Mesures de Hausdorff

de l'ensemble limite de groupes kleiniens

géométriquement finis

Nous nous proposons ici de montrer que l'exposant de Poincaré d'un groupe géométriquement fini coïncide avec la dimension de Hausdorff de son ensemble limite et de comparer les mesures naturelles portées par cet ensemble : la mesure de Patterson et les mesures de Hausdorff et packing pour la jauge standart.

I. Introduction et notations

Soit $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times]0, +\infty[$ le demi-espace supérieur de dimension 3 muni de la métrique hyperbolique $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{w^2}$ au point $(x + iy, w)$. On considèrera aussi le modèle de la boule $\mathbb{D}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 / ||x|| < 1\}$ où cette fois on pose $ds^2 = \dfrac{|dx^2|}{(1 - ||x||^2)^2}$. Dans les deux cas on note d la distance hyperbolique sur $\mathbb{H}^3$. Le bord à l'infini $\partial\mathbb{H}^3$ s'identifie, selon le modèle choisi, à $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{S}^2$; dans ce dernier cas, le bord $\partial\mathbb{H}^3$ est muni de la métrique euclidienne $|.|$. Dans la suite on fixe une origine o dans $\mathbb{H}^3$; c'est le centre de la boule $\mathbb{D}^3$ dans le modèle du disque et le point $(0, 1)$ dans le modèle du demi-espace.

Le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ est le groupe de Mobius de dimension 2. Une isométrie g de $\mathbb{H}^3$ agit sur le bord $\partial\mathbb{H}^3$ de l'espace hyperbolique par transformation conforme, le coefficient de conformité en un point ξ étant $|g'(\xi)| = \exp(-\mathcal{B}_\xi(\gamma^{-1}.o, o))$ où $\mathcal{B}_\xi(.,.)$ désigne le cocycle de Buseman au point ξ défini par

$$\forall x, y \in \mathbb{H}^3 \quad \mathcal{B}_\xi(x, y) = \lim_{z \to \xi} d(x, z) - d(y, z).$$

De plus, pour tout $\xi, \eta \in \partial\mathbb{H}^3$ on a

$$|g.\xi - g.\eta|^2 = |g'(\xi)||g'(\eta)||\xi - \eta|^2.$$

On considère dans ce qui suit un groupe kleinien, c'est-à-dire une sous-groupe discret G de $PSL(2, \mathbb{C})$. Un tel groupe agit proprement discontinuement sur $\mathbb{H}^3$. *L'ensemble limite* Λ_G de G est égal à $\overline{G.x} - G.x$; c'est le plus petit fermé G-invariant de $\partial\mathbb{H}^3$ et il ne dépend pas du point x. L'ensemble des points $\xi \in \Lambda_G$ pour lesquels il existe un voisinage borné du rayon géodésique $[o,\xi)$ contenant une infinité de points de $G.o$ joue un rôle crucial dans ce qui suit ; cet ensemble est appelé *ensemble limite radial*, il est G-invariant et on le note Λ_G^r . Si l'on pose $G=\{g_n, n\geq 1\}$ on peut écrire

$$\Lambda_G^r = \bigcup_{k\in \mathbb{N}} \limsup_{n\to+\infty} O_x(g_n.x,k)$$

où pour tous points x,y de $\mathbb{H}^3$ et tout $k>0$ on a $O_x(y,k)=\{\eta\in\partial\mathbb{H}^3/d([x,\eta),y)<k\}$ (on dit que $O_x(y,k)$ est *l'ombre* sur $\partial\mathbb{H}^3$ vue de x de la boule de centre y et de rayon k).

Le groupe G est dit *élémentaire* lorsque Λ_G est réduit à un ou deux points ; dans les autres cas le cardinal de Λ_G est infini. Lorsque $\sharp\Lambda_G=2$, le groupe G est dit *hyperbolique* , il est cyclique et engendré par une isométrie hyperbolique. Lorsque $\sharp\Lambda_G=1$, le groupe G est *parabolique* et isomorphe soit à $\mathbb{Z}$ soit à $\mathbb{Z}^2$ selon que, dans le modèle du demi-espace, le groupe G est engendré par une ou deux translations indépendantes.

On associe à G la*série de Poincaré* $\mathcal{P}_G$ définie , pour tout réel $s\geq 0$ et tous points $x,y\in\mathbb{H}^3$, par

$$\mathcal{P}_G(x,y,s)=\sum_{g\in G} e^{-sd(x,g.y)}.$$

L'estimation du volume des boules de $\mathbb{H}^3$ permet de montrer que $\mathcal{P}_G(x,y,s)<+\infty$ pour tout $s>2$. On note δ_G (ou encore δ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité) l'exposant critique de cette série :

$$\delta_G=\inf\{s\geq 0/\mathcal{P}_G(x,y,s)<+\infty\}.$$

Cet exposant ne dépend pas du choix de x et y et est appelé *exposant de Poincaré* de G. Le groupe G est dit *divergent* lorsque $\mathcal{P}_G(x,y,\delta_G)=+\infty$ et *convergent* sinon. Nous avons le résultat élémentaire suivant :

Lemme 1.1 - *Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}^*$ l'exposant de Poincaré du groupe P_α engendré par la transformation parabolique $z\mapsto z+\alpha$ est égal à $1/2$.*

Pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^*$ indépendant sur $\mathbb{R}$, l'exposant de Poincaré du groupe $P_{\alpha,\beta}$ engendré par les transformations paraboliques $z\mapsto z+\alpha$ et $z\mapsto z+\beta$ est égal à 1.

Dans les deux cas les groupes paraboliques sont divergents. De plus, si G est un groupe non élémentaire contenant un sous-groupe parabolique de rang k alors $\delta>k/2$.

Démonstration- Dans les deux cas, le point fixe du groupe parabolique considéré est $+\infty$ dans le modèle du demi-espace. Rappelons que si (z,w) et (z',w') sont deux points de $\mathbb{H}^3$ leur distance est donnée par

$$d((z,w),(z',w'))=\log\frac{1+t}{1-t} \quad \text{avec} \quad t=\sqrt{\frac{|z-z'|^2+|y-y'|^2}{|z-z'|^2+|y+y'|^2}}.$$

Si p_α désigne la tranlation $z \mapsto z + \alpha$ on a

$$d((i,1), p_\alpha^n(i,1)) = d((i,1),(i+n\alpha,1)) = (\log n^2)(1+\epsilon(n))$$

et la série de Poincaré de P_α se comporte comme la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|^{2s}}$; l'exposant de Poincaré de P_α est donc 1/2 et le groupe est de type divergent.

De même, pour tous entiers $n, m \in \mathbb{Z}^*$ on a $d((i,1), p_\alpha^n p_\beta^m(i,1)) = (\log|n\alpha + m\beta|^2)(1+\epsilon(n,m))$ et la série de Poincaré de $P_{\alpha,\beta}$ se comporte comme la série double $\displaystyle\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n\alpha + m\beta|^{2s}}$; ainsi l'exposant de Poincaré de $P_{\alpha,\beta}$ est 1 et ce groupe est divergent.

