbb{E}[S_{T\wedge N}^2] = \mathbb{E}[S_T^2 1_{[T\leq N]} + S_N^2 1_{[T>N]}] = \mathbb{E}[S_T^2 1_{[T\leq N]}] + N\mathbb{P}[T > N]\mathbb{E}[X_1^2]$.
Comme $\mathbb{E}[T] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[T > n] < +\infty$ et que la suite $(P[T > N])_{N\geq 1}$ est décroissante, on a $N\mathbb{P}[T > N] \to 0$ quand $N \to +\infty$. En passant alors à la limite dans l'égalité (1), on obtient, pour tout temps d'arrêt T

$$\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[T] \times \mathbb{E}[X_1^2].$$

(b) L'inégalité voulue a été établie dans la question précédente.

(c) D'après ce qui précède, les variables X_n étant centrée, on a montré que

$$\mathrm{Var}(S_T) = \mathrm{Var}(X_1) \times \mathbb{E}[T].$$

Exercice 6.

1. D'après le théorème de la limite centrale, les variables X_i étant centrées et réduites (i-e $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et $\mathrm{var}(X_i) = 1$), la suite $\left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. On fixe un réel $c > 0$ quelconque. On a

$$\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to+\infty}\Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]\Big] \geq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_c^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt > 0$$

et comme $\Big[\limsup_{n\to+\infty}\Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]$ est un événement asymptotique, on a

$$\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to+\infty}\Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c\Big]\Big] = 1$$

et donc

$$\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty\Big] = \mathbb{P}[\bigcap_{k\geq 1}\limsup_{n\to+\infty}\Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq k\Big]\Big] = 1.$$

Il en est de même pour l' événements $\Big[\liminf_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty\Big]$ (et a fortiori $\Big[\limsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty\Big]$ et $\Big[\liminf_{n\to+\infty} S_n = -\infty\Big]$).

3. la marche $(S_n)_{n\geq 1}$ oscille donc entre $-\infty$ et $+\infty$ $\mathbb{P}$-presque sûrement ! Chacun de ses pas étant d'amplitude 1, elle visite le site 1 une infinité de fois, avec probabilité 1.
4. (a) On a $[T=n] = [S_1 \neq 1, S_2 \neq 1, \cdots, S_{n-1} \neq 1, S_n = 1] \in \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.
   (b) Remarquons d'abord que $\mathbb{P}[T < +\infty] = 1$ d'après la question 3 ; donc S_T est bien définie. De plus, par définition de T, on a $S_T = 1$ $\mathbb{P}$-p.s. la loi de S_T est donc la masse de Dirac en 1, et son espérance vaut 1.
   (c) On a $\mathbb{E}[S_T] = 1 = \mathbb{E}[X_1] \times \mathbb{E}[T]$; comme $\mathbb{E}[X_1] = 0$, on a nécessairement $\mathbb{E}[T] = +\infty$.

Exercice 7. Comme dans le cours, on suppose que la marche $(S_n)_{n\geq 1}$ est adaptée sur $\mathbb{Z}^d$.

1. Fixons $x \in F$; on pose $T_x := \inf\{n \geq 1 : S_n = x\}$ et $N_x := \sum_{n\geq 0} 1_{\{x\}}(S_n)$. On a,

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[S_n = x] = 1_{\{x\}}(0) + \mathbb{E}_0\Big[N_x(S_n)\Big] = 1_{\{x\}}(0) + \mathbb{E}_0\Big[\sum_{n\geq T_x} 1_{\{x\}}(S_n)\Big].$$

Or $\mathbb{E}_0\Big[\sum_{n\geq T_x} 1_{\{x\}}(S_n)\Big] = \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}_0\Big[1_{[T_x=k]}\sum_{n\geq k} 1_{\{0\}}(S_n - S_k)\Big]$; en utilisant d'une part le fait que les variables $1_{[T_x=k]}$ et $S_n - S_k, n \geq k$, sont indépendantes et d'autre part le fait que $\mathcal{L}(S_n - S_k) = \mathcal{L}(S_{n-k})$, on obtient

$$\mathbb{E}_0\Big[\sum_{n\geq T_x} 1_{\{x\}}(S_n)\Big] = \Big(\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}_0[T_x = k]\Big) \times \Big(\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_0[S_n = 0]\Big) \leq 1 \times (\mathbb{E}_0[N_0] - 1) = \mathbb{E}_0[N_0] - 1.$$

