ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MARC PEIGNÉ

Marches de Markov sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$. Cas de la marche aléatoire à pas markoviens sur $(\mathbb{R}^+)^d$ avec chocs élastiques sur les axes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, n° 1 (1992), p. 63-94.

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_1_63_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 1, 1992, p. 63-94. *Probabilités et Statistiques*

Marches de Markov sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$. Cas de la marche aléatoire à pas markoviens sur $(\mathbb{R}^+)^d$ avec chocs élastiques sur les axes

par

Marc PEIGNE

I.R.M.A.R., U.A. n° 305, Laboratoire de Probabilités,
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur un espace localement compact à base dénombrable X, $(X_n^*)_{n \geq 0}$ sa chaîne duale et f une application de X dans l'espace S des contractions de $\mathbb{R}^d$. Nous étudions les propriétés contractantes de la suite $(f(X_0) \circ \ldots \circ f(X_n))_{n \geq 0}$ et décrivons le comportement sur $X \times \mathbb{R}^d$ de la chaîne $(X_n^*, f(X_{n-1}^*) \circ \ldots \circ f(X_0^*)\, a)_{n \geq 0}$, $a \in \mathbb{R}^d$. Nous appliquons les résultats obtenus à l'étude de la marche de Markov sur $\mathbb{R}^d$ avec chocs élastiques sur les axes.

ABSTRACT. — Let $(X_n)_{n \geq 0}$ be a Markov chain on a L.C.B space X, $(X_n^*)_{n \geq 0}$ its reverse chain and f and application from X to the space S of the contractions. We study the contractive properties of the sequence $(f(X_0) \circ \ldots \circ f(X_n))_{n \geq 0}$ and describe the behaviour on $X \times \mathbb{R}^d$ of the Markov chain $(X_n^*, f(X_{n-1}^*) \circ \ldots \circ f(X_0^*)\, a)_{n \geq 0}$, $a \in \mathbb{R}^d$. We apply these results to the study of the Markov walk on $\mathbb{R}^d$ with elastic collisions on the axes.

Classification A.M.S. : 60 J 05.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 28/92/01/63/32/$ 5,20/© Gauthier-Villars

1. INTRODUCTION

On munit $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 1$, d'une norme $\| \,.\, \|$ et l'on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqq 0}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et à valeurs dans un espace localement compact à base dénombrable X. Soit f une application mesurable de X dans l'ensemble $S(\mathbb{R}^d)$ des contractions de $(\mathbb{R}^d, \| \,.\, \|)$ [*i.e.* des applications continues φ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ dont le coefficient de Lipschitz

$$m(\varphi) = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^d \\ x \neq y}} \left(\frac{\| \varphi(x) - \varphi(y) \|}{\| x - y \|} \right)$$

est inférieur ou égal à 1]. On note $\circ$ la loi de composition des applications et l'on se propose d'étudier le comportement asymptotique des produits de composition $f(X_0) \circ \ldots \circ f(X_n)$ et $f(X_n) \circ \ldots \circ f(X_0)$, $n \geqq 0$.

L'étude des sommes ou produits de variables aléatoires réelles ou complexes a conduit à des résultats très importants dont les plus typiques sont la loi forte des grands nombres, le théorème de la limite centrale ou encore le théorème limite local. Les travaux réalisés sur les produits de matrices aléatoires inversibles (citons par exemple Furstenberg et Kesten [7], Oseledec [15], Tutubalin [20], Virtser [21] ou Guivarc'h et Raugi [9], [10]) peuvent être considérés comme une extension multidimensionnelle de cette théorie, l'aspect essentiellement nouveau résidant dans la non commutativité du produit des matrices. L'étude de la composée de transformations aléatoires plus générales, non nécessairement linéaires ou bijectives, apparaît comme un prolongement intéressant à ces différents travaux; l'action sur $\mathbb{R}^d$ de ces produits de transformations permet en particulier de décrire le comportement asymptotique de processus dont les accroissements ne sont plus gouvernés par les translations (*cf.* marche aléatoire habituelle sur $\mathbb{R}^d$). Ce problème a été abordé par de nombreux auteurs : citons par exemple Leguesdron [12], Letac [14] (cas où les variables X_n sont indépendantes), ou encore Berger et Soner [2], Barnsley et Elton [1] (cas où les variables X_n sont en dépendance markovienne).

Notre étude précise certains de ces travaux; les techniques utilisées sont celles introduites par Furstenberg et Kesten [7] puis développées par Guivarc'h et Raugi ([9] et [10]) pour l'étude des produits de matrices aléatoires indépendantes. La non-commutativité du produit de composition se traduit par une approche différente dans l'étude du comportement asymptotique de la marche aléatoire droite $f(X_0) \circ \ldots \circ f(X_n)$ et de la marche aléatoire gauche $f(X_n) \circ \ldots \circ f(X_0)$ sur $S(\mathbb{R}^d)$. Les images successives des contractions $f(X_0) \circ \ldots \circ f(X_n)$ étant emboîtées, on s'intéresse aux propriétés contractantes de cette suite de fonctions, tandis que l'étude de la marche aléatoire gauche sur $S(\mathbb{R}^d)$ ne peut se faire qu'à travers celle de son action sur $\mathbb{R}^d$: pour tout point a de $\mathbb{R}^d$, on décrit le comportement erratique du processus $(f(X_n)\circ \ldots \circ f(X_0)\,a)_{n\geq 0}$.

Pour illustrer les résultats obtenus, considérons le cas de la « marche aléatoire sur $(\mathbb{R}^+)^d$, à pas markoviens et avec réflexions sur les axes ». Soit P un noyau markovien sur $\mathbb{R}^d$ et $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, (X_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ la chaîne de Markov canonique associée à P. On étudie le processus $(Y_n)_{n\geq 0}$ défini par

$$\begin{cases} Y_0 = a \in (\mathbb{R}^+)^d \\ Y_{n+1} = |Y_n - X_n| \end{cases}$$

ce qui revient donc à remplacer la translation de vecteur $x\in\mathbb{R}^d$ de la marche aléatoire habituelle $(X_0+\ldots+X_n)_{n\geq 0}$ par l'application f_x de $(\mathbb{R}^+)^d$ dans $(\mathbb{R}^+)^d$ définie par $\forall a\in(\mathbb{R}^+)^d$, $f_x(a)=|a-x|$ avec $|a-x|_i=|a_i-x_i|$. La suite $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^+)^d$, partant de (x, a) et de probabilité de transition T définie pour toute fonction borélienne bornée Φ par

$$T\Phi(x, a) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y, |a-x|)\,P(x, dy).$$

Cette chaîne intervient à propos d'une intéressante observation due à H. Von Schelling dans [19] sur les câblages téléphoniques, et a été étudiée par différents auteurs lorsque les variables X_n sont indépendantes et de loi μ portée par $\mathbb{R}$: W. Feller [6], F. B. Knight [11], J.-P. Leguesdron [12] et Boudiba [3] pour citer les plus importants. Notons que les transformations f_x, $x\in\mathbb{R}^d$, sont des contractions de $\mathbb{R}^d$ pour la norme euclidienne; l'étude de la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ rentre donc bien dans le cadre général où nous nous plaçons.

Nous faisons les hypothèses suivantes

(F1) *Il existe* $\delta\in]0, 1]$ *et une mesure de probabilité* μ *sur* $\mathbb{R}^d$ *tels que*

$$\forall x\in\mathbb{R}^d, \quad P(x, .) = \delta\mu(.) + (1-\delta)\,Q(x, .)$$

où Q *désigne un noyau markovien sur* $\mathbb{R}^d$.

La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est alors récurrente positive au sens de Harris, de mesure de probabilité P-invariante π [18]. On note $(X_n^*)_{n\geq 0}$ une version récurrente positive au sens de Harris de la chaîne duale de $(X_n)_{n\geq 0}$ et h la densité de μ par rapport à π.

(F2) *Les différentes marginales* μ_k, $1\leq k\leq d$, *sont adaptées sur* $\mathbb{R}$ (i.e. *non portées par un sous-groupe de* $\mathbb{R}$ *isomorphe à* $\mathbb{Z}$), *et le support* S_{μ_k} *de* μ_k *vérifie* $S_{\mu_k}\cap\mathbb{R}^{*+}\neq\varnothing$.

On note Δ_k la borne supérieure de S_{μ_k} dans $\overline{\mathbb{R}}$.

(F3) *Le noyau* P *admet des moments d'ordre* $3+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ [*cf. définition* (26)] *et de plus* $\int x\,\pi(dx)\in(\mathbb{R}^{*+})^d$.

Nous avons le résultat suivant :

Sous les hypothèses (F1), (F2) *et* (F3), *il existe une unique mesure de probabilité* $\lambda = \int \varepsilon_x \otimes \lambda_x \pi(dx)$ T-*invariante sur* $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^+)^d$ *et une variable aléatoire* Z *sur* $(\mathbb{R}^+)^d$ *de loi* $f(x)\lambda_x$ *sous* $\mathbb{P}_x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *telle que pour tout point* $a \in [0, \Delta_1[\times \ldots \times [0, \Delta_d[$, *la suite*

$$(h(X_n^*)((\|a - X_n^*| - \ldots - X_0^*|) - Z))_{n \geq 0}$$

converge $\mathbb{P}_x$-*p. s. vers* 0.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ *et tout point* a *de* $(\mathbb{R}^+)^d$, *la chaîne* $(\|a - X_0| - \ldots - X_n|)_{n \geq 0}$ *est récurrente et proximale sur les ouverts de* $(\mathbb{R}^+)^d$ *chargés par la mesure* $\int \lambda_x(.)\pi(dx)$, i.e. *il existe* $\Omega_x \subset (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_x(\Omega_x) = 1$, *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_x$, *tous points* a *et* b *de* $(\mathbb{R}^+)^d$ *et tout ouvert* V *de* $(\mathbb{R}^+)^d$ *tel que* $\int \lambda_x(V)\pi(dx) > 0$, *on ait*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1_V(\|a - X_0(\omega)| - \ldots - X_n(\omega)|) = +\infty$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (\|a - X_0(\omega)| - \ldots - X_n(\omega)|) - (\|b - X_0(\omega)| - \ldots - X_n(\omega)|) = 0.$$

Notons que pour $\delta = 1$ on retrouve le cas où les variables X_n sont indépendantes et de loi μ, cas déjà traité par J.-P. Leguesdron [12] lorsque μ est portée par $\mathbb{R}$. Comme δ est non nul, le terme « $\delta\mu$ » exprime que les variables X_n ont une certaine indépendance.