Enfin, si G est un groupe non élémentaire contenant un sous-groupe parabolique P on a de façon évidente $\delta \geq \delta_P$. L'inégalité stricte est plus délicate à obtenir et découle du fait que G est non élémentaire et que les groupes paraboliques sont de type divergent. En effet si G est non élémentaire, il contient une isométrie hyperbolique h dont les points fixes sont distincts de $+\infty$. Quitte à remplacer h par une puissance suffisamment grande et P par un sous-groupe parabolique de même rang, on peut supposer que G contient le produit libre $P* < h >$; ainsi $\{h^{n_1}p_1h^{n_2}p_{i_2}\cdots h_l^n p_l / n_j \in \mathbb{Z}^*, p_j \in P - \{Id\}, l \geq 1\}$ est contenu dans G et il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} e^{-sd(x,g.x)} &\geq \sum_{l \geq 1} \sum_{p_1 \cdots p_l} \sum_{n_1, \cdots, n_l} e^{-sd(x, h^{n_1}p_1 \cdots h^{n_l}p_l.x)} \\
&\geq \sum_{l \geq 1} \sum_{p_1 \cdots p_l} \sum_{n_1, \cdots, n_l} e^{-sd(x,h^{n_1}.x)} e^{-sd(x,p_1.x)} \cdots e^{-sd(x,h^{n_l}x)} e^{-sd(x,p_l.x)} \\
&\geq \sum_{l \geq 1} \Big(\sum_{p \in P - \{Id\}} e^{-sd(x,p.x)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-sd(x,h^n.x)} \Big)^l.
\end{aligned}$$

Le groupe P étant divergent, on a $\displaystyle\lim_{\substack{s \to \delta_P \\ s > \delta_P}} \sum_{p \in P - \{Id\}} e^{-sd(x,p.x)} = +\infty$ et l'on peut donc choisir $s_0 > \delta_P$ tel que

$$\sum_{p \in P - \{Id\}} e^{-s_0 d(x,p.x)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \Big(e^{-s_0 d(x,h^n.x)} > 1.$$

Ainsi $\mathcal{P}_G(x,x,s_0)$ diverge d'où $\delta_G > \delta_P$.

Dans ce qui suit le groupe G sera supposé non élémentaire. On note $C(\Lambda_G)$ l'enveloppe convexe de Λ_G; cet ensemble est invariant sous l'action de G et le quotient $N(G) = C(\Lambda_G)/G$ est le coeur de Nielsen de la variété $M(G) = \mathbb{H}^3/G$. On notera $N_\epsilon(G)$ un ϵ-voisinage de $N(G)$. Lorsque $\Lambda(G) = \Lambda_G^r$, l'ensemble $N(G)$ est relativement compact ; on dit que G est *convexe co-compact.* L'étude des groupes non co-compacts mais de co-volume fini (c'est-à-dire tels que la variété $M(G)$ est non compacte mais de volume fini) est une première étape dans l'etude de groupe plus généraux. Ces groupes font partie de la classe plus large des groupes dits *géométriquement finis* :

Définition 1.2 - *On dit qu'un groupe kleinien non élémentaire G est géométriquement fini si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que N_ϵ est de volume fini.*

La perte de compacité de N_ϵ se traduit par l'appparition dans Λ_G de points limites non coniques : les points *paraboliques bornées.*

Définition 1.3 - *Soit G un groupe kleinien non élémentaire. Un point $\xi \in \Lambda_G$ est dit parabolique borné si son stabilisateur P dans G est un groupe parabolique et si $\Lambda_G - \{\xi\}$ admet un domaine fondamental relativement compact pour l'action de P.*

Rappelons que la finitude géométrique peut être caractérisée de façon équivalent comme suit :

- pour tout $\epsilon > 0$ le volume de $N_\epsilon(G)$ est fini.

- pour tout $\epsilon > 0$, la partie ϵ-épaisse $N(G)^{>\epsilon}$ est relativement compacte.

- le groupe G contient un nombre fini de classes de conjugaison de groupes paraboliques dont les points fixes sont bornés.

- le coeur de Nielsen $N(G)$ peut se décomposer en $C_0 \cup C_1 \cdots \cup C_l$ où C_0 est un ensemble relativement compact et où, pour chaque $i = 1, \cdots, l$, il existe un groupe parabolique $P_i \subset G$ et une horoboule $\mathcal{H}_i$ basée en ξ_i tels que C_i soit isométrique au quotient de $\mathcal{H}_i \cap C(\Lambda(G))$ par le groupe P_i (notons que le point fixe ξ_i de P_i est alors nécessairement borné, que le groupe P_i agit sur $C(\Lambda_G) \cap \partial\mathcal{H}_i$ où $\partial\mathcal{H}_i$ désigne l'horisphère qui borde l'horiboule $\mathcal{H}_i$ et que cette action admet un domaine fondamental relativement compact).

2. Mesure conforme sur l'ensemble limite d'un groupe kleinien

Nous nous intéressons à la structure de Λ_G d'un point de vue de la théorie de la mesure. Rappelons tout d'abord la définition suivante

Définition 2.1 - *Une mesure finie σ sur $\mathbb{S}^2$ est dite G-conforme d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ si, pour tout $g \in G$, on a*

$$\frac{d(g^*\sigma)}{d\sigma)}(\xi) = \exp(\alpha \mathcal{B}_\xi(\gamma^{-1}.o, o)).$$

Rappelons le procédé de Patterson permettant de construire une mesure G-conforme sur $\mathbb{S}^2$ d'exposant δ_G. Pour chaque $s > \delta_G$ et chaque point $x \in \mathbb{H}^3$ on note σ_x^s la mesure orbitale

$$\sigma_x^s = \frac{1}{\mathcal{P}_G(o,s)} \sum_{g \in G} \exp(-sd(x, g.o)) D_{g.o}$$

où $D_{g.o}$ désigne la masse de Dirac en $g.o$. Lorsque le groupe G est de type divergent, toute valeur d'adhérence (pour la topologie de la convergence étroite) de la famille $(\sigma_x^s)_{x,s}$ est portée par Λ_G; on peut alors montrer que lorsque $s \to \delta_G$ par valeurs supérieures la famille de mesures $(\sigma_x^s)_s$ converge étroitement vers une mesure σ_x portée par Λ_G et vérifiant les deux conditions suivantes

$$\sigma_{x'}(.) = \exp(-\delta \mathcal{B}_{.}(x', x))\sigma_x(.) \quad \text{et} \quad g^*\sigma_x = \sigma_{g^{-1}.x}$$

où $g^*\sigma_x$ est la mesure sur $\mathbb{S}^d$ définie par $g^*\sigma_x(B) = \sigma_x(gB)$ pour tout borélien B de $\mathbb{S}^d$. On dit que la famille $(\sigma_x)_{x \in \mathbb{H}^3}$ est une *densité G-conforme d'exposant δ_G*.