Ainsi $\mathbb{E}[N_x] = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[S_n = x] = \mathbb{E}[N_0] - 1$ pour $x \neq 0$. On conclut en écrivant

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[S_n \in F] = \sum_{x\in F}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[S_n = x] \leq \mathrm{card}F \times \mathbb{E}_0[N_0]. \tag{2}$$

La marche est transiente si et seulement si on a $\mathbb{E}[N_0] < +\infty$ (et dans ce cas $\mathbb{E}[N_x] < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, d'après le cours). Sous cette condition, on a alors $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_0[S_n \in F] < +\infty$ pour tout enesmble fini F, d'après l'inégalité (2). La réciproque est immédiate.

2. (a) La positivité est immédiate ; pour la croissance il suffit de noter que, pour $x \leq y$, on a

$$[|S_n| < x] \subset [|S_n| < y].$$

(b) Comme $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ converge vers 0 en probabilité, on a, pour tout $x > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} p_n(nx) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\Big[|\frac{S_n}{n}| > x\Big] = 1.$$

On obtient $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} p_n(nx) = 1$ en appliquant le théorème de Césaro.

(c) D'après la question (1), on a, pour tous entiers $n, m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[-m < S_n < m] \leq 2m \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[S_n = 0] = 2m \times \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(1).$$

Il vient $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(1) \geq \frac{1}{2m} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(m)$. Par ailleurs, si $n \leq am$, on a $m \geq n/a$ et donc $p_n(m) \geq p_n(n/a)$; en sommant sur $n \in \{1, \cdots, am\}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(m) \geq \sum_{n=1}^{am} p_n(m) \geq \sum_{n=1}^{am} p_n(n/a).$$

Il vient alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(1) \geq \frac{1}{2m} \sum_{n=1}^{am} p_n(n/a) \geq \frac{a}{2}\Big(\frac{1}{am} \sum_{n=1}^{am} p_n(n/a)\Big)$$

avec $\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{am} \sum_{n=1}^{am} p_n(n/a) = 1$. Le membre de gauche dans l'inégalité ci-dessus ne dépendant pas de m, il vient $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(1) \geq \frac{a}{2}$.

(d) En faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(1) = +\infty$, ce qui signifie que la marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 1}$ est récurrente.

Exercice 8. On pose $n := a + b$. Un dépouillement correspond à une suite $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ de chiffres -1 et 1, le chiffre ω_i correspondant au résultat du $i^{ème}$ bulletin extrait : $\omega_i = 1$ si ce bulletin est A et -1 si c'est B. Pour $1 \leq k \leq n$, la somme $\omega_1 + \cdots + \omega_k$ représente "l'avance" (positive ou négative) à l'instant k du candidat A sur le candidat B.

Si l'on extrait d'abord tous les bulletins favorables à A puis ceux favorables à B, la suite correspondante est $\omega_0 = (1, \cdots, 1, -1, \cdots - 1)$, avec a fois le chiffre 1 et b fois le chiffre -1. la suite ω_0 est donc choisie parmi les $\binom{a+b}{a}$ suites possibles (c'est-à-dire celles où apparaît a fois le 1 et b fois le -1) ; la probabilité d'obtenir une telle suite est donc $1/\binom{a+b}{a}$.

On s'intéresse ensuite aux suites ω telles que $\sum_{i=1}^{k} \omega_i > 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$; on note $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces suites. Si $\omega \in \mathcal{A}$, on a nécessairement $\omega_1 = 1$, l'ensemble $\mathcal{A}$ est donc inclus dans l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites commençant par 1 et contenant a fois le chiffre 1 et b fois le chiffre -1 ; soulignons que $\mathrm{card}(\mathcal{P}) = \binom{a+b-1}{a-1}$.