Les hypothèses de moment sur P permettent de prouver l'existence sur $(\mathbb{R}^d) \times (\mathbb{R}^+)^d$ d'une mesure de probabilité T-invariante λ, l'unicité de cette mesure étant assurée par le fait que les différentes marginales de μ sont adaptées sur $\mathbb{R}$. Rappelons que lorsque les variables X_n sont indépendantes et de loi μ portée par $\mathbb{Z}$, il existe sur $\mathbb{R}^+$ plusieurs mesures T-invariantes [3].

La mesure $\mu_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_{(\theta, -1)} + \varepsilon_{(-1, \theta)})$, avec $\theta > 1$ et $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ vérifie évidemment les hypothèses de ce théorème, d'où le résultat algébrique suivant :

Pour tout irrationnel $\theta > 1$, *il existe une suite* $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ *à valeurs dans* $\{(\theta, -1), (-1, \theta)\}$ *et un couple* $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$ *tels que pour tout point* $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, *on ait simultanément*

$$\lim_n \|a - x_n| - \ldots - x_0| = \alpha \qquad \textit{et} \qquad \lim_n \|b - y_n| - \ldots - y_0| = \beta.$$

2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. On munit $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 1$, d'une norme $\| \,.\, \|$ (par exemple la norme euclidienne) et l'on note $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. On introduit les espaces

$$\mathrm{B} = \{ \varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : \| \varphi \|_{\mathrm{B}} < +\infty \}$$

et

$$\mathrm{L} = \{ \varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : \| \varphi \|_{\mathrm{L}} = \| \varphi \|_{\mathrm{B}} + m(\varphi) < +\infty \}$$

où

$$\| \varphi \|_{\mathrm{B}} = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \left(\frac{\| \varphi(a) \|}{1 + \| a \|^2} \right) \qquad \text{et} \qquad m(\varphi) = \sup_{\substack{a,\, b \in \mathbb{R}^d \\ a \neq b}} \left(\frac{\| \varphi(a) - \varphi(b) \|}{\| a - b \|} \right).$$

$(\mathrm{B}, \| \,.\, \|_{\mathrm{B}})$ et $(\mathrm{L}, \| \,.\, \|_{\mathrm{L}})$ sont des espaces de Banach sur $\mathbb{R}$ et toute partie bornée de $(\mathrm{L}, \| \,.\, \|_{\mathrm{L}})$ est relativement compacte dans $(\mathrm{B}, \| \,.\, \|_{\mathrm{B}})$ [12].

On note $\mathrm{S}(\mathbb{R}^d)$, ou plus simplement S, l'ensemble des contractions de $\mathbb{R}^d$ [*i.e.* des éléments ξ de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ dont le coefficient de Lipschitz $m(\xi)$ est inférieur ou égal à 1] et $\mathscr{B}(\mathrm{S})$ la tribu des boréliens de S pour la topologie induite par celle de $(\mathrm{L}, \| \,.\, \|_{\mathrm{L}})$.

Si ξ_1 et ξ_2 sont deux contractions de $\mathbb{R}^d$, on note $\xi_1 \circ \xi_2$ leur composée et $\xi_1 a$ l'image de $a \in \mathbb{R}^d$ par l'application ξ_1.

2. Soit Q un noyau markovien défini sur un espace X localement compact à base dénombrable, et $(\mathrm{X}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathrm{X})^{\mathbb{N}}, (\mathrm{X}_n)_{n \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathrm{X}})$ la chaîne de Markov canonique associée à Q. Lorsqu'il existe sur X un mesure de probabilité Q-invariante π, on note Q^* l'opérateur dual de Q vis-à-vis de π et $(\mathrm{X}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathrm{X})^{\mathbb{N}}, (\mathrm{X}_n^*)_{n \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathrm{X}})$ la chaîne de Markov canonique associée à Q^*.

θ désigne l'opérateur de translation sur $\mathrm{X}^{\mathbb{N}}$, défini par $\theta(\omega) = \omega'$ avec $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$, $\omega' = (\omega'_n)_{n \geq 0}$ et $\omega'_n = \omega_{n+1}$.

Pour toute mesure de probabilité μ, on note S_μ le support de μ dans l'espace considéré. On désigne enfin par ε_x la mesure de Dirac au point x.

3. Soit f une application mesurable de $(\mathrm{X}, \mathscr{B}(\mathrm{X}))$ dans $(\mathrm{S}, \mathscr{B}(\mathrm{S}))$.

Les images successives des contractions

$$\mathrm{M}_n(\omega) = f(\mathrm{X}_0(\omega)) \circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_n(\omega)), \qquad \omega \in \mathrm{X}^{\mathbb{N}},$$

étant emboîtées, on s'intéresse aux propriétés contractantes de cette suite de fonctions; ceci nous permet alors d'étudier l'action sur $\mathbb{R}^d$ du produit $f(\mathrm{X}_n^*(\omega)) \circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))$ en décrivant le comportement erratique du processus $(f(\mathrm{X}_n^*(\omega)) \circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))\, a)_{n \geq 0}$ pour $a \in \mathbb{R}^d$.

Pour ce faire, il nous faut introduire la chaîne de Markov $(\mathrm{X}_n, \mathrm{M}_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathrm{X} \times \mathrm{S}(\mathbb{R}^d)$ [respectivement $(\mathrm{X}_n^*, f(\mathrm{X}_n^*(\omega)) \circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))\, a)_{n \geq 0}$ sur $\mathrm{X} \times \mathbb{R}^d$] relativement à la filtration canonique $(\mathscr{F}_n)_{n \geq 0}$ associée à $(\mathrm{X}_n)_{n \geq 0}$

et dont le noyau de transition R (resp. T) est défini par

$$\forall (x, s) \in \mathrm{X} \times \mathrm{S}(\mathbb{R}^d), \quad \mathrm{R}\Phi(x, s) = \int_{\mathrm{X}} \Phi(y, s \circ f(y)) \mathrm{Q}(x, dy)$$

$\left[\text{resp. } \forall (x, b) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R}^d,\ \mathrm{T}\Psi(x, b) = \int_{\mathrm{X}} \Psi(y, f(x) b) \mathrm{Q}^*(x, y)\right]$ pour toute fonction borélienne bornée Φ sur $\mathrm{X} \times \mathrm{S}(\mathbb{R}^d)$ (resp. Ψ sur $\mathrm{X} \times \mathbb{R}^d$).

3. RÉSULTATS PRINCIPAUX

A. Hypothèses

4. HYPOTHÈSE H1. — *La chaîne* $(\mathrm{X}_n)_{n \geqq 0}$ *est récurrente positive au sens de Harris sur* X, *de mesure de probabilité invariante* π.

On note $(\mathrm{X}_n^*)_{n \geqq 0}$ une version récurrente positive au sens de Harris de la chaîne duale de $(\mathrm{X}_n)_{n \geqq 0}$ [18].

5. HYPOTHÈSE H2. — *Il existe* $c \in]0, 1]$, *une mesure de probabilité* ν *sur* $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ *de marginale* ν_1 *sur* X *et une fonction borélienne* δ *de* X *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $\pi(\delta) > 0$ *et* $\delta(x) > 0\ \nu_1(dx)$-*p.s. tels que*

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in \mathrm{X}, \\ \mathrm{U}_c((x, \mathrm{I}), .) = \sum_{n \geqq 1} (1-c)^{n-1} \mathrm{R}^n((x, \mathrm{I}), .) \geqq \delta(x) \nu(.) \end{array}\right\} \qquad (*)$$

I *désignant la fonction identité sur* $\mathbb{R}^d$.

Notons ν_2 la marginale de ν sur S et T_{ν_2} le semi-groupe fermé de S engendré par le support de ν_2.

6. HYPOTHÈSE H3. — *Il existe* $u \in \mathbb{R}^d$ *et* $(\xi_n)_{n \geqq 0}$ *une suite d'éléments de* T_{ν_2} *tels que*

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_n \xi_n a = u.$$

On dit que $(\xi_n)_{n \geqq 0}$ *est une suite contractante de point de contraction* u.

7. HYPOTHÈSE H4. — *Il existe sur* $\mathrm{X} \times \mathbb{R}^d$ *une mesure de probabilité* λ T-*invariante.*

Lorsque ces hypothèses sont satisfaites, on dit que le couple (Q, f) vérifie H1, H2 $[\nu, \delta]$, H3 $[(\xi_n)_{n \geqq 0}, u]$ et H4 $[\lambda]$ (ou plus simplement H1 à H4 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés).

8. COMMENTAIRES SUR LES HYPOTHÈSES

(*a*) Sous H2, moyennant une modification de l'espace X, on peut remplacer l'hypothèse H1 par

HYPOTHÈSE H'1. — *Il existe sur* X *une mesure de probabilité* π Q-*invariante*.

En effet, sous H'1 et H2, il existe $\hat{X} \subset X$, $\nu_1(\hat{X}) = 1$ tel que la chaîne $(X_n)_{n \geqq 0}$ sur $\hat{X}$ soit récurrente positive au sens de Harris. Pour exhiber $\hat{X}$, nous allons utiliser les techniques développées dans [18].