Il est difficile a priori de montrer qu'un groupe G est de type divergent; en particulier D. Sullivan a établi cette propriété pour les groupes géométriquement finis, en étudiant le type des densités δ_G-conformes de ces groupes. Pour ce faire, il faut pouvoir construire de telles densités δ_G-conformes, , sans savoir à priori si G est de type convergent ou divergent ; en utilisant un argument du à Patterson, on modifie légèrement la série de Poincaré en posant

$$\mathcal{P}'_G(x, y, s) = \sum_{g \in G} e^{-sd(x,g.y)} h(d(x, g.y))$$

où h est une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que les séries $\mathcal{P}_G(x, y, s)$ et $\mathcal{P}'_G(x, y, s)$ aient le même exposant critique et

$$\forall \eta > 0, \exists t_\eta > 0, \forall t \geq t_\eta, \forall s \geq 0 \quad h(t + s) \leq h(t)e^{\eta s}.$$

Intéressons nous maintenant aux propriétés locales d'une densité G-conforme. Nous avons le

Lemme 2.2 (-Théorème de l'ombre de Sullivan-) *Soit G un groupe non élémentaire et σ une densité G-conforme d'exposant α. Il existe $C > 1$ et $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_0$ et tout $g \in G$ on ait*

$$\frac{1}{C} e^{-\alpha d(o,g.o)} \leq \sigma_x(O_x(g.o, r)) \leq C e^{-\alpha d(o,g.o)+2\alpha}.$$

Nous donnerons dans le paragraphe 5 une démonstration d'une version un peu plus précise de ce lemme. Soulignons en cependant deux conséquences importantes :

- en remarquant qu'une ombre $O_x(g.o, r)$ rencontre au plus un nombre uniformément borné d'ombres $O_x(h.o, r)$ avec $h \in G$ et $d(o, g.o) - 1 \leq d(o, h.o) \leq d(o, g.o) + 1$, on montre grâce à ce lemme que l'existence d'une densité G-conforme σ d'exposant α entraîne

$$\sharp\{g \in G / d(o, g.o) \leq R\} \leq C e^{\alpha R}$$

et donc $\alpha \geq \delta_G$ par définition de l'exposant de Poincaré de G. Il n'existe donc pas de densité G-conforme d'exposant $< \delta_G$.

- si $\sum_{n\geq 1} e^{-\alpha d(o,g.o)} < +\infty$ (ce qui est le cas lorsque $\alpha > \delta$) alors toute densité α-conforme donne une mesure nulle à Λ_G^r.

Théorème 2.3 - *Si G est géométriquement fini alors pour tout $x \in I\!H^3$ on a $\sigma_x(\Lambda_G^c) = \sigma_x(\Lambda_G)$ et le groupe G est de type divergent.*

Démonstration- Il suffit de démontrer que si ξ est un point parabolique borné de Λ_G alors il est de σ-mesure nulle. Rappelons que pour tout voisinage ouvert V de ξ dans $I\!H^3 \cup \partial I\!H^3$ on a

$$\sigma_x(\xi) \leq \sigma_x(V) \leq \liminf_{s_i \to \delta^+} \sigma_x^{s_i}(V).$$

Il suffit donc d'exhiber des ouverts V contenant ξ et tels que $\liminf_{s_i \to \delta^+} \sigma_x^{s_i}(V)$ soit arbitrairement petit. Nous allons nous placer dans le modèle du demi-espace et poser $\xi = +\infty$. On considère un domaine fondamental $\mathcal{D}_\infty$ pour l'action de $P = stab_G(\xi)$ sur $\partial I\!H^3 - \{+\infty\}$ que l'on peut choisir de façon que $\Lambda_G \cap \mathcal{D}_\infty$ soit relativement compact dans $\partial I\!H^3 - \{+\infty\}$. On note $\mathcal{D}$ le cône sur $\mathcal{D}_\infty$ issu de $+\infty$ et G' le sous-ensemble de G contenant les isométries g telles que $g.o \in \mathcal{D}$; les valeurs d'adhérence de $G'.o$ sont donc contenues dans $\overline{\mathcal{D}_\infty}$.

Choisissons $x \in I\!H^3$ tel que $B_\infty(x, g'.o) < 0$ pour tout $g \in G'$. Notons $P = \{p_k, k \geq 1\}$ et choisissons une suite décroissante d'ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que pour tout n on ait $G.o \cap V_n \subset \cup_{k\geq n} p_k\mathcal{D}$. Il vient immédiatement

$$\sigma_x^{s_i}(V_n) \leq \frac{1}{\mathcal{P}'(o, s_i)} \sum_{k\geq n} \sum_{g'\in G'} e^{-s_i d(x, p_k g'.o)}$$

La convexité des horisphères et le choix de x font que l'angle au point x entre les segments $[x, p_k.x]$ et $[x, g'.o]$ est minoré par une constante strictement positive ; il existe donc une (autre) constante $C > 0$ telle que $d(x, p_k g'.o) \geq d(x, p_k x) + d(x, g'.o) - K$ grâce au fait suivant

Lemme 2.4 - *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $C_\epsilon > 0$ tel que pour tout triangle géodésique de $I\!H^3$ de côtés a, b, c et d'angles opposés α, β et γ avec $\gamma \geq \epsilon$ on a*

$$a + b - C_\epsilon \leq c \leq a + b.$$

Démonstration- La loi du cosinus en géométrie hyperbolique donne

$$cosh\ c \ = \ cosh\ a\ cosh\ b \ - \ sinh\ a\ sinh\ b\ cos\ \gamma \geq cosh\ a\ cosh\ b\ (1 - |cos\ \gamma|)$$

si bien que

$$c \geq \log\ cosh\ c \geq \log(cosh\ a\ cosh\ b(1 - |cos\ \gamma|)) \geq a + b - C_\gamma$$

avec $C_\gamma = 2\log 2 - \log(1 - |cos\gamma|) \to +\infty$ lorsque $\gamma \to 0$.$\square$

Prenons alors $\eta > 0$ tel que $\delta_G > \delta_P + \eta$ et choisissons $x \in I\!H^3$ pour que $d(x, g.o) \geq t_\eta$; il vient

$$\sigma_x^{s_i}(V_n) \leq e^{Ks_i} \sum_{k \geq n} e^{-(s_i-\eta)d(x,p_k.x)} \frac{1}{\mathcal{P}'_G(s_i)} \sum_{g' \in G'} h(x, g'.o) e^{-s_i d(x,g'.o)}$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\liminf_{s_i \to \delta} \sigma_x^{s_i}(V_n) \leq e^{K\delta} \sum_{k \geq n} e^{-(\delta-\eta)d(x,p_k.x)} \sigma_x(\Lambda_G).$$

Comme $\delta - \eta > \delta_P$ on a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k \geq n} e^{-(\delta-\eta)d(x,p_k.x)} = 0$ d'où le résultat escompté. Ainsi σ_x ne charge pas ξ. L'ensemble des points paraboliques étant au plus dénombrable on a $\sigma(\Lambda_G^r) = \sigma(\Lambda_G)$ et un argument de type Borel-Cantelli permet de conclure que G est de type divergent. $\Box$

3 - Mesure de Bowen-Margulis des groupes géométriquement finis

Rappelons le procédé de Sullivan qui permet d'associer à une mesure de Patterson σ_x une mesure sur le fibré unitaire tangent de la variété $I\!H^3/G$, invariante par le flot géodésique.