Pour dénombrer $\mathcal{A}$, il est plus facile de compter les suites de $\mathcal{P}$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{A}$, c'est-à-dire pour lesquelles il existe $k \in \{2, \cdots a+b\}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 0 \quad (*)$. On pose $\mathcal{I} := \mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$; si $\omega \in \mathcal{I}$, on note k_ω le plus petit entier ≥ 2 satisfaisant l'égalité $(*)$. On considère alors l'application τ définie sur $\mathcal{I}$ par

$$\tau(\omega) = (-\omega_1, -\omega_2, \cdots, -\omega_{k_\omega}, \omega_{k_\omega+1}, \cdots, \omega_n).$$

On vérifie aisément que τ est injective, donc bijective de $\mathcal{I}$ sur $\tau(\mathcal{I})$. De plus, toute suite $\omega' \in \tau(\mathcal{I})$ est de la forme $\omega' = (\omega'_1, \cdots, \omega'_n)$ avec $\omega'_1 = -1$ et $\sum_{k=2}^{n} \omega'_i = a - b + 1$; autrement dit, la sous-suite $(\omega'_i)_{2 \leq i \leq n}$ comprend $a-1$ termes égaux à 1 et b termes égaux à -1, si bien que $\mathrm{card}(\mathcal{I}) = \binom{a+b-1}{a}$.

On a finalement

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}) - \mathrm{card}(\mathcal{I}) = \binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a} = \frac{(a+b-1)!}{a!\ b!}(a-b)$$

si bien que

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{\mathrm{card}(\mathcal{A})}{\mathrm{card}(\mathcal{P})} = \frac{a-b}{a+b}.$$

La démonstration repose donc sur la mise en oeuvre de l'application τ ; c'est le *principe de symétrie* du mathématicien André.

Lorsque l'on s'intéresse aux dépouillement $\mathcal{A}'$ qui donne toujours une majorité large au candidat A, on applique la formule précédente en remplaçant a par $a+1$. En effet, à une trajectoire ω de longueur n qui donne toujours la majorité large à A au cours du temps correspond de façon bi-univoque la trajectoire $\omega' = (1, \omega_1, \cdots, \omega_n)$ de longueur $n+1$ qui donne cette fois-ci une majorité stricte à A au cours du temps puisque le premier pas est $+1$. On a donc

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}') = \frac{a+1-b}{a+1+b}.$$

Exercice 9.

1. On a $\mathbb{E}[|X_1|)] = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(n) = 2c_\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Lorsque $\alpha > 1$, les variables X_i sont donc intégrables et centrées ; on a vu en cours que dans ce cas la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ est récurrente sur $\mathbb{Z}$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable e^{itX_1} est bornée donc intégrable et l'on peut donc écrire

$$\begin{aligned} 1-\hat{\mu}(t) &= c_\alpha \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1-\cos tn}{|n|^{\alpha+1}} - c_\alpha \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{\sin tn}{|n|^{\alpha+1}} \\ &= 2c_\alpha |t|^{\alpha+1} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1-\cos tn}{(|t|n)^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que la fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.
Pour $t > 0$, on note f_t la fonction en escalier définie par

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f_t(u) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1-\cos tn}{(tn)^{\alpha+1}} \, 1_{[nt,(n+1)t[}(u).$$

On a $|t| \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1-\cos tn}{(|t|n)^{\alpha+1}} = \int_0^{+\infty} f_t(u)du$. Par ailleurs, la famille $(f_t)_{t>0}$ converge presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) vers la fonction $u \mapsto \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}$, et cette convergence est dominée par la fonction intégrable $u \mapsto \frac{1}{u^{\alpha-1}} 1_{[-1,1]} + \frac{2}{u^{\alpha+1}} 1_{[-1,1]^c}$. On conclut en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue. et en remarquant que

3. D'après ce qui précède, on a

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-\hat{\mu}(t)}\Big) \sim \frac{c}{|t|^\alpha}$$

au voisinage de l'origine, avec $c > 0$. Cette fonction est donc intégrable si et seulement si $\alpha < 1$. D'après le critère vu en cours, la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ est transiente lorsque $\alpha < 1$ et récurrente lorsque $\alpha \geq 1$ (et en particulier lorsque $\alpha > 1$, mais on le savait déjà grâce à la question 1).