Pour toute fonction h de X dans [0, 1], on note U_h et I_h les noyaux de transition définis, pour toute fonction Φ borélienne bornée sur X, par

$$\forall x \in X,$$
$$U_h \Phi(x) = \mathbb{E}_x [\sum_{n \geqq 1} (1 - h(X_1)) \dots (1 - h(X_{n-1})) \Phi(X_n)]$$

et

$$I_h \Phi(x) = h(x) \Phi(x).$$

Si h et k désignent deux fonctions de X dans [0, 1], avec $h \leqq k$, les potentiels U_h et U_k sont liés par la relation suivante

$$U_h = \sum_{n \geqq 0} (U_k I_{k-h})^n U_k$$

d'où l'on tire l'équation résolvante

$$U_h = U_k + U_h I_{k-h} U_k = U_k + U_k I_{k-h} U_h$$

ainsi que l'inégalité $U_h(h) \leqq U_k(k) \leqq 1$ [18].

En projetant sur X l'inégalité $(*)$ de H2, on obtient

$$\forall x \in X, \quad \sum_{n \geqq 1} (1-c)^{n-1} Q^n(x, .) \geqq \delta(x) \nu_1(.)$$

avec $\delta \leqq \frac{c}{2}$, quitte à remplacer δ par $\inf\left(\delta, \frac{c}{2}\right)$.

L'équation résolvante nous donne alors

$$U_\delta \geqq U_\delta I_{c-\delta} U_c \geqq \frac{c}{2} U_\delta(\delta) \nu_1(.).$$

L'existence d'une mesure de probabilité π Q-invariante telle que $\pi(\delta) > 0$ entraîne $U_\delta(\delta) = 1$ ν_1-p. s. En effet, si $1 - U_\delta(\delta)$ n'est pas ν_1-négligeable, on a $\nu_1(\delta(1 - U_\delta(\delta))) = \alpha > 0$ et donc

$$(U_\delta I_\delta)^2 1 = U_\delta(\delta) - U_\delta I_\delta (1 - U_\delta(\delta))$$
$$\leqq U_\delta(\delta) - \frac{c}{2} U_\delta(\delta) \nu_1(\delta(1 - U_\delta(\delta))) \leqq \left(1 - \frac{\alpha c}{2}\right) U_\delta(\delta)$$

d'où $\forall n \geqq 1$, $(U_\delta I_\delta)^n 1 \leqq \left(1 - \frac{\alpha c}{2}\right)^{n-1}$.

Par conséquent

$$\sum_{n \geqq 0} Q^n(\delta) = \delta + U_0(\delta) = \delta + \sum_{n \geqq 0} (U_\delta I_\delta)^n U_\delta(\delta)$$
$$\leqq \delta + \sum_{n \geqq 0} \left(1 - \frac{\alpha c}{2}\right)^n < +\infty$$

ce qui contredit l'inégalité $\pi(\delta) > 0$. On a donc bien $U_\delta(\delta) = 1$ ν_1-p. s.

On pose alors $\hat{X} = \{x \in X : U_\delta(\delta)(x) = 1\}$. $\hat{X}$ est un ensemble de ν_1-mesure pleine, Q-absorbant *i.e.* $\forall x \in \hat{X}$, $Q(x, \hat{X}) = 1$. En effet, grâce à l'équation résolvante, on a

$$\forall x \in X,$$
$$1 - U_\delta(\delta)(x) = 1 - Q(\delta)(x) - QI_{1-\delta} U_\delta(\delta)(x)$$
$$= Q((1-\delta)(1 - U_\delta(\delta)))(x)$$

si bien que pour $x \in \hat{X}$, la mesure $Q(x, .)$ est portée par $\{y : (1 - \delta(y))(1 - U_\delta(\delta)(y)) = 0\}$, c'est-à-dire par $\hat{X}$ vue que $1 - \delta \geqq 1 - \frac{c}{2} > 0$.

Par conséquent, pour $x \in \hat{X}$, $(X_n)_{n \geqq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\hat{X}$ partant de x et vérifiant $U_\delta(\delta) = 1$, avec $\delta > 0$ sur $\hat{X}$. La chaîne $(X_n)_{n \geqq 0}$ est donc récurrente au sens de Harris sur $\hat{X}$ [18], *i.e.* il existe sur $\hat{X}$ une mesure positive σ-finie et Q-invariante m_1 telle que pour tout borélien A de $\hat{X}$, l'inégalité $m_1(A) > 0$ entraîne

$$\forall x \in \hat{X}, \quad \mathbb{P}_x\left[\sum_{n=1}^{+\infty} 1_A(X_n) = +\infty\right] = 1$$

la mesure ν_1 étant absolument continue par rapport à m_1.

De plus, m_1 est l'unique mesure σ-finie Q-excessive sur $\hat{X}$, à une constante multiplicative près; l'inégalité $\pi 1_{\hat{X}} Q \leqq \pi 1_{\hat{X}}$ montre alors que m_1 est une mesure bornée; en particulier on peut prendre

$$m_1 = \frac{\pi 1_{\hat{X}}}{\pi(\hat{X})}.$$

(*b*) L'hypothèse H2 est en particulier vérifiée lorsque

$$\forall x \in X, \quad Q(x, .) \geqq \delta(x) \mu(.)$$

où μ est une mesure de probabilité sur X et δ une fonction positive telle que $\pi(\delta) > 0$ et $\delta > 0$ μ-p. s.; il suffit de poser $\nu(dx, ds) = \int \varepsilon_{f(x)}(ds) \mu(dx)$.

Lorsque de plus $\forall x \in X$, $\delta(x) \geqq \delta > 0$, la chaîne $(X_n)_{n \geqq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris [18].

(*c*) Dans l'énoncé de l'hypothèse H2, on peut remplacer la mesure ν par une mesure de probabilité ν' sur $X \times S(\mathbb{R}^d)$ se désintégrant en

$$\nu'(dy, ds) = \int \tau * \nu_y(ds)\,\nu_1(dy)$$

où τ et ν_y désignent des mesures de probabilité sur $S(\mathbb{R}^d)$, le support S_τ de τ étant le semi-groupe fermé T_{ν_2}.

Décomposons ν en $\nu(dy, ds) = \int \nu_y(ds)\,\nu_1(dy)$ et montrons par récurrence que pour tout $d \in]0, c]$ et tout entier n, il existe une mesure de probabilité τ_n sur $S(\mathbb{R}^d)$ et un réel $\delta_n(d) > 0$, tels que

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in X, \\ U_d((x, I), (dy, ds)) \geqq \delta_n(d)\,\delta(x) \displaystyle\int \tau_n * \nu_y(ds)\,\nu_1(dy) \end{array}\right\} \qquad (**)$$

le support de τ_n étant celui de la convolée d'ordre n de ν_2, *i. e.* $S_{\nu_2^{*n}}$.

En effet, pour $n=0$ cette inégalité découle directement de l'équation résolvante :

$$\forall d \leqq c, \quad U_d = U_c + (c-d)\,U_c\,U_d.$$

Lorsque l'inégalité $(**)$ est vérifiée à l'ordre n, on a, pour toute fonction borélienne positive Φ sur $X \times S(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} U_d\Phi(x, I) &\geqq (c-d)\,U_c\,U_d\Phi(x, I) \\ &\geqq (c-d)\,\delta(x) \int U_d\Phi(y, s)\,\nu(dy, ds) \\ &\geqq (c-d)\,\delta(x)\,\delta_n(d) \int \delta(y)\,\Phi(z, s\circ t)\,\tau_n * \nu_z(dt)\,\nu_1(dz)\,\nu(dy, ds) \\ &\geqq (c-d)\,\delta(x)\,\delta_n(d) \int \Phi(z, t)\left[\int \delta(y)\,\nu(dy, \,.\,)\right] * \tau_n * \nu_z(dt)\,\nu_1(dz) \\ &\geqq \delta_{n+1}(d)\,\delta(x) \int \Phi(z, t)\,\tau_{n+1} * \nu_z(dt)\,\nu_1(dz) \end{aligned}$$

en posant

$$\delta_{n+1}(d) = (c-d)\,\delta_n(d)\,\nu_1(\delta) \qquad \text{et} \qquad \tau_{n+1} = \frac{1}{\nu_1(\delta)} \int \delta(y)\,\nu(dy, \,.\,) * \tau_n.$$

Quitte à modifier les constantes $\delta_{n+1}(d)$, on obtient par sommation

$$U_d((x, I), (dy, ds)) \geqq \delta(x) \int \tau * \nu_y(ds)\,\nu_1(dy)$$

où τ est une mesure de probabilité sur $S(\mathbb{R}^d)$ de support T_{ν_2}.

(*d*) L'hypothèse H3 est vérifiée dès qu'il existe dans T_{v_2} une contraction s telle que $m(s)<1$; $(s^n)_{n\geqq 1}$ est alors une suite contractante (*cf.* théorème du point fixe).

(*e*) S'il existe sur $X\times\mathbb{R}^d$ une mesure T-invariante λ (*cf.* hypothèse H4), la marginale sur X de cette mesure est évidemment Q^*-invariante et λ se désintègre en

$$\lambda=\int_X \varepsilon_x\otimes\lambda_x\,\pi(dx).$$

En utilisant alors la définition de l'opérateur Q^* on montre que, pour π-presque tout x on a

$$\lambda_x=\int_X f(y)\,\lambda_y\,Q(x,dy).$$

où $f(y)\,\lambda_y$ désigne l'image de la mesure de probabilité λ_y par l'application $f(y)$.

B. Énoncé des résultats

9. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses* H1, H2, H3 *et* H4, *la mesure* λ *est l'unique mesure de probabilité* T-*invariante sur* $X\times\mathbb{R}^d$.

Pour tout $x\in X$, *la suite aléatoire de mesures de probabilité* $(f(X_0)\circ\ldots\circ f(X_n)\,\lambda_{X_n})_{n\geqq 0}$ (cf. 8 *e*) *converge* $\mathbb{P}_x$-*p.s. vers une mesure de Dirac* ε_Z *où* Z *est une variable aléatoire sur* $\mathbb{R}^d$, *de loi* $f(x)\,\lambda_x$ *sous* $\mathbb{P}_x$.

Pour tout $x\in X$ *et tout point* a *de* $T_{v_2}u$, *la suite* $(\delta(X_n)(M_n a-Z))_{n\geqq 0}$ *converge* $\mathbb{P}_x$-*p.s. vers* 0.