Notons $\mathbb{S}^d \overset{\Delta}{\times} \mathbb{S}^d$ l'ensemble $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d$ privé de sa diagonale. On peut identifier le fibré unitaire tangent $T^1 I\!H^3$ au produit $\mathbb{S}^d \overset{\Delta}{\times} \mathbb{S}^d \times I\!R$ en associant à un élément $v = (y, \vec{v}) \in T^1/HH^3$ le triplet (ξ^-, ξ^+, r) où ξ^- et ξ^+ sont les extrémités de la géodésique orientée déterminée par $(y, \vec{v})$ et $r = B_{\xi^+}(y, o)$. Dans ces coordonnées, l'action d'une isométrie g de G est donnée par

$$g(\xi^-, \xi^+, r) = (g\xi^-, g\xi^+, r + B_{\xi^+}(x, g^{-1}x))$$

tandis que le flot géodésique $(\tilde{\phi}_t)_{t \in I\!R}$ agit sur $T^1 I\!H^3$ par

$$\tilde{\phi}_t(\xi^-, \xi^+, r) = (\xi^-, \xi^+, r - t).$$

Puisque σ_x est δ_G-conforme, la mesure $\dfrac{\sigma_x(d\xi^-)\sigma_x(d\xi^+)}{|\xi^- - \xi^+|^{2\delta}}$ est une G-invariante sur $\mathbb{S}^d \overset{\Delta}{\times} \mathbb{S}^d$: c'est le *courant géodésique* c^σ associé à $\sigma = (\sigma_x)$. La mesure $\tilde{\mu}^\sigma = c^\sigma \otimes dt$ est invariante sous les actions de G et du flot géodésique $(\tilde{\phi}_t)$; son support est $\Lambda_G \overset{\Delta}{\times} \Lambda_G \times I\!R$. Elle induit donc par passage au quotient une mesure μ^σ, invariante sous l'action du flot géodésique (ϕ_t) sur $T^1(M)$ et dont le support est $(\Lambda_G \overset{\Delta}{\times} \Lambda_G \times I\!R)/G$.

Lorsque G est co-compact ou convexe co-compact, l'ensemble $(\Lambda_G \overset{\Delta}{\times} \Lambda_G \times I\!R)/G$ est compact; μ^σ est alors finie et c'est la mesure d'entropie maximale. Lorsque G est géométriquement fini, divergent, et contient des transformations paraboliques, la question de la finitude de μ^σ se pose de façon naturelle (remarquons que si G était convergent, σ_x chargerait uniquement les points paraboliques et la mesure μ^σ serait clairement de masse infinie).

Théorème 3.1. *Si G est un groupe géométriquement fini, alors μ^σ est finie.*

Démonstration - La projection sur $\mathbb{H}^3$ du support de $\tilde{\mu}^\sigma$ est contenue dans $C(\Lambda_G)$. Le groupe G étant géométriquement fini, le quotient $C(\Lambda_G)/G$ se décompose en la réunion disjointe d'un compact C_0 et d'une famille finie $C_1, \cdots, C_l$ de "bouts cuspidaux": pour $i \geq 1$, chaque C_i est isométrique au quotient de l'intersection de $C(\Lambda_G)$ et d'une horiboule $\mathcal{H}_{\xi_i}$ par un groupe parabolique P_i. Choisissons un domaine fondamental borélien $\mathcal{C}_i$ pour l'action de G sur la préimage de C_i dans $\mathbb{H}^3$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{C}_0$ est relativement compact et que, pour $i \geq 1$, $\mathcal{C}_i$ est un domaine fondamental pour l'action de P_i sur $\mathcal{H}_{\xi_i} \cap C(\Lambda_G)$. On a

$$\mu^\sigma(T^1(\mathbb{H}^3/G)) = \sum_{i=0}^{l} \tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}_i) = \sum_{i=0}^{l} \int_{\mathbb{S}^d \overset{\Delta}{\times} \mathbb{S}^d} c^\sigma(d\xi^- d\xi^+) \int_{(\xi^- \xi^+)\cap \mathcal{C}_i} dt.$$

Puisque $\mathcal{C}_0$ est relativement compact dans $\mathbb{H}^3$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|\xi^- - \xi^+| \geq \epsilon_0$ pour toute géodésique $(\xi^- | \xi^+)$ rencontrant $\mathcal{C}_0$. Par conséquent, $\tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}_0) \leq \sigma_x(\mathbb{S}^d)^2/\epsilon^{2\delta}$.

Ainsi, la mesure μ^σ est finie si et seulement si $\tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}_i)$ est fini pour $i = 1, \cdots, l$. Notons pour simplifier $\mathcal{C}$ l'un des domaines fondamentaux $\mathcal{C}_i$, P le groupe parabolique et ξ le point parabolique correspondants. Puisque G est géométriquement fini, on peut choisir un domaine fondamental borélien $\mathcal{D}_\infty$ pour l'action de P sur $\mathbb{S}^d - \{\xi\}$ tel que $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_G$ soit relativement compact dans $\mathbb{S}^d - \{\xi\}$. Le groupe G étant divergent, on a $\sigma_x\{\xi\} = 0$ et donc

$$\tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}) = \sum_{p,q\in P} \int_{p\mathcal{D}_\infty \times q\mathcal{D}_\infty} c^\sigma(d\xi^- d\xi^+) \int_{(\xi^- \xi^+)\cap \mathcal{C}} dt.$$

En utilisant le fait que c^σ est invariante sous l'action de G, on obtient:

$$\tilde{\mu}^\sigma(T^1\mathcal{C}) = \sum_{p,q\in P} \int_{\mathcal{D}_\infty \times p^{-1}q\mathcal{D}_\infty} c^\sigma(d\eta^- d\eta^+) \int_{(\eta^- \eta^+)\cap p^{-1}\mathcal{C}} dt.$$

Puisque $\mathcal{C}$ est un domaine fondamental pour l'action de P sur $\mathcal{H}_\xi \cap C(\Lambda_G)$, on a donc:

$$\mu^\sigma(T^1\mathcal{C}) = \sum_{p\in P} \int_{\mathcal{D}_\infty \times p\mathcal{D}_\infty} c^\sigma(d\eta^- d\eta^+) \int_{(\eta^- \eta^+)\cap \mathcal{H}_\xi} dt.$$

D'un point de vue géométrique, toute géodésique $(\eta^- \eta^+)$ qui passe par $\mathcal{H}_\xi$ se projette sur M en une géodésique qui fait une incursion dans la région cuspidale C et le terme $\int_{(\eta^-\eta^+)\cap\mathcal{H}_\xi} dt$ correspond à la longueur de cette incursion. Comme $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_G$ est relativement compact dans $\mathbb{S}^d - \{\xi\}$, il existe un compact $K \subset \mathbb{H}^3$ contenant o tel que toute géodésique $(\eta^- \eta^+)$ issue de $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_G$ et rencontrant $\mathcal{H}_\xi$ traverse K ; une telle géodésique vérifie donc $|\eta^- - \eta^+| \geq \exp(-diam(K))$. Si de plus $\eta^+ \in p\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_G$, la géodésique $(\eta^+ \eta^-)$ passe par $p(K)$ et la différence $|\int_{(\eta^-\eta^+)\cap\mathcal{H}_\xi} dt - d(o, p.o)|$ est donc majorée par $2 diam K$. Finalement il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{C} \sum_{p\in P} \sigma_o(p\mathcal{D}_\infty)(d(o, p.o) - C) \leq \mu^\sigma(T^1\mathcal{C}) \leq C \sum_{p\in P} \sigma_x(p\mathcal{D}_\infty)(d(o, p.o) + C).$$

Puisque σ_o est δ-conforme, on a $\sigma_o(p\mathcal{D}_\infty) = \int_{\mathcal{D}_\infty} e^{-\delta B_\eta(p^{-1}o,o)}\sigma_o(d\eta)$. Comme $\mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_G$ est relativement compact dans $\mathbb{S}^d - \{\xi\}$ il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta \in \mathcal{D}_\infty \cap \Lambda_G$ et pour tous les $p \in P$ sauf peut-être un nombre fini, l'angle au point x entre les segments géodésiques $[o, p^{-1}o]$ et $[o, \eta)$ soit supérieur à ϵ ; le terme $\sigma_x(p\mathcal{D}_\infty)$ est donc équivalent à $e^{-\delta d(o,po)}$, uniformément en $p \in P$. L'inégalité $\delta > \delta_P$ permet de conclure que la série $\sum_{p\in P} d(o,p.o)e^{-\delta d(o,po)}$ est convergente.