4. Pour vérifier que la suite $(S_n/n^{\frac{1}{\alpha}})_n$ converge en loi, on utilise le théorème de Levy et l'on montre que la suite des fonctions caractéristiques associées converge au voisinage de 0 ponctuellement vers une fonction continue en 0. On en en effet, pour tout réel t

$$\mathbb{E}[e^{it\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}}] = \hat{\mu}\Big(\frac{t}{n^{1/\alpha}}\Big)^n = \exp\Big(n\ln(1-\frac{|t|^\alpha}{nc}\Big(1+o(n)\Big)\Big) \sim \exp\Big(-\frac{|t|^\alpha}{c}\Big)$$

ce qui prouve bien la convergence en loi annoncée (au facteur c près !) On utilise alors l'argument développé en cours, repris dans l'exercice 6 et basé sur la loi du $0-1$ de Kolmogorov pour conclure.

Exercice 10.

1. (a) μ_1 est adaptée sur $\mathbb{Z}$ car $1 = 3-1-1$ appartient au groupe engendré par son support, groupe qui n'est donc autre que $\mathbb{Z}$. Elle n'est pas apériodique car $S_{\mu_1} = \{-1, 3\} \subset -1+4\mathbb{Z}$

(b) μ_2 est adaptée sur $\mathbb{Z}$ car -1 appartient à S_{μ_2} et le groupe engendré par S_{μ_2} est donc égal à $\mathbb{Z}$. Cette mesure est aussi apériodique : en effet, $1 = 0 - (-1) \in S_{\mu_2} - S_{\mu_2}$ si bien que le groupe engendré par $S_{\mu_2} - S_{\mu_2}$ est encore égal à $\mathbb{Z}$.

(c) μ_3 est adaptée car $1 \in S_{\mu_3}$; elle n'est pas apériodique car $S_{\mu_3} \subset 1 + 2\mathbb{Z}$.

2. (a) μ'_1 n'est pas adaptée (et a fortiori pas apériodique) sur $\mathbb{Z}^2$ car $G_{\mu'_1} = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$.

(b) Les vecteurs $-\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont dans $S_{\mu'_2}$, donc $\vec{i}$ et $\vec{j}$ appartiennent à $G_{\mu'_2}$ d'où $G_{\mu'_2} = \mathbb{Z}^2$ (ie μ'_2 est adaptée). Elle est aussi apériodique car $\vec{i} = \vec{0} - (-\vec{i})$ et $\vec{j} = \vec{j} - \vec{0}$ appartiennent à $S_{\mu'_2} - S_{\mu'_2}$ si bien que le groupe engendré par cet ensemble est égal à $\mathbb{Z}^2$.

(c) μ'_3 est adaptée car $\vec{i} \in S_{\mu'_3}$ et $\vec{j} = i \vec{+} j - \vec{i} \in G_{\mu'_3}$.

Par ailleurs $S_{\mu'_3} - S_{\mu'_3}$ contient $-\vec{j}$ et $\vec{i} - 2\vec{j}$; le groupe engendré par cet ensemble contient donc $\vec{j}$ et $\vec{i} = (\vec{i} - 2\vec{j}) + 2\vec{j}$ et est donc égal à $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 11. *Où l'on précise le théorème limite local du cours pour la marche au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$*

On a $\mu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$.

1. (a) Comme $S_\mu \subset -1 + 2\mathbb{Z}$, la marche de loi μ ne visite des sites pairs qu'à des instants pairs et des sites impairs qu'à des instants impairs. Donc $\mathbb{P}(S_n = x) = 0$ lorsque $x + n$ est impair.