De plus, pour tous $x\in X$ *et* $a\in\mathbb{R}^d$, *le processus* $(f(X^*_{n-1})\circ\ldots\circ f(X^*_0)\,a)_{n\geqq 0}$ *est proximal et récurrent sur les ouverts chargés par la mesure* $\int\lambda_y(\,.\,)\,\pi(dy)$, *c'est-à-dire il existe* $\Omega_x\subset X^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_x(\Omega_x)=1$ *tel que pour tout* $\omega\in\Omega_x$, *tous points* a *et* b *de* $\mathbb{R}^d$ *et tout ouvert* V *tel que* $\int\lambda_y(V)\,\pi(dy)>0$, *on ait :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1_V(f(X^*_{n-1}(\omega))\circ\ldots\circ f(X^*_0(\omega)\,a)=+\infty$$

et

$$\lim_n((f(X^*_{n-1}(\omega))\circ\ldots\circ f(X^*_0(\omega))\,a)-(f(X^*_{n-1}(\omega))\circ\ldots\circ f(X^*_0(\omega))\,b)=0.$$

Lorsque $d\geqq 2$, il est parfois très difficile de prouver que les hypothèses H3 et H4 sont satisfaites. Néanmoins, quand $f(x)$ est de la forme

$f_1(x)\otimes\ldots\otimes f_d(x)$ où chaque $f_k(x)$ est une contradiction sur $\mathbb{R}$, il suffit sous certaines conditions de vérifier ces hypothèses pour chaque couple (Q, f_k). Nous précisons cette remarque dans la proposition suivante.

10. Proposition. — *Supposons que* $\forall x\in X, f(x)=f_1(x)\otimes\ldots\otimes f_d(x)$ *où* $f_k(x)$, $1\leqq k\leqq d$, *est une contraction sur* $\mathbb{R}$. *Lorsque* (Q, f) *vérifie les hypothèses* H1 *et* H2, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le couple* (Q, f) *vérifie* H3 *et* H4.
2. *Chaque couple* (Q, f_k), $1\leqq k\leqq d$, *vérifie* H3 *et* H4.

4. DÉMONSTRATIONS

La démonstration des résultats précédents repose essentiellement sur des techniques développées lors de l'étude des produits de matrices aléatoires ([5], [10]) et se fait via plusieurs lemmes.

11. Lemme. — (1) *Sous* H1 *et* H4, *pour* $\mathbb{P}_\pi$*-presque tout* ω, *la suite de mesures de probabilités* $(M_n(\omega)\lambda_{X_n(\omega)})_{n\geqq 0}$ *converge vers une mesure de probabilité notée* $\Theta(\omega, .)$.

(2) *Sous* H1, H2 *et* H4, *pour* $\mathbb{P}_\pi\otimes\nu$*-presque tout* $(\omega, y, s)\in X^{\mathbb{N}}\times X\times S$ *et toute suite croissante d'entiers* $(\alpha(n,\omega))_{n\geqq 0}$ *telle que* $\liminf_n \delta(X_{\alpha(n,\omega)}(\omega))>0$, *on a :*

$$\lim_n M_n(\omega)\lambda_{X_n(\omega)}=\lim_n M_{\alpha(n,\omega)}(\omega)\circ s\lambda_y$$

Preuve. — Elle repose sur la théorie des martingales et sur une idée utilisée dans [9] et [17].

Notons $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\varphi\in\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$ la fonction $F_\varphi(x,s)=s\lambda_x(\varphi)$, $(x,s)\in X\times S$, vérifie sous H4 l'égalité d'harmonicité

$$F_\varphi(x,s)=\int F_\varphi(y, s\circ f(y)\,Q(x,dy) \qquad \pi(dx)\text{-p. s.}$$

Il s'ensuit que la suite $(F_\varphi(X_n, M_n))_{n\geqq 0}$ forme une martingale bornée sous $\mathbb{P}_\pi$.

D'après la théorie des martingales, ce processus converge donc, $\mathbb{P}_\pi$-p. s. et au sens $\mathbb{L}^p(X^{\mathbb{N}}, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\pi)$, $p\geqq 1$, vers une variable aléatoire $\Theta(.,\varphi)$ qui ferme la martingale :

$$F_\varphi(X_n, M_n)=\mathbb{E}_\pi[\Theta(.,\varphi)/\mathscr{F}_n], \quad \mathbb{P}_\pi-\text{p. s.}$$

L'espace $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$ étant séparable, considérons une suite dense $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^n)$. D'après ce qui précède, il existe donc $\Omega_0\subset X^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0)=1$, tel que pour tous $\omega\in\Omega_0$, $i\in\mathbb{N}$, la suite $(F_{\varphi_i}(X_n(\omega), M_n(\omega)))_{n\geqq 0}$ converge vers $\Theta(.,\varphi_i)$. Il s'ensuit que pour tout $\omega\in\Omega_0$ la suite de mesures de probabilité $(M_n(\omega)\lambda_{X_n(\omega)})_{n\geqq 0}$ converge vers une mesure positive $\Theta(\omega,.)$ vérifiant

$$\forall\varphi\in\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d),\quad M_n\lambda_{X_n}(\varphi)=\mathbb{E}_\pi[\Theta(.,\varphi)/\mathscr{F}_n],\quad \mathbb{P}_\pi-\text{p.s.}$$

En passant aux espérances, on obtient

$$\forall\varphi\in\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d),\quad \mathbb{E}_\pi[M_n\lambda_{X_n}(\varphi)]=\mathbb{E}_\pi\left[\int\varphi(x)\,\Theta(.,dx)\right]$$

En considérant alors une suite d'éléments de $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$) qui croît vers la fonction constante 1, on prouve que pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω, $\Theta(\omega,.)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

D'autre part pour tous entiers N et p on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}_\pi[(F_\varphi(X_{n+p},M_{n+p})-F_\varphi(X_n,M_n))^2]\\
&\qquad=\sum_{n=0}^{N}(\mathbb{E}_\pi[(F_\varphi(X_{n+p},M_{n+p}))^2]+\mathbb{E}_\pi[(F_\varphi(X_n,M_n))^2]\\
&\qquad\quad-2\,\mathbb{E}_\pi[(F_\varphi(X_n,M_n)\,\mathbb{E}_\pi[(F_\varphi(X_{n+p},M_{n+p})/\mathscr{F}_n]])\\
&\qquad=\sum_{n=0}^{N}(\mathbb{E}_\pi[F_\varphi(X_{n+p},M_{n+p})^2]-\mathbb{E}_\pi[F_\varphi(X_n,M_n)^2])\leqq 2p\,\|\varphi\|_\infty^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}_\pi\left[\int(F_\varphi(y,M_n\circ s)-F_\varphi(X_n,M_n))^2\,R^p((X_n,I),(dy,ds))\right]\leqq 2p\,\|\varphi\|_\infty^2$$

si bien que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}_\pi\left[\int(F_\varphi(y,M_n\circ s)-F_\varphi(X_n,M_n))^2\,U_c((X_n,I),(dy,ds))\right]$$
$$\leqq 2\,\|\varphi\|_\infty^2\sum_{p=1}^{\infty}p(1-c)^{p-1}$$

Sous H2 on a alors

$$\mathbb{E}_\pi\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta(X_n)\int(F_\varphi(y,M_n\circ s)-F_\varphi(X_n,M_n))^2\,\nu(dy,ds)\right]<+\infty$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(X_n)\int(F_\varphi(y,M_n\circ s)-F_\varphi(X_n,M_n))^2\,\nu(dy,ds)<+\infty$$
$$\mathbb{P}_\pi-p.s.$$

Par conséquent, pour $\mathbb{P}_\pi \otimes \nu$-presque tout $(\omega, y, s) \in X^{\mathbb{N}} \times X \times S$ et toute suite croissante d'entiers $(\alpha(n, \omega))_{n \geq 0}$ telle que $\liminf_n \delta(X_{\alpha(n, \omega)}(\omega)) > 0$, nous avons

$$\lim_n F_\varphi(y, M_{\alpha(n, \omega)}(\omega) \circ s) = \lim_n F_\varphi(X_n(\omega), M_n(\omega)) = \Theta(\omega, \varphi) \quad \square$$

Remarque. — L'existence pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω d'une suite croissante d'entiers $(\alpha(n, \omega))_{n \geq 0}$ telle que $\liminf_n \delta(X_{\alpha(n, \omega)}(\omega)) > 0$ découle directement du fait que $(X_n)_{n \geq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris et que $\pi(\delta) > 0$.

12. LEMME. — *Sous* H2 *et* H4, *pour* $\mathbb{P}_\pi$-*presque tout* ω *et toute suite croissante d'entiers* $(\alpha(n, \omega))_{n \geq 0}$ *telle que* $\liminf_n \delta(X_{\alpha(n, \omega)}(\omega)) > 0$, *on a* $\limsup_n \| M_{\alpha(n, \omega)}(\omega) 0 \| < +\infty$.

Preuve. — Soit $A = \{ \omega \in X^{\mathbb{N}} : \limsup_n \| M_{\alpha(n, \omega)}(\omega) 0 \| = +\infty \}$ et supposons $\mathbb{P}_\pi(A) > 0$.

D'après le lemme (11) il existe $\omega_0 \in A$ et $(y, s) \in X \times S$ tels que $\lim_n M_{\alpha(n, \omega_0)}(\omega_0) \circ s \lambda_y = \Theta(\omega_0, .)$, $\Theta(\omega_0, .)$ étant une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Considérons une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que $(\| M_{\alpha(n_k, \omega_0)}(\omega_0) 0 \|)_{k \geq 0}$ tende vers $+\infty$. De l'inégalité $\| M_n(\omega) 0 \| \leq \| M_n(\omega) a \| + \| a \|$ satisfaite pour tout entier n et tout $a \in \mathbb{R}^d$, il résulte

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_k \| M_{\alpha(n_k, \omega_0)} a \| = +\infty$$

si bien que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C} K(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_k \lambda_y(\varphi \circ M_{\alpha(n_k, \omega_0)}(\omega_0) \circ s) = 0.$$

Ceci contredit le fait que $\Theta(\omega_0, .)$ soit une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et par conséquent $\mathbb{P}_\pi(A) = 0$. $\square$

CONSÉQUENCE. — Pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω, la famille $(M_{\alpha(n, \omega)}(\omega))_{n \geq 0}$ est un sous-ensemble borné de $(L, \| . \|_L)$, et donc relativement compact dans $(B, \| . \|_B)$.