$\square$

4- Dimension de Hausdorff de l'ensemble limite des groupes géométriquement finis

Nous reprenons ici la démonstration de Sullivan du fait que la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite d'un groupe géométriquement fini est égale à l'exposant critique de ce groupe. Ce résultat est en fait valable pour tous les groupes kleiniens non élémentaires, la preuve de Sullivan repose sur la finitude de la mesure de Bowen-Margulis.

Rappelons la définition de la dimension de Hausdorff $HD(E)$ d'un sous-ensemble E d'un espace métrique X. Pour $x \in X$ et $r > 0$ on note $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r. Pour s et ϵ strictement positifs on pose

$$\mu^s_\epsilon(E) = \inf\{\sum_{i=1}^n r_i^s / n \geq 1, r_i < \epsilon \quad \text{et} \quad E \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r_{i)}\}$$

puis

$$\mu^s(E) = \sup_{\epsilon > 0} \mu^s_\epsilon(E).$$

La dimension de Hausdorff de E est alors définie par $HD(E) = \inf\{s > 0/\mu^s(E) = 0\}$.

L'inégalité $HD(\Lambda_G) \leq \delta$ est facile à établir. Puisque Λ_G diffère de Λ_G^r d'au plus une famille dénombrable de points, il suffit de montrer que $HD(\Lambda_G^r) \leq \delta$. Rappelons que, en écrivant $G = \{g_n/n \geq 1\}$, on a

$$\Lambda_G^r = \bigcup_{k\geq 1} \limsup_{n\to+\infty} O_o(g_n.o, k).$$

Fixons $k \geq 1$ et posons $\Lambda_k = \limsup_{n\to+\infty} O_o(g_n.o,k)$. L'ombre $O_o(g.o,k)$ est une boule de $(\mathbb{S}^d, |.|)$ de rayon $\leq C(k)\exp(-d(o,g.o))$; pour $\epsilon > 0$ fixé on a alors

$$\Lambda_k \subset \bigcup_{n/C(k)\exp(-d(o,g.o))<\epsilon} O_o(g.o,k).$$

Le lemme de l'ombre de Sullivan donne alors $\mu^s_\epsilon(\Lambda_k) \leq C(k)^s P_G(o,o,s)$. Ainsi $\mu^s(\Lambda_k) < +\infty$ si $s > \delta$; cette propriété étant vérifiée pour tous les $s > \delta$ on a alors $\mu^s(\Lambda_k) = 0$ pour tout $s > \delta$ et donc, μ_s étant une mesure, $\mu_s(\Lambda_G^r) = 0$. Il vient $HD(\Lambda_G) \leq \delta$ par définition de la dimension de Hausdorff.

L'argument principal pour établir l'inégalité $HD(\Lambda_G \geq \delta$ repose sur un idée de Frostman : si E est un sous-ensemble de Λ_G^r de mesure de Patterson strictement positive et dont tout recouvrement fini par des boules $B_1, \cdots, B_n$ de rayons respectifs $r_1, \cdots, r_n$ est tel que $\sigma(B_i) \leq C r_i^{\delta(1-\eta)}$ où η est une constante strictement positive alors $HD(E) \geq \delta(1-\eta)$. En effet on a alors

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{\delta(1-\eta)} \geq \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{n} \sigma(B_i) \geq \frac{1}{C} \sigma(E)$$

si bien que E a une $\delta(1-\eta)$-mesure de Hausdorff strictement positive et $HD(E) \geq \delta(1-\eta)$. Il suffit pour conclure d'exhiber pour chaque valeur de $\eta > 0$ un tel ensemble E. Pour ce faire nous utiliserons les deux propriétés suivantes :

FLemme 4.1. *Soit π la projection canonique de T^1M sur M qui à un point $v = (x, \vec{v})$ de T^1M associe son point de base $\pi(v) = x$. Si μ^σ est fini alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} d(\pi(\phi_t v), o) = 0 \quad \mu^\sigma(dv) - p.s.$$

Posons $\rho(t, v) = d(\pi(\phi_t v), o)$ et notons ρ' la dérivée de ρ dans la direction du flot (ϕ_t) définie par $\rho'(v) = \lim_{s \to 0} \dfrac{\rho(s, v) - \rho(0, v)}{s}$. On a $|\rho'(v)| \leq 1$ et donc $\rho' \in \mathbb{L}^1(\mu^\sigma)$ puisque μ^σ est finie. Par ailleurs $\rho'(-v) = -\rho'(v)$ si bien que $\mu^\sigma(\rho') = 0$. Le Fait 1 est alors une conséquence du théorème ergodique de Birkhoff. $\square$

Lemme 4.2. *Soit G un groupe de type divergent et $(\sigma_x)_x$ la densité δ-conforme associée. Pour tout $R > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour tout point $y \in \mathbb{H}^3$ on ait*

$$\sigma_o(O_o(y, R)) \leq C \exp(-\delta d(o, y) + \delta d(y, G.o)).$$

Le groupe G étant divergent, la mesure σ_o est la limite étroite lorsque $s \to \delta^+$ de la famille de mesures orbitales $\sigma_o^s = \dfrac{1}{P_G(o, o, s)} \displaystyle\sum_{g \in G} e^{-sd(o, g.o)}$. Notons $\tilde{O}(y, R)$ l'ensemble des points z de $\mathbb{H}^3$ tels que le segment $[o, z]$ rencontre la boule de centre y et de rayon R ; si $z \in \tilde{O}(y, R)$, l'angle entre les segments $[o, y]$ et $[y, z]$ est minoré par une constante strictement positive et d'après le lemme 2.4. il existe alors $K > 0$ telle que $d(o, z) \geq d(o, y) + d(y, z) - K$ pour tout point $z \in \tilde{O}(y, R)$. Notons g_0 l'élément de G tel que $d(y, g_0.o) = d(y, G.o)$; on a $d(g_0.o, z) \leq d(g_0.o, y) + d(y, z)$. Finalement pour tout point $z \in \tilde{O}(y, R)$ on a

$$d(o, z) \geq d(o, y) + d(g_0.o, z) - d(g_0.o, y) - K$$

si bien que

$$\sigma_o^s(O_o(y, R)) \leq \frac{e^{s(K + d(y, g_0.o) - d(o, y))}}{P_G(o, o, s)} \sum_{g / g.o \in \tilde{O}(y, R)} e^{-sd(g_0.o, g.o)} \leq e^{s(K + d(y, G.o) - d(o, y))} \sigma_o^s(\overline{\mathbb{H}^3}).$$