(b) On impose donc $\frac{x+n}{2}$ pair. Pour atteindre le site x à l'instant n, il faut aussi imposer $|x| \leq n$ et effectuer $\frac{n+x}{2}$ pas $+1$ et $\frac{n-x}{2}$ pas -1 d'où $\mathbb{P}(S_n = x) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{x+n}{2}}$ (on peut alors oublier la condition $|x| \leq n$ avec la convention que $\dbinom{n}{k} = 0$ lorsque $k \leq 0$ ou $n \leq 0$.

(c) On utilise la formule de Stirling qui stipule que $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1 + o(n))$ lorsque $n \to +\infty$; la valeur x étant fixée, on a aussi $k = \frac{n+x}{2} \to +\infty$ et $n - k = \frac{n-x}{2} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = x) &= \frac{1}{2^n}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1 + o(n))}{(\frac{n+x}{2})^{\frac{n+x}{2}} e^{-\frac{n+x}{2}} \sqrt{\pi(n+x)}(\frac{n-x}{2})^{\frac{n-x}{2}} e^{-\frac{n-x}{2}} \sqrt{\pi(n-x)}} \\
&= \frac{2 + o(n)}{\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n+1+x}{2}}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{\frac{n+1-x}{2}}}
\end{aligned}$$

(l'estimation de l'énoncé s'en déduit immédiatement, mais avec un reste $o_x(n)$, qui dépend donc de x puisqu'il provient du facteur $\dfrac{1 + o(n)}{\sqrt{(1 + \frac{x}{n})(1 - \frac{x}{n})}}$)

(d)

(e)

2.

Exercice 12.

1. (a) D'après la loi forte des grands nombres, la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers m.

   (b) Puisque $m > 0$, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $+\infty$: il existe donc $\Omega_0 \subset \Omega, \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ on ait $\lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = +\infty$. En particulier, si $\omega \in \Omega_0$, il existe $n_{t,\omega} \geq 1$ tel que $S_n(\omega) > t$ dès que $n \geq n_{t,\omega}$ d'où $N_t(\omega) \leq n_{t,\omega} < +\infty$. Ainsi $[N_t < +\infty] \subset \Omega_0$.

   (c) Les variables $S_n, n \geq 0$, sont toutes $\mathbb{P}$-presque sûrement finies ; en d'autres termes $\mathbb{P}[S_n < +\infty] = 1$ pour tout $n \geq 0$ et il en est donc de même pour leur intersection (dénombrable).
   Si $\omega \in \bigcap_{n\geq 0}[S_n < +\infty]$, on a $N_t(\omega) \geq n$ dès que $t \geq S_0(\omega), S_1(\omega), \cdots, S_n(\omega)$, ce qui prouve que $N_t(\omega) \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$.

   (d) D'après ce qui précède, il existe $\Omega_1 \subset \Omega$ de mesure 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$, on ait $\frac{S_n(\omega)}{n} \to m$ et $N_t(\omega) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$ et $t \to +\infty$; la suite $\frac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)}$ est donc extraite de $\frac{S_n(\omega)}{n}$ et converge vers m.

   (e) Pour tout $\omega \in \Omega_1$ on a
   $$\frac{S_{N_t(\omega)}}{N_t(\omega)} \leq \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t(\omega)+1}}{N_t(\omega)+1} \times \frac{N_t(\omega)+1}{N_t(\omega)}$$
   avec $\frac{S_{N_t(\omega)}}{N_t(\omega)} \to 1$ et $\frac{N_t(\omega)+1}{N_t(\omega)} \to 1$. On conclut $\frac{t}{N_t(\omega)} \to m$.