13. LEMME. — *Sous* H2 *et* H4, *il existe sur* $\mathbb{R}^d$ *une mesure de probabilité* ρ *telle que, pour* π-*presque tout* x $\lambda_x \geq c\, \delta(x)\, \rho$.

Si de plus (Q, f) *vérifie* H3 $[(\xi_n)_{n \geq 0}, u]$, *on peut choisir* ρ *de support* $S_\rho = T_{\nu_2} u$.

Preuve. — La première partie de ce lemme découle de l'égalité

$$\lambda_x = c \int s \lambda_y U_c((x, I), (dy, ds)), \quad \pi(dx)\text{-p. s.},$$

obtenue à partir de H4; il suffit alors d'appliquer H2 et de poser $\rho(da)=\int s\lambda_y(da)\tau * \nu_y(ds)\nu_1(dy)$.

Comme ν_1 est absolument continue par rapport à π, la mesure ρ vérifie l'inégalité $\rho(da)\geqq c\int s\rho(da)\tau * \nu_y(ds)\delta(y)\nu_1(dy)$, si bien que pour toute fonction positive φ de $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\rho(\varphi)=0 \quad \Rightarrow \quad \exists s_1\in S \text{ tel que } ss_1\rho(\varphi)=0, \qquad \forall s\in T_{\nu_2}$$

Sous H3 T_{ν_2} contient une suite contractante de point de contraction u; l'implication précédente devient alors

$$\rho(\varphi)=0 \quad \Rightarrow \quad \forall s\in T_{\nu_2}\,\varphi(su)=0.$$

Le support de ρ contient donc bien $T_{\nu_2}u$. Notons que $T_{\nu_2}u$ est fermé (*cf.* [12]). □

14. *Preuve du théorème* (9) *: unicité de la mesure* T-*invariante sur* $X\times\mathbb{R}^d$.

Le lemme (11) établit l'existence de $\Omega_0\subset X^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0)=1$, $y_0\in X$ et d'une famille $(s_i)_i$ dense dans le support de $\tau * \nu_{y_0}$ tels que, pour tout $\omega\in\Omega_0$ et tout entier i, les suites de mesures de probabilité $M_{\alpha(n,\omega)}(\omega)\circ s_i\lambda_{y_0}$ convergent étroitement vers $\Theta(\omega, .)$.

Soit ω un élément fixé de Ω_0 et $M(\omega)$ une valeur d'adhérence dans $(B, \|\,.\,\|_B)$ de la suite $(M_{\alpha(n,\omega)}(\omega))_{n\geqq 0}$ (*cf.* conséquence du lemme 12). On a donc $\Theta(\omega, .)=M(\omega)\circ s_i\lambda_{y_0}(.)$, $\forall i\in\mathbb{N}$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet le passage à la fermeture en $\|\,.\,\|_B$ si bien que pour tout élément s du support de $\tau * \nu_{y_0}$ on a $M(\omega)\circ s\lambda_{y_0}=\Theta(\omega, .)$. Ceci reste encore vrai lorsqu'on remplace s par $s\circ\xi_k\circ\eta$ où η est un élément du support de ν_{y_0} et $(\xi_k)_{k\geqq 0}$ une suite contractante de T_{ν_2} de point de contraction u, si bien que

$$\forall\varphi\in\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d), \qquad \forall s\in T_{\nu_2},$$
$$\lim_{+\infty} M(\omega)\circ s\circ\xi_k\circ\eta\lambda_{y_0}(\varphi)=\varphi(M(\omega)\circ su)=\Theta(\omega, \varphi).$$

Par conséquent, pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω :

(1) $\Theta(\omega, .)$ est une mesure de Dirac $\varepsilon_{Z(\omega)}$.

(2) Quelle que soit la suite croissante d'entiers $(\alpha(n,\omega))_{n\geqq 0}$ telle que $\liminf_n \delta(X_{\alpha(n,\omega)}(\omega))>0$, toute valeur d'adhérence dans $(B, \|\,.\,\|_B)$ de $(M_{\alpha(n,\omega)}(\omega))_{n\geqq 0}$ envoie $T_{\nu_2}u$ sur $Z(\omega)$. Il en découle immédiatement que pour tout élément a de $T_{\nu_2}u$, la suite $(\delta(X_n)(M_n a-Z))_{n\geqq 0}$ converge $\mathbb{P}_\pi$-p. s. vers 0.

De plus, pour π-presque tout x, la loi de Z sous $\mathbb{P}_x$ est $f(x)\lambda_x$; en effet, pour toute fonction φ de $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$, la suite $(M_n\lambda_{X_n}(\varphi))_{n\geqq 0}$ forme une martingale bornée convergeant $\mathbb{P}_\pi$-p. s. vers la variable $\varphi(Z)$ qui ferme cette martingale, *i. e.*

$$\mathbb{E}_\pi[\varphi(Z)/\mathscr{F}_n] = M_n \lambda_{X_n}(\varphi), \quad \mathbb{P}_\pi\text{-}p.s.$$

Par conséquent, pour toute fonction borélienne bornée Φ sur X on a, d'une part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\pi[\Phi(X_0)\varphi(Z)] &= \mathbb{E}_\pi[\Phi(X_0)\mathbb{E}_\pi[\varphi(Z)/\mathscr{F}_0]] \\ &= \mathbb{E}_\pi[\Phi(X_0) M_0 \lambda_{X_0}(\varphi)] \\ &= \int \Phi(x) f(x) \lambda_x(\varphi)\, \pi(dx)\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\mathbb{E}_\pi[\Phi(X_0)\varphi(Z)] = \iint \varphi(Z(\omega))\, \mathbb{P}_x(d\omega)\, \Phi(x)\, \pi(dx)$$

si bien que, pour π-presque tout x $\int \varphi(Z(\omega))\, \mathbb{P}_x(d\omega) = f(x) \lambda_x(\varphi)$, *i. e.* la loi de Z sous $\mathbb{P}_x$ est $f(x)\lambda_x$.

Enfin, l'existence sur $X \times \mathbb{R}^d$ de deux mesures de probabilité T-invariantes $\lambda = \int \varepsilon_x \otimes \lambda_x\, \pi(dx)$ et $\mu = \int \varepsilon_x \otimes \mu_x\, \pi(dx)$ entraînerait, d'après ce qui précède, celle de variables aléatoires Z_1, Z_2 et Z_3 de lois respectives $f(x)\lambda_x$, $f(x)\mu_x$ et $f(x)\left(\dfrac{\lambda_x + \mu_x}{2}\right)$ sous $\mathbb{P}_x$ pour π-presque tout x, telles que

$$\lim_n M_n \lambda_{X_n} = \varepsilon_{Z_1},$$

$$\lim_n M_n \mu_{X_n} = \varepsilon_{Z_2} \qquad \text{et} \qquad \lim_n M_n \frac{\lambda_{X_n} + \mu_{X_n}}{2} = \varepsilon_{Z_3}.$$

On en déduit immédiatement $Z_1 = Z_2 = Z_3$ $\mathbb{P}_\pi$-p. s. si bien que λ est l'unique mesure de probabilité T-invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$. □

15. Lemme. — *Pour tous $n > 0$ et $a \in \mathbb{R}^d$, posons*

$$\lambda_{n, a, .} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{(X_k^*(.),\, f(X_{k-1}^*(.)) \circ \ldots \circ f(X_0^*(.))\, a))}.$$

Sous H1 *à* H4, *il existe $\Omega_0 \subset X^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout point a de $\mathbb{R}^d$, la suite de mesures de probabilité $(\lambda_{n, a, \omega})_{n \geq 1}$ converge vers λ.*

Preuve. — Comme λ est l'unique mesure de probabilité T-invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$, l'ergodicité sous H1 de la mesure π permet d'établir celle du système dynamique $\left(X^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(X^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^d), \int \lambda_{X_0^*(\omega)}(da)\,\mathbb{P}_\pi(d\omega), \theta'\right)$ où θ' est défini par $\theta'(\omega, a)=(\theta\,\omega, f(X_0^*(\omega))\,a)$, $\forall(\omega, a)\in X^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^d$.

Pour toute fonction borélienne bornée Φ sur $X\times\mathbb{R}^d$, on a, d'après le théorème de Birkhoff

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(X_k^*(\omega), f(X_{k-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(X_0^*(\omega))\,a)=\lambda(\Phi)$$

$$\int \lambda_{X_0^*(\omega)}(da)\;\mathbb{P}_\pi(d\omega)\text{-}p.s.$$

Par conséquent, si $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne un recouvrement croissant et compact de X et B_i la boule centrée de $\mathbb{R}^d$ de rayon i, il existe $\Omega_0\subset X^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0)=1$ tel que $\forall\,\omega\in\Omega_0$, $\forall\,i\in\mathbb{N}$

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X_k^*(\omega))\,1_{B_i}(f(X_{k-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(X_0^*(\omega))\,a)=\lambda(K_i\times B_i),$$

$$\lambda_{X_0^*(\omega)}(da)\text{-}p.s.$$

Fixons $\omega\in\Omega_0$ et a_ω élément du support de $\lambda_{X_0^*(\omega)}$ tels que cette égalité soit vérifiée. Soit $\lambda_{a,\omega}$ une valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence vague de la suite de mesures $(\lambda_{n,a,\omega})_{n\geqq 0}$. Les applications $f(X_{k-1}^*)\circ\ldots\circ f(X_0^*)$ étant des contractions sur $\mathbb{R}^d$, nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X_k^*(\omega))\,1_{B_{i+\|a-a_\omega\|}}(f(X_{k-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(X_0^*(\omega))\,a)$$

$$\geqq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X_k^*(\omega))\,1_{B_i}(f(X_{k-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(X_0^*(\omega))\,a_\omega)$$

En faisant alors tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\lambda_{a,\omega}(K_i\times B_{i+\|a-a_\omega\|})\geqq\lambda(K_i\times B_i),\qquad\forall\,i\in\mathbb{N}$$

ce qui permet d'affirmer que $\lambda_{a,\omega}$ est une mesure de probabilité sur $X\times\mathbb{R}^d$ (en particulier, $\lambda_{a,\omega}$ n'est pas dégénérée !).