Il suffit pour conclure de faire tendre s vers δ.$\square$

Indiquons maintenant comment D. Sullivan a établi l'inégalité $HD(\Lambda_G) \geq \delta$. Par le lemme 4.1. et le théorème d'Egorov, il existe un compact $V \subset T^1M$ de μ^σ-mesure strictement positive et tel que

$$\forall \eta > 0, \exists t_\eta > 0, \forall v \in V, \forall t \geq t_\eta \quad d(\pi(\phi_t.v, o) < \eta t.$$

Notons $\mathcal{V}$ un domaine fondamental relativement compact pour l'action de G sur la préimage de V ; sans perdre en gén'eralité, on peut supposer $o/in\mathcal{V}$. Posons $E = \{v(+\infty)/v \in \tilde{V}\}$; on a $\sigma(E) > 0$. Pour tout $\xi \in E$ notons ξ_t le point situé sur le rayon $[o, \xi)$ à distance t de l'origine ; on a $d(\xi_t, G.o) \leq \eta t + diam(\mathcal{V})$. En utilisant alors le lemme 4.2. il vient

$$\sigma_o(O_o(\xi_t, 1)) \leq C' e^{-\delta t + \eta\delta t}.$$

Rappelons alors que $O_o(\xi_t, 1)$ est une boule de $\mathbb{S}^d$ centrée en ξ et dont le rayon est de l'ordre de e^{-t} ; on montre ainsi que toute boule de rayon $r > 0$ centrée en un point de E est de mesure de Patterson inférieure à $Cr^{\delta(1-\eta)}$. L'argument de Frostman permet de conclure.

5. Comportement local de la mesure de Patterson

Dans ce paragraphe nous évaluons la mesure de Patterson des boules dont le centre appartient à l'ensemble limite de G. Cette estimation est due à D. Sullivan ; la démonstration qu'il proposait s'appuyait sur la notion de limite géométrique des groupes Kleinien mais présentait une faille quant à l'argument final (en effet, il est possible de construire une suite de groupes géométriquement finis convergeant vers un groupe parabolique, contrairement à ce qu'annonçait D. Sullivan). La démonstration que nous proposons ici reprend tout en le simplifiant l'argument de B. Stratmann et M. Velani ; elle présente de plus assez de souplesse pour être étendue au cas de la courbure variable.

Dans ce qui suit, ξ appartient à Λ_G et $\xi(t)$ désigne le point situé sur le segment géodésique $[o, \xi)$ à distance t de l'origine. On note $V(o, \xi, t)$ l'intersection de $\mathbb{S}^d$ avec le demi-espace contenant ξ orthogonal en $\xi(t)$ au segment $[o, \xi)$. Rappelons que la distance d'un point $x \in \mathbb{H}^3$ à une géodésique $(\xi^- \xi^+)$ est donnée par

$$ch\ d(x, (\xi^- \xi^+)) = 2 \frac{|x - \xi^-|.|x - \xi^+|}{|\xi^- - \xi^+|.(1 - |x|^2)}.$$

On en déduit immédiatement que l'ensemble $V(o, \xi, t)$ est une boule euclidienne sur $\mathbb{S}^d$ de centre ξ et de rayon r_t de l'ordre de e^{-t}.

Le groupe G étant géométriquement fini, le quotient $C(\Lambda_G)/G$ se décompose en la réunion disjointe d'un compact C_0 et d'une famille finie $C_1, \cdots, C_l$ de "bouts cuspidaux", l'ensemble C_0 correspondant à la partie ϵ-épaisse du coeur de Nielsen $N(G)$ pour un certain $\epsilon > 0$. La préimage de C_i dans $\mathbb{H}^3$ est notée $\tilde{C}_i$ et, pour $1 \leq i \leq n$, on désigne par k_i le rang du point parabolique ξ_i correspondant au bout cuspidal C_i.

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant

Théorème 5.1. *Pour tout point* $\xi \in \Lambda_G$ *et tout réel* $t > 0$ *on a*

$$\sigma_o(V(o,\xi,t)) \asymp e^{-\delta t + (k_t - \delta) d(\xi(t), G.o)}$$

où $k_t = \delta$ *si* $\xi(t) \in \tilde{C}_0$ et $k_t = k_i$ si $\xi(t) \in \tilde{C}_i$.

(la notation $a \asymp b$ signifie qu'il existe $C > 1$ tel que $\dfrac{a}{C} \le b \le C\ a$.)

Remarque - *Si* $\eta \in V(o, \xi(t), t)$ *l'angle en* $\xi(t)$ *entre les segments* $[o, \xi(t)]$ *et* $[\xi(t), \eta)$ *est supérieur à* $\pi/2$ *; par conséquent la différence* $\mathcal{B}_\eta(0, \xi(t)) - t$ *est bornée uniformément en* $\eta \in V(o, \xi(t), t)$. *En utilisant la* δ*-conformité de la famille de mesures* $(\sigma_x)_x$, *le théorème précédent peut donc s'énoncer de façon équivalente*

$$\sigma_{\xi(t)}(V(o,\xi,t)) \asymp e^{(k_t - \delta) d(\xi(t), G.o)}.$$

La démonstration du théorème 5.1. se fait en plusieurs étapes. Dans un premier temps nous considérons le cas où $\xi_t \in \tilde{C}_0$; le théorème apparaît alors comme une version améliorée du théorème de l'ombre de Sullivan (lemme 2.2). D'après la remarque précédente, il suffit de montrer que dans ce cas la quantité $\sigma_{\xi(t)}(V(o,\xi,t))$ est comprise entre deux constantes strictement positives indépendantes de t.

Puisque $\xi(t)$ appartient à $\tilde{C}_0$ il existe un point $g.o$ de $G.o$ à distance $\le diam(C_0)$ de $\xi(t)$. On obtient alors

$$\sigma_{\xi(t)}(V(o,\xi,t)) \asymp \sigma_{g.o}(V(o,\xi,t))$$

avec $\sigma_{g.o}(V(o,\xi,t)) = \sigma_o(V(g^{-1}.o, g^{-1}.\xi, t))$. Ainsi $\sigma_{\xi(t)}(V(o,\xi,t)) \le \sigma_o(\mathbb{S}^d)$. D'autre part, puisque $g^{-1}.\xi(t)$ est à distance $\le diam(C_0)$ de o on remarque qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule euclidienne $B_e(g^{-1}.\xi, \epsilon)$ soit contenue dans $V(g^{-1}.o, g^{-1}.\xi, t)$. On conclut en notant que, pour $\epsilon > 0$ fixé, on a $\inf\limits_{\eta \in \Lambda_G} \sigma_o(B_e(\eta, \epsilon)) > 0$.

Considérons à présent le cas où il existe $1 \le i \le l$ tel que $\xi(t) \in \tilde{C}_i$. Soit g l'élément de G tel que $\xi(t) \in g.\mathcal{H}_i$; il existe alors $0 \le s \le t$ tels que $[0, \xi(t)] \cap g.\mathcal{H}_i = [\xi(s), \xi(t)]$. On a $\sigma_o(V(o,\xi,t) \asymp e^{-\delta s} \sigma_{\xi(s)}(V(o,\xi,t))$ avec $d(\xi(s), \xi(t)) = t - s$ et $d(\xi(s), G.o) \le diam(C_0)$. Pour démontrer le théorème il suffit de vérifier que

$$\sigma_{\xi(s)}(V(o,\xi,t)) \asymp \exp(-\delta(t-s) + (k_i - \delta) d(\xi(t), G.\xi(s))).$$

On peut donc se ramener au cas où $\xi(t) \in \mathcal{H}_i$ et $o \in \partial \mathcal{H}_i$. Dans la suite de la démonstration nous supposerons que le segment $[o, \xi(t)]$ est inclus dans $\mathcal{H}_i$.