2. (a) i. Les variables $X'_1, \cdots, X'_n$ sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p ; S'_n suit donc une loi $\mathcal{B}(n,p)$. De plus, puisque $X_i \geq cX'_i$ pour tout $i \geq 1$, on a bien $S_n \geq cS'_n \geq 0$.

   ii. On a $\{n \geq 0 : S_n(\omega) \leq t\} \subset \{n \geq 0 : cS'_n(\omega) \leq t\}$ car $cS'_n\omega) \leq S_n(\omega)$ pour tout $n \geq 0$ et $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$. On en déduit que $N_t(\omega) \leq N'_t(\omega)$ $\mathbb{P}$-presque sûrement..

   iii. Ainsi, pour tout $x > 0$, si $\left(\frac{N_t(\omega)}{t}\right)^2 \geq x$, on a $N_t(\omega) \geq t\sqrt{x}$ d'où $N'_t(\omega) \geq t\sqrt{x} \geq [t\sqrt{x}]$ et donc $S'_{[t\sqrt{x}]} \leq \frac{t}{c}$. On obtient donc
   $$\mathbb{P}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2 \geq x\right] \leq \mathbb{P}\left[S'_{[t\sqrt{x}]} - p[t\sqrt{x}] \leq \frac{t}{c} - p[t\sqrt{x}]\right]$$

   iv. D'après ce qui précède et l'inégalité de grande déviations de l'énoncé, on a (attention $K(c,x,t) \leq -p[t\sqrt{x}]/2 < 0$ dès que $x \geq \left(\frac{1}{(pc)} + 1\right)^2$ et $t \geq 1$ ce que l'on suppose ici)
   $$\mathbb{P}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2 \geq x\right] \leq C_\epsilon e^{k_\epsilon K(c,x,t)} \leq C_\epsilon e^{-k_\epsilon p[t\sqrt{x}]/2}$$

si bien que

$$\exists C, k > 0, \forall t \geq 1, \forall x \geq 0 \quad \mathbb{P}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2 \geq x\right] \leq Ce^{-k\sqrt{x}}$$

v. D'après ce qui précède, on a, pour $t \geq 1$

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{N_t}{t}\Big)^2\Big] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\Big[\Big(\frac{N_t}{t}\Big)^2 \geq x\Big]dx \leq C\int_0^{+\infty} e^{-k\sqrt{x}}dx$$

(b) i. D'après la question 1.e, on sait qu'il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ de mesure 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_t(\omega)}{t} = \dfrac{1}{m}$; on a alors aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1_{\left[\frac{N_t}{t}\leq M\right]}(\omega) = 1$ dès que $M > \frac{1}{m}$ d'où la convergence $\mathbb{P}$-p.s. annoncée. La convergence $\mathbb{L}^1$ s'en déduit, via le théorème de convergence dominée et la majoration $0 \leq \dfrac{N_t(\omega)}{t} 1_{\left[\frac{N_t}{t}\leq M\right]} \leq M$.

ii. L'inégalité de Markov nous donne

$$\mathbb{E}\left[\frac{N_t}{t}\mathbf{1}_{\left[\frac{N_t}{t}>M\right]}\right] \leq \frac{1}{M}\mathbb{E}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2\right] \leq \frac{1}{M}\sup_{t\geq 1}\mathbb{E}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2\right].$$

iii. On a, pour tout $M > \frac{1}{m}$ fixé

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m}\Big|\Big] &\leq \mathbb{E}\Big[\Big|\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m}\Big| 1_{\left[\frac{N_t}{t}\leq M\right]}\Big] + \mathbb{E}\Big[\frac{N_t}{t} 1_{\left[\frac{N_t}{t}>M\right]}\Big] + \frac{1}{m}\mathbb{P}\Big[\frac{N_t}{t} > M\Big] \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\Big|\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m}\Big| 1_{\left[\frac{N_t}{t}\leq M\right]}\Big] + \frac{1}{M}\sup_{t\geq 1}\mathbb{E}\left[\left(\frac{N_t}{t}\right)^2\right] + \frac{1}{m}\mathbb{P}\Big[\frac{N_t}{t} > M\Big] \\
&=: I(t,M) + J(M) + K(t,M)
\end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$ fixé, on choisit d'abord $M > \frac{1}{m}$ tel que $J(M) < \epsilon/3$, puis t assez grand pour que $I(t,M) < \epsilon/3$ (ce qui est possible d'après la question 2.b.i) et $K(t,M) < \epsilon/3$ (ce qui découle de la convergence $\mathbb{P}$-p.s. 1.e).