Pour identifier la mesure $\lambda_{a,\omega}$, il suffit de remarquer que pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{C}K(X\times\mathbb{R}^d)$ et tout point a de $\mathbb{R}^d$, la suite

$$(\varphi(X_k^*, f(X_{k-1}^*)\circ\ldots\circ f(X_0^*)\,a)-(T\varphi)(X_{k-1}^*, f(X_{k-2}^*)\circ\ldots\circ f(X_0^*)\,a))_{k\geqq 1}$$

forme un accroissement de martingale borné par $2\|\varphi\|_\infty$; cette suite converge donc $\mathbb{P}_\pi$-presque sûrement en moyenne de Césaro vers 0. Par conséquent, pour tout point a de $\mathbb{R}^d$ et toute fonction φ de $\mathscr{C}K(X\times\mathbb{R}^d)$, il existe $\Omega_{a,\varphi}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_{a,\varphi})=1$, tels que l'on ait

$$\forall\,\omega\in\Omega_{a,\varphi},\quad \lambda_{a,\omega}(\varphi)=\lambda_{a,\omega}(T\varphi).$$

La séparabilité de $\mathbb{R}^d$ et l'uniforme continuité de φ permettent alors d'établir l'existence de $\Omega_\varphi \subset X^{\mathbb{N}}$, tel que

$$\forall \omega \in \Omega_\varphi, \quad \forall a \in \mathbb{R}^d, \qquad \lambda_{a, \omega}(\varphi) = \lambda_{a, \omega}(T\varphi).$$

Le lemme résulte finalement de la séparabilité de $\mathscr{C}K(X \times \mathbb{R}^d)$ et du fait que λ est l'unique mesure de probabilité T-invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$. □

16. LEMME. – *Pour tous* $n>0$ *et* $a, b \in \mathbb{R}^d$, *posons*

$$\lambda'_{n, a, b, \cdot} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{(X_k^*(\cdot),\, f(X_{k-1}^*(\cdot)) \circ \ldots \circ f(X_0^*(\cdot))\, a,\, f(X_{k-1}^*(\cdot)) \circ \ldots \circ f(X_0^*(\cdot))\, b)}.$$

Sous H1 *à* H4, *il existe* $\Omega_1 \subset X^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_1) = 1$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_1$ *et tous points* a *et* b *de* $\mathbb{R}^d$, *la suite de mesures de probabilités* $(\lambda'_{n, a, b, \omega})_{n \geqq 0}$ *converge vers* $\lambda' = \int \varepsilon_{(x, a, a)} \lambda(dx, da)$.

Preuve. – Soit f' la fonction de X dans $S(\mathbb{R}^{2d})$ définie par

$$\forall (x, a, b) \in X \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad f'(x)(a, b) = (f(x)\, a, f(x)\, b)$$

et T′ le noyau défini par :

$$T' \Phi(x, a, b) = \int \Phi(y, f(x)\, a, f(x)\, b)\, Q^*(x, dy)$$

pour toute fonction borélienne bornée Φ sur $X \times \mathbb{R}^{2d}$.

Pour tout élément s de $S(\mathbb{R}^d)$, notons $s \otimes s$ la contraction de $\mathbb{R}^{2d}$ définie par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (s \otimes s)(a, b) = (sa, sb)$$

On montre de façon élémentaire que lorsque (Q, f) vérifie H 1, H 2 $[\nu, \delta]$, H3 $[(\xi_n)_{n \geqq 0}, u]$ et H4 $[\lambda]$, (Q, f') vérifie H1, H2 $[\nu', \delta]$, H3 $[(\xi_n \otimes \xi_n)_{n \geqq 0}, (u, u)]$ et H4 $[\lambda']$,

avec $\nu'(\cdot) = \int \varepsilon_{(x, s \otimes s)}(\cdot)\, \nu(dx, ds)$ et $\lambda'(\cdot) = \int \varepsilon_{(x, a, a)}(\cdot)\, \lambda(dx, da)$.

En reprenant la démonstration (14) avec le couple (Q, f'), on montre que la mesure λ' est l'unique mesure T′-invariante sur $X \times \mathbb{R}^{2d}$. Le lemme (16) découle alors de façon immédiate du lemme (15).

17. *Fin de la démonstration du théorème* (9).

D'après le lemme (15), il existe $\Omega_0 \subset X^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0) = 1$ tel que pour tous $\omega \in \Omega_0$ et $a \in \mathbb{R}^d$ on ait

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}K(X \times \mathbb{R}^d)$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \varphi(X_k^*, f(X_{k-1}^*(\omega)) \circ \ldots \circ f(X_0^*(\omega))\, a) = \lambda(\varphi).$$

Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $\int \lambda_x(\mathrm{V})\,\pi(dx)>0$, il existe une suite croissante $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathscr{C}\mathrm{K}(\mathrm{X}\times\mathbb{R}^d)$ convergeant vers $1_\mathrm{X}\otimes 1_\mathrm{V}$; par conséquent $\forall\,\omega\in\Omega_0$, $\forall\,a\in\mathbb{R}^d$, $\forall\,i\geqq 0$

$$\lambda(\varphi_i)\leqq\liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_\mathrm{V}(f(\mathrm{X}_{k-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))\,a).$$

Puisque $(\lambda(\varphi_i))_{i\geqq 0}$ converge vers $\int \lambda_x(\mathrm{V})\,\pi(dx)>0$, nous avons bien

$$\forall\,\omega\in\Omega_0,\quad \forall\,a\in\mathbb{R}^d,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1_\mathrm{V}(f(\mathrm{X}_{k-1}^*(\omega)\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))\,a)=+\infty.$$

Appliquons maintenant le lemme (16) à la fonction positive d définie sur $\mathrm{X}\times\mathbb{R}^{2d}$ par $\forall\,(x, u, v)\in\mathrm{X}\times\mathbb{R}^{2d}$, $d(x, u, u)=\inf(\|u-v\|, 1)$; il existe donc $\Omega_1\subset\mathrm{X}^\mathbb{N}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_1)=1$ tel que pour tout $\omega\in\Omega_1$ et tous points a et b de $\mathbb{R}^d$ la suite

$$(\inf(1, \| f(\mathrm{X}_{n-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))\,a - f(\mathrm{X}_{n-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))\,b\|))_{n\geqq 0}$$

converge en moyenne de Césaro vers 0. Cette suite étant décroissante, nous avons en fait

$$\forall\,\omega\in\Omega_0,\quad \forall\,a, b\in\mathbb{R}^d,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(\mathrm{X}_{n-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))\,a-f(\mathrm{X}_{n-1}^*(\omega))\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*(\omega))\,b=0.$$

18. *Passage de $\mathbb{P}_\pi$ à $\mathbb{P}_x$, $\forall\,x\in\mathrm{X}$.*

D'après ce qui précéde, il existe $\mathrm{X}'\subset\mathrm{X}$, $\pi(\mathrm{X}')=1$, tel que pour tout $x\in\mathrm{X}'$, on ait

$$\forall\,a\in\mathrm{T}_{v_2}u,\quad \forall\,\varepsilon>0$$
$$\mathbb{P}_x[\liminf_n[\delta(\mathrm{X}_n)\,\|\mathrm{M}_n a-\mathrm{Z}\|<\varepsilon]]=1$$
$$\forall\,\varepsilon>0,$$
$$\mathbb{P}_x[\bigcap_{a, b\in\mathbb{R}^d}\liminf_n[\| f(\mathrm{X}_n^*)\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*)\,a-f(\mathrm{X}_n^*)\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*)\,b\|<\varepsilon]]=1$$

et

$$\mathbb{P}_x\left[\inf_{a\in\mathbb{R}^d}\left(\sum_0^\infty 1_\mathrm{V}(f(\mathrm{X}_{n-1}^*\circ\ldots\circ f(\mathrm{X}_0^*)\,a)\right)=+\infty\right]=1$$

pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^d$ tel que $\int \lambda_x(\mathrm{V})\,\pi(dx)>0$.