Enonçons d'abord le

Lemme 5.2. *Soit ξ_i un point fixe parabolique borné de rang k_i dans Λ_G. Alors*

$$\sigma_{\xi_i(t)}(V(o,\xi_i,t)) \asymp e^{(k_i-\delta)t} \quad \text{et} \quad \sigma_{\xi_i(t)}(\mathbb{S}^d - V(o,\xi_i,t)) \asymp e^{(k_i-\delta)t}.$$

Démonstration- Plaçons nous dans le modèle du demi-espace avec $\xi_i = +\infty$. Dans ce modèle, les points o et $\xi_i(t)$ correspondent respectivement aux couples $(0,1)$ et $(0,e^t)$ et l'ensemble $\mathbb{S}^d - V(o,\xi_i,t)$ n'est autre que le disque euclidien sur $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon e^t. Notons P le stabilisateur de ξ_i dans P. Puisque G est géométriquement fini, on peut choisir un domaine fondamental borélien $\mathcal{D}$ pour l'action de P sur $\mathbb{C}$ tel que $\mathcal{D}$ contienne 0 et tel que $\mathcal{D}\cap\Lambda_G$ soit relativement compact dans $\mathbb{C}$.

Le groupe G étant divergent, on a $\sigma_o(\xi_i) = 0$ d'où

$$\sum_{p/|o-p.o|\geq e^t+\Delta} \sigma_{\xi_i(t)}(p\mathcal{D}) \leq \sigma_{\xi_i(t)}(V(o,\xi_i,t)) \leq \sum_{p/|o-p.o|\geq e^t-\Delta} \sigma_{\xi_i(t)}(p\mathcal{D})$$

et

$$\sum_{p/|o-p.o|\leq e^t-\Delta} \sigma_{\xi_i(t)}(p\mathcal{D}) \leq \sigma_{\xi_i(t)}(\mathbb{S}^d - V(o,\xi_i,t)) \leq \sum_{p/|o-p.o|\leq e^t+\Delta} \sigma_{\xi_i(t)}(p\mathcal{D})$$

où Δ désigne le diamètre de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$. Par convexité des horisphères, la fonction de Buseman $\mathcal{B}_\eta(\xi_i(t), p.\xi_i(t))$ diffère de $d(\xi_i(t), p.\xi_i(t))$ d'une quantité bornée uniformément par rapport à $p\in P$ et $\eta\in p\mathcal{D}$; par conséquent

$$\sigma_{\xi_i(t)}(p\mathcal{D}) \asymp e^{-\delta d(\xi_i(t),p.\xi_i(t))}\sigma_{p.\xi_i(t)}(p.\mathcal{D}) \asymp e^{-\delta t-\delta d(\xi_i(t),p.\xi_i(t))}\sigma_o(\mathcal{D})$$

Il nous reste à estimer $d(\xi_i(t), p.\xi_i(t))$; on a $e^{-d(\xi_i(t),p.\xi_i(t))} = \dfrac{1-T}{1+T}$ avec $T = \sqrt{\dfrac{|o-p.o|^2}{|o-p.o|^2+4e^{2t}}}$ d'où $e^{-d(\xi_i(t),p.\xi_i(t))} \asymp \dfrac{1}{1+(|o-p.o|/e^t)^2}$.

Si $P =< p_\alpha >$, le point ξ_i est de rang 1; on a

$$\sigma_{\xi_i(t)}(V(x,\xi_i,t)) \asymp e^{-\delta t}\sum_{n/|n\alpha|>e^t}\Big(\frac{1}{1+(|n\alpha|/e^t)^2}\Big)^\delta \asymp e^{-\delta t}\int_{e^t}^{+\infty}\Big(\frac{1}{1+(u/e^t)^2}\Big)^\delta du \asymp e^{(1-\delta)t}$$

et

$$\sigma_{\xi_i(t)}(\mathbb{S}^d - V(x,\xi_i,t)) \asymp e^{-\delta t}\int_0^{e^t}\Big(\frac{1}{1+(u/e^t)^2}\Big)^\delta du \asymp e^{(1-\delta)t}.$$

Lorsque $P =< p_\alpha, p_\beta >$, le point ξ_i est de rang 2; il vient

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi_i(t)}(V(o,\xi_i,t)) &\asymp e^{-\delta t}\sum_{n,m/|n\alpha+m\beta|>e^t}\Big(\frac{1}{1+(|n\alpha+m\beta|/e^t)^2}\Big)^\delta \\ &\asymp e^{-\delta t}\int_{e^t}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{1+(r/e^t)^2}\Big)^\delta r\,dr\,d\theta \asymp e^{(2-\delta)t}\end{aligned}$$

et

$$\sigma_{\xi_i(t)}(\mathbb{S}^d - V(o,\xi_i,t)) \asymp e^{-\delta t}\int_0^{e^t}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{1+(r/e^t)^2}\Big)^{\delta} r\ dr\ d\theta \asymp e^{(2-\delta)t}.$$

□

Le théorème 5.1. est ainsi démontré lorsque ξ est un point parabolique et que $\xi(t)$ se projette sur la partie cuspidale correspondante. Cherchons maintenant à estimer $\sigma_{\xi(t)}(V(o,\xi,t))$ lorsque ξ n'est plus un point parabolique mais que le point $\xi(t)$ se projette néanmoins sur la partie mince de M. Dans la suite, on fixe une constante $C > 0$.

Supposons dans un premier temps que le point ξ_i appartient à $V(o,\xi,t+C)$.

Il existe alors $c > 0$ (ne dépendant que de C) tel que

$$V(o,\xi_i,t+c) \subset V(o,\xi,t) \subset V(o,\xi_i,t-c).$$

(pour s'en convaincre, on peut se rappeler que $V(o,\xi,t)$ est une boule euclidienne de $\mathbb{S}^d$ de centre ξ et de rayon $r_t \asymp e^{-t}$; on a alors $|\xi-\xi_i| < r_{t+C}$ et l'on peut choisir $\rho < 1$ tel que $B_e(\xi_i,\rho r_t) \subset B_e(\xi,r_t) \subset B_e(\xi_i,r_t/\rho)$ puis $c > 0$ tel que $V(o,\xi_i,t+c) \subset B_e(\xi_i,\rho r_t)$ et $B_e(\xi_i,r_t/\rho) \subset V(o,\xi_i,t-c)$).

Remarquons que la distance entre $\xi(t)$ et $\xi_i(t)$ est majorée indépendamment de t. En effet, un argument de convexité montre que l'angle entre les segments géodésiques $[o,\xi(t)]$ et $[\xi(t),\xi_i(t+c)]$ est minoré par une constante strictement positive ; la différence entre $d(o,\xi(t))+d(\xi(t),\xi_i(t+c))$ et $d(o,\xi_i(t+c))$ est donc uniformément bornée et il en est de même pour $d(\xi_i(t+c),\xi(t))$. Par conséquent $\sigma_{\xi(t)}(V(o,\xi,t)) \asymp \sigma_{\xi_i(t)}(V(o,\xi,t))$.

Par le lemme précédent, on sait que $\sigma_{\xi_i(t)}(V(o,\xi_i,t+c)) \asymp e^{(k-\delta)t}$; on conclut en remarquant que $t - d(\xi(t),G.o)$ est uniformément borné par rapport à t.

L'estimation de $\sigma_{\xi(t)}(\mathbb{S}^d - V(o,\xi,t))$ s'obtient de la même façon à partir de la double inclusion $\mathbb{S}^d - V(o,\xi_i,t-c) \subset \mathbb{S}^d - V(o,\xi,t) \subset \mathbb{S}^d - V(o,\xi_i,t+c)$.

Supposons maintenant que $\xi_i \notin V(o,\xi,t-C)$.

Posons $o' = \partial\mathcal{H}_i \cap]o,\xi[$ et $t' = d(\xi(t),o')$. Si ξ' désigne le point antipodal de ξ, on voit que

$$V(o,\xi,t) = \mathbb{S}^d - V(o',\xi',t') \quad \text{et} \quad \xi_i \in V(o',\xi',t'+C).$$

Soit $p.o$ le point de l'orbite $P.o$ le plus proche de o' ; la distance $d(p^{-1}.o',o)$ est majorée par $diam(C_0)$ et ξ_i appartient à $V(p^{-1}.o',p^{-1}.\xi',t'+C)$. De plus, il existe $c' > 0$ ne dépendant que de C et de $diam(C_0)$ tel que

$$V(o,p^{-1}.\xi',t'-c') \subset V(p^{-1}.o',p^{-1}.\xi',t'+C) \subset V(o,p^{-1}.\xi',t'+c').$$

Puisque le point ξ_i appartient à $V(o, p^{-1}.\xi', t'+c')$ on a finalement

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi(t)}(V(o,\xi,t)) &= \sigma_{\xi(t)}(\mathbb{S}^d - V(o',\xi',t')) \\ &= \sigma_{p^{-1}\xi(t)}(\mathbb{S}^d - V(p^{-1}.o', p^{-1}.\xi', t') \\ &\asymp \sigma_{x'_t}(\mathbb{S}^d - V(o, p^{-1}.\xi', t')\end{aligned}$$

où x'_t désigne le point de $[o, p^{-1}.\xi')$ situé à distance t' de o. D'après les estimations ci-dessus, on a

$$\sigma_{x'_t}(\mathbb{S}^d - V(o, p^{-1}.\xi', t') \asymp e^{(k_i-\delta)t'}$$

et l'on conclut en remarquant que $t' - d(\xi(t), G.o)$ est uniformément borné.

Examinons enfin le cas où $\xi_i \notin V(o,\xi,t+C)$ mais $\xi_i \in V(o,\xi,t-C)$.

Remarquons que $V(o,\xi,t+2C) \subset V(o,\xi,t) \subset V(o,\xi,t-2C)$. En écrivant alors $t - C = (t-2C)+C$ et $t + C = (t+2C) - C$, on obtient, grâce aux deux étapes précédentes

$$\sigma_{\xi(t-2C)}V(o,\xi,t-C) \asymp e^{(k_i-\delta)t} \quad \text{et} \quad \sigma_{\xi(t+2C)}V(o,\xi,t+C) \asymp e^{(k_i-\delta)t}$$

d'où le résultat.□

Cette estimation de la mesure de Patterson des boules de $\mathbb{S}^d$ centrées en des points de l'ensemble limite est essentielle pour établir le résultat suivant du à D. Sullivan.

Théorème 5.3. *Soit G un groupe géométriquement fini et $k_1, \cdots k_l$ le rang des différents bouts cuspidaux de la variété quotient $M = \mathbb{H}^{d+1}/G$. Notons σ_o la mesure de Patterson de G vue de l'origine, $\mathcal{H}_\delta$ la mesure de Hausdorff et $\mathcal{P}_\delta$ la mesure de packing de de $(\Lambda_G, |.|)$ associées à la jauge r^δ.*

Si pour tout $i \in \{1, \cdots, l\}$ on a $k_i \geq \delta$ alors $\sigma_o = \mathcal{P}_\delta$. S'il existe $i \in \{1, \cdots, l\}$ tel que $k_i > \delta$ alors $\mathcal{H}_\delta$ est nulle sur tout sous-ensemble de Λ_G de σ_o-mesure positive.

Si pour tout $i \in \{1, \cdots, l\}$ on a $k_i \leq \delta$ alors $\sigma_o = \mathcal{H}_\delta$. S'il existe $i \in \{1, \cdots, l\}$ tel que $k_i < \delta$ alors $\mathcal{P}_\delta$ est infinie sur tout sous-ensemble de Λ_G de σ_o-mesure positive.

Démonstration- Supposons que pour tout $i \in \{1, \cdots, l\}$ on ait $k_i \geq \delta$. D'après les estimations précédentes, il existe $c > 0$ tel que pour tout point $\xi \in \Lambda_G$ on ait

$$\frac{\sigma_o(B_e(\xi, r))}{r^\delta} \geq c.$$

Par ailleurs, la mesure de Bowen-Margulis étant ergodique pour le flot géodésique sur T^1M il vient

$$\limsup_{t\to+\infty} \mathbf{1}_{T^1C_0}(\phi_t v) = 1 \quad \mu^\sigma(dv) - p.s.$$

puisque $\mu^\sigma(T^1C_0) > 0$. Par conséquent $\limsup_{t\to+\infty} \mathbf{1}_{C_0}(\xi(t)) = 1 \quad \sigma(d\xi) - p.s.$ et par le théorème précédent il existe $C > 0$ tel que pour σ_o-presque tout ξ on ait

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\sigma_o(B_e(\xi, r))}{r^\delta} \leq C.$$

Un argument de type Frostman montre qu'il existe alors $K > 1$ tel que

$$\frac{1}{K}\mathcal{P}_\delta \leq \sigma_o \leq K\mathcal{P}_\delta.$$

La mesure $\mathcal{P}_\delta$ étant une mesure conforme sur Λ_G d'exposant δ elle coincide nécessairement avec σ_o par unicité d'une telle mesure.

Supposons maintenant qu'il existe $k_i > \delta$; par ergodicité de la mesure de Bowen-Margulis on a comme précédemment

$$\limsup_{t\to+\infty} d(\pi(\phi_t v), o)\mathbf{1}_{T^1C_i}(\phi_t v) = +\infty \quad \mu^\sigma(dv) - p.s.$$

Il vient $\limsup_{r\to 0} \frac{\sigma_o(B_e(\xi, r))}{r^\delta} = +\infty \quad \sigma_o(d\xi) - p.s.$ puisque $k_i > \delta$. L'argument de Frostman permet de conclure.

Le cas où tous les points paraboliques sont de rang $\leq \delta$ se traite de façon analogue.$\square$

Références-

Stratmann B., Velani S. L. *The Patterson measure for geometrically finite groups with parabolic elements, new and old* Proc. Lond. Math. Soc. 71 (1995) 197-220.

Sullivan D. *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups* Acta Math., (1984) p. 259-277.