Introduisons le temps d'arrêt T relativement à la filtration $(\sigma(X_0, \ldots, X_n))_{n \geqq 0}$

$$T = \inf\{n \geqq 0 : X_n \in X'\}$$

La chaîne $(X_n)_{n \geqq 0}$ étant récurrente positive au sens de Harris, de mesure de probabilité invariante π, on a

$$\forall x \in X, \quad \mathbb{P}_x[T < +\infty] = 1.$$

En utilisant la propriété de Markov, on établit les inégalités suivantes

$$\forall a \in T_{v_2} u, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in X$$

$$\mathbb{P}_x[\liminf_n [\delta(X_n) \| M_n a - f(X_0) \circ \ldots \circ f(X_{T-1}) Z \circ \theta^T \| < \varepsilon]]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x[1_{[T=k]} \liminf_n 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(\delta(X_n)(M_n a - M_k Z \circ \theta^k))]$$

$$\geqq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x[1_{[T=k]}$$

$$\liminf_n 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(\delta(X_n)(f(X_{k+1}) \circ \ldots \circ f(X_n) a - Z \circ \theta^k))]$$

$$\geqq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x[1_{[T=k]} \mathbb{E}$$

$$[\liminf_n 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(\delta(X_n)(f(X_{k+1}) \circ \ldots \circ f(X_n) a - Z \circ \theta^k))/\mathscr{F}_k]]$$

$$\geqq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x[1_{[T=k]} \mathbb{E}_{X_k}[\liminf_n 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(\delta(X_{n-k})(M_{n-k} a - Z))]]$$

$$\geqq \mathbb{P}_x[\mathbb{P}_{X_T}[\liminf_n [\delta(X_n) \| M_n a - Z \| < \varepsilon]]]$$

Comme $\mathbb{P}_{X_T}[\liminf_n [\delta(X_n) \| M_n a - Z \| \leqq \varepsilon]] = 1$, $\mathbb{P}_x$-p. s., on a finalement

$$\forall x \in X, \quad \lim_n \delta(X_n)(M_n a - Z) = 0. \quad \mathbb{P}_x - p.s.$$

D'autre part, en introduisant le temps d'arrêt T* relativement à la filtration canonique $(\sigma(X_0^*, \ldots, X_n^*))_{n \geqq 0}$,

$$T^* = \inf\{n \geqq 0 : X_n^* \in X'\}$$

on a $\forall x \in X$, $\mathbb{P}_x[T^* < +\infty] = 1$, et comme précédemment on établit les inégalités suivantes :

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\mathbb{P}_x[\bigcap_{a, b \in \mathbb{R}^d} \liminf_n [\| f(X_n^*) \circ \ldots \circ f(X_0^*) a - f(X_n^*) \circ \ldots \circ f(X_0^*) b \| < \varepsilon]]$$

$$\geqq \mathbb{P}_x[\mathbb{P}_{X_{T^*}^*}[\bigcap_{a, b \in \mathbb{R}^d} \liminf_n [\| f(X_n^*) \circ \ldots \circ f(X_0^*) a$$

$$- f(X_n^*) \circ \ldots \circ f(X_0^*) b \| < \varepsilon]]$$

et

$$\forall x \in \mathrm{X},$$
$$\mathbb{P}_x\left[\inf_{a \in \mathbb{R}^d}\left(\sum_0^{\infty} 1_{\mathrm{V}}(f(\mathrm{X}_{n-1}^*\circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_0^*)\, a\right) = +\infty\right]$$
$$\geqq \mathbb{P}_x\left[\mathbb{P}_{\mathrm{X}_{\mathrm{T}^*}^*}\left[\inf_{a \in \mathbb{R}^d}\left(\sum_0^{\infty} 1_{\mathrm{V}} f(\mathrm{X}_{n-1}^*\circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_0^*)\, a\right) = +\infty\right]\right].$$

Finalement, comme $\forall x \in \mathrm{X}$, $\mathbb{P}_x[\mathrm{X}_{\mathrm{T}^*}^* \in \mathrm{X}'] = 1$, les résultats établis jusqu'à présent pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω sont vérifiés $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, quel que soit $x \in \mathrm{X}$.

Notons alors que *pour tout* $x \in \mathrm{X}$ la loi $f(x)\lambda_x$ sous $\mathbb{P}_x$ de la variable $f(\mathrm{X}_0)\circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_{\mathrm{T}-1})\,\mathrm{Z}\circ\theta^{\mathrm{T}}$ vérifie l'équation d'invariance

$$\lambda_x = \int f(y)\,\lambda_y\,\mathrm{Q}(x, dy). \quad \square$$

19. *Remarque.* — *Sous* H1 *à* H4, *pour tous points* a *et* b *de* $\mathbb{R}^d$ *les suites* $(\mathrm{M}_n a - \mathrm{M}_n b)_{n \geqq 0}$ *et* $(\delta(\mathrm{X}_n)(\mathrm{M}_n a - \mathrm{Z}))_{n \geqq 0}$ *convergent en probabilité* $\mathbb{P}_\pi$ *vers* 0.

En effet, les variables $f(\mathrm{X}_0)\circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_n)$ et $f(\mathrm{X}_n^*)\circ \ldots \circ f(\mathrm{X}_0^*)$, $n \geqq 0$, sont de même loi sous $\mathbb{P}_\pi$; par conséquent, d'après ce qui précède, la suite $(\mathrm{M}_n a - \mathrm{M}_n b)_{n \geqq 0}$ converge en loi vers 0 et donc en probabilité $\mathbb{P}_\pi$. Il en est de même pour la suite $(\delta(\mathrm{X}_n)(\mathrm{M}_n a - \mathrm{Z}))_{n \geqq 0}$, car lorsque $b \in \mathrm{T}_{\mathrm{v}_2} u$, $(\delta(\mathrm{X}_n)(\mathrm{M}_n b - \mathrm{Z}))_{n \geqq 0}$ converge $\mathbb{P}_\pi$-p.s. vers 0. Il semble en fait que les suites $(\mathrm{M}_n a - \mathrm{M}_n b)_{n \geqq 0}$ et $(\delta(\mathrm{X}_n)(\mathrm{M}_n a - \mathrm{Z}))_{n \geqq 0}$ convergent $\mathbb{P}_\pi$-*presque sûrement* vers 0, mais ceci n'est qu'une conjecture.

20. *Preuve de la proposition* (10). — On suppose que $\forall x \in \mathrm{X}$, $f(x) = f_1(x) \otimes \ldots \otimes f_d(x)$ où chaque f_k, $1 \leqq k \leqq d$, est une contraction sur $\mathbb{R}$. On vérifie de façon élémentaire que l'ensemble $\mathrm{S}^{\otimes d} = \{s = s_1 \otimes \ldots \otimes s_d,\ s_i \in \mathrm{S}(\mathbb{R}),\ 1 \leqq i \leqq d\}$ est un fermé de $\mathrm{S}(\mathbb{R}^d)$.

Le noyau $\mathrm{U}_c((x, \mathrm{I}), .)$, $x \in \mathrm{X}$, étant porté par $\mathrm{S}^{\otimes d}$, il en est de même pour la mesure ν lorsque (Q, f) vérifie H2 $[\nu, \delta]$.

Pour toute fonction borélienne bornée Φ de $\mathrm{X} \times \mathrm{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, notons Φ_k la fonction borélienne définie sur $\mathrm{X} \times \mathrm{S}^{\otimes d}$ par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \forall (s_i)_{1 \leqq i \leqq d} \in \mathrm{S}^{\otimes d}, \qquad \Phi_k(x, s_1 \otimes \ldots \otimes s_d) = \Phi(x, s_k)$$

L'inégalité $(*)$ de H2 appliquée à la fonction Φ_k nous donne alors

$$\forall x \in \mathrm{X},$$
$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{n \geqq 1} (1-c)^{n-1}\,\Phi(\mathrm{X}_n, f_k(\mathrm{X}_1)\circ \ldots \circ f_k(\mathrm{X}_n))\Big] \geqq \delta(x)\,\nu_k(\Phi)$$

avec $\nu_k(\Phi) = \int_{\mathrm{X} \times \mathrm{S}^{\otimes d}} \Phi(y, s_k)\,\nu(dy, ds)$, ce qui prouve que (Q, f_k) vérifie H2 $[\nu_k, \delta]$, $1 \leqq k \leqq d$.

Notons que si (Q, f) vérifie H3 $[(\xi_k)_{k \geq 0}, u]$, $u=(u_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$, les contractions ξ_k sont nécessairement de la forme $\xi_k=\xi_{k,1} \otimes \ldots \otimes \xi_{k,d}$ avec $\xi_{k,i} \in S(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq d$, chaque suite $(\xi_{k,i})_{k \geq 0}$ étant contractante, de point de contraction u_i.

De même, lorsque (Q, f) vérifie H4$[\lambda]$ avec $\lambda=\int \varepsilon_x \otimes \lambda_x \pi(dx)$, chaque couple (Q, f_k) vérifie H4 $[\lambda^{(k)}]$ où $\lambda^{(k)}$ est définie par $\lambda^{(k)}=\int \varepsilon_x \otimes \lambda_x^{(k)} \pi(dx)$, $\lambda_x^{(k)}$ désignant la k-ième marginale de λ_x.

L'intérêt majeur de la proposition réside dans la réciproque $(2) \Rightarrow (1)$; la démonstration se fait en deux étapes.

Première étape. — *Lorsque* (Q, f) *vérifie* H1, H2 *et que chaque couple* (Q, f_k) *vérifie* H3 *et* H4, *nécessairement* (Q, f) *vérifie* H4.

En effet, sous ces hypothèses, chaque couple (Q, f_k) vérifie H1 à H4 $[(\lambda_x^{(k)})_{x \in X}]$; par conséquent, d'après le théorème (9), les suites de mesures de probabilités $(f_k(X_1) \circ \ldots \circ f_k(X_n) \lambda_n^{(k)})_{n \geq 0}$ convergent $\mathbb{P}_\pi$-p. s. vers une masse de Dirac ε_{Z_k} $1 \leq k \leq d$. On conclut en remarquant que la loi sous $\mathbb{P}_\pi$ du couple (X_0, Z) avec $Z=(Z_1, \ldots, Z_d)$ est T-invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$.

Deuxième étape. — *Lorsque* (Q, f) *vérifie* H1, H2 *et* H4 *et que chaque couple* (Q, f_k) *vérifie* H3, *alors* (Q, f) *vérifie* H3.

Notons que sous ces hypothèses, pour chaque entier $k \in \{1, \ldots, d\}$, T_{v_2} possède une suite $(\xi_n^{(k)})_{n \geq 0}$, $\xi_n^{(k)}=\xi_{n,1}^{(k)} \otimes \ldots \otimes \xi_{n,d}^{(k)}$ telle que $(\xi_{n,k}^{(k)})_{n \geq 0}$ est contractante sur $\mathbb{R}$, étant bien entendu que les suites $(\xi_{n,l}^{(k)})_{n \geq 0}$, $l \neq k$, ne sont pas *a priori* contractantes. Le but de cette étape est donc d'exhiber une suite $(\xi_n)_{n \geq 0}$ dont les d composantes sont simultanément contractantes sur $\mathbb{R}$.

Pour ce faire, montrons tout d'abord que la suite de mesures de probabilité $(M_n \lambda_{X_n})_{n \geq 0}$ converge $\mathbb{P}_\pi$-p. s. vers une masse de Dirac ε_Z.

En effet, sous ces hypothèses, chaque couple (Q, f_k) vérifie H1 à H4 $[(\lambda_x^{(k)})_{x \in X}]$; par conséquent, les suites de mesures de probabilité $(f_k(X_0) \circ \ldots \circ f_k(X_n) \lambda_{X_n}^{(k)})_{n \geq 0}$ convergent $\mathbb{P}_\pi$-p. s. vers une masse de Dirac. D'autre part, comme (Q, f) vérifie H1, H2 et H4, la suite $(M_n(\omega) \lambda_{X_n(\omega)})_{n \geq 0}$ converge pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω vers une mesure de probabilité $\Theta(\omega, .)$. Pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω, les marginales de $\Theta(\omega, .)$ sont donc des masses de Dirac d'où l'existence sur $\mathbb{R}^d$ d'une v. a. Z telle que

$$\Theta(\omega, .)=\varepsilon_{Z(\omega)}(.), \quad \mathbb{P}_\pi(d\omega)-p.s.$$

En reprenant alors les démonstrations (14) et (17), on montre que pour tout point a de $\mathbb{R}^d$ la suite $(\delta(X_n)(M_n a-Z))_{n \geq 0}$ converge en probabilité $\mathbb{P}_\pi$ vers 0 [*cf.* remarque (19)]; il existe donc une suite d'entiers $(\alpha_a(n))_{n \geq 0}$ telle que $(\delta(X_{\alpha_a(n)})(M_{\alpha_a(n)} a-Z))_{n \geq 0}$ converge $\mathbb{P}_\pi$-p. s. vers 0. Considérons maintenant une famille dense $(a_i)_{i \geqq 1}$ de points de $\mathbb{R}^d$; il existe $\Omega_1 \subset X^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_1)=1$ et une suite $(\alpha_1(n))_{n \geqq 0}$ d'entiers tels que

$$\forall \omega \in \Omega_1, \quad \lim_n \delta(X_{\alpha_1(n)}(\omega))(M_{\alpha_1(n)}(\omega)a_1 - Z(\omega)) = 0.$$

Par récurrence, on construit $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_{k+1})=1$ et $(\alpha_{k+1}(n))_{n \geqq 0}$ une sous-suite de $(\alpha_k(n))_{n \geqq 0}$ tels que :

$$\forall \omega \in \Omega_{k+1}, \quad \lim_n \delta(X_{\alpha_{k+1}(n)}(\omega))(M_{\alpha_{k+1}(n)}(\omega)a_{k+1} - Z(\omega)) = 0.$$

La suite $(a_i)_{i \geqq 1}$ étant dense dans $\mathbb{R}^d$, on obtient, en posant $\Omega' = \bigcap_{k \geqq 1} \Omega_k$ et $\alpha(n) = \alpha_n(n)$

$$\forall \omega \in \Omega', \quad \forall a \in \mathbb{R}^d, \qquad \lim_n \delta(X_{\alpha(n)}(\omega))(M_{\alpha(n)}(\omega)a - Z(\omega)) = 0$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'égalité $\mathbb{E}_\pi[\delta(X_n)] = \pi(\delta) > 0$ $\forall n \geqq 0$, entraîne l'existence de $\omega_1 \in \Omega'$ telle que

$$\limsup_n \delta(X_{\alpha(n)}(\omega_1)) > 0. \quad \square$$

5. EXEMPLE : CAS DE LA MARCHE ALÉATOIRE SUR $(\mathbb{R}^+)^d$ AVEC RÉFLEXIONS SUR LES AXES

On munit $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 1$, de la norme euclidienne $\|.\|$

$$\left[i.e. \, \forall a = (a_i)_{1 \leqq i \leqq d} \in \mathbb{R}^d, \; \|a\| = \left(\sum_{i=1}^{d} a_i^2 \right)^{1/2} \right];$$

pour tout élément $a = (a_i)_{1 \leqq i \leqq d}$ de $\mathbb{R}^d$, on pose $|a| = (|a_i|)_{1 \leqq i \leqq d}$, où $|a_i|$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$: $|a_i| = (a_i^2)^{1/2}$.

Soit P un noyau markovien sur $\mathbb{R}^d$ et $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, (X_n)_{n \geqq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ la chaîne canonique associée à P.

On introduit le noyau T défini par

$$\forall (x, a) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^+)^d, \quad T\Phi(x, a) = \int \Phi(y, |a-x|) P(x, dy)$$

pour toute fonction borélienne bornée Φ sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^+)^d$, et l'on note $((\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^+)^d)^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^+)^d)^{\mathbb{N}}, (X_n, Y_n)_{n \geqq 0}, (\mathbb{P}_{(x, a) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^+)^d}))$ la chaîne canonique associée à T.

Pour tout $n \geqq 0$, on a

$$Y_n = \| Y_0 - X_0 | - \ldots - X_{n-1} | = f(X_{n-1}) \circ \ldots \circ f(X_0) Y_0$$

où $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, désigne la contraction de $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$ définie par $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $f(x)a = |a-x|$. L'étude du processus $(Y_n)_{n \geqq 0}$ se ramène donc à celle du produit de contractions $f(X_{n-1}) \circ \ldots \circ f(X_0)$ et nous allons appliquer les résultats du paragraphe 3. Ce processus a été étudié par différents auteurs lorsque $(X_n)_{n \geqq 0}$ forme une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ sur $\mathbb{R}$, notamment par J.-P. Leguesdron dans le cas où μ est adaptée (*i.e.* non portée par un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$) et décentrée $\left[i.e. \int x\, \mu(dx) \in \mathbb{R}^{*+} \right]$. Dans un premier temps nous rappelons brièvement ses résultats puis nous examinons le cas où μ est centrée. Enfin, nous étendons cette étude au cas multidimensionnel (μ portée par $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 2$) et surtout au cas markovien ($(X_n)_{n \geqq 0}$ chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 1$).

A. Étude de la marche aléatoire sur $(\mathbb{R}^+)^d$ à pas indépendants de loi μ et avec réflexions sur les axes

21. DÉFINITION. — *On dit qu'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ est adaptée si le groupe fermé engendré par le support S_μ de μ est égal à $\mathbb{R}^d$.*

Nous avons le théorème suivant, dû à J.-P. Leguesdron [12] :

22. THÉORÈME. — *Soient μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $(X_n)_{n \geqq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi μ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que μ est adaptée* [*définition* (21)] *et qu'elle admet un moment d'ordre* 1 *avec* $\int x\, \mu(dx) \in \mathbb{R}^{*+}$. *On note Δ la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de S_μ.*

Alors, il existe sur $\mathbb{R}^+$ une unique mesure de probabilité T-*invariante ν et une variable aléatoire Z de loi ν telle que, pour tout point a de $\mathbb{R}^+$, la suite* $(\| a - X_n | - \ldots - X_0 |)_{n \geqq 0}$ *converge* $\mathbb{P}$-*p.s. vers* Z.

De plus, pour tout point a de $\mathbb{R}^+$, la chaîne $(\| a - X_0 | - \ldots - X_n |)_{n \geqq 0}$ *est proximale et récurrente sur les ouverts de* $[0, \Delta[$, *et l'espérance du premier instant de réflexion en zéro,* $R = \inf\{ n \geqq 0 : Y_0 - (X_0 + \ldots + X_n) < 0 \}$ *est finie.*

Notons que lorsque μ est portée par $\mathbb{R}^+$, avec $0 < \int x\, d\mu(x) < +\infty$, W. Feller [6] et F. B. Knight [11] ont vérifié que la mesure ν de densité $\left(\int x\, d\mu(x) \right)^{-1} \mu[y, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ est T-invariante. Le théorème (22) étend donc ce résultat au cas d'une loi μ portée par $\mathbb{R}$. La difficulté essentielle rencontrée par J.-P. Leguesdron réside plutôt dans la preuve de l'existence d'une suite contractante de point de contraction 0; la démonstration, très technique, fait appel à la décomposition des réels en fractions continues.

Lorsque μ est centrée $\left[i.e. \int x\, d\mu(x)=0\right]$, nous ne pouvons plus utiliser les arguments développés par J.-P. Leguesdron; néanmoins, nous avons le résultat suivant :

23. THÉORÈME. — *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}$ *et* $(X_n)_{n \geqq 0}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi* μ *définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On suppose que μ *est adaptée* [*définition* (21)] *et qu'elle admet un moment d'ordre* 2, *avec* $\int x\, \mu(dx)=0$. *On note* Δ *la borne supérieure dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *de* S_μ.

Alors, la suite $(\| a-X_n | - \ldots - X_0 |)_{n \geqq 0}$ *est* $\mathbb{P}$-*p.s. non bornée pour tout point* a *de* $\mathbb{R}^+$ *et il n'existe donc pas sur* $\mathbb{R}^+$ *de mesure de probabilité* T-*invariante.*

Par contre, pour tout point a *de* $\mathbb{R}^+$, *la chaîne* $(\| a-X_0 | - \ldots - X_n |)_{n \geqq 0}$ *est proximale et récurrente sur les ouverts de* $[0, \Delta[$, *et l'espérance du premier instant de réflexion en zéro,* $R=\inf\{n \geqq 0 : Y_0-(X_0+\ldots+X_n)<0\}$, *est infinie.*

Preuve. — Pour tout point a de $\mathbb{R}^+$, on a

$$\| a-X_n | - \ldots - X_0 | \geqq a-(X_0+\ldots+X_n)$$

si bien que, la marche aléatoire centrée $(X_0+\ldots+X_n)_{n \geqq 0}$ étant récurrente sur $\mathbb{R}$, on a

$$\limsup_n \| a-X_n | - \ldots - X_0 | = +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

S'il existe sur $\mathbb{R}^+$ une mesure de probabilité ν T-invariante, le couple (μ, f) vérifie alors les hypothèses H2 et H4 [en prenant notamment $\delta(x)=1$, $\forall x \in \mathbb{R}$] et l'on a d'après le lemme (12)

$$\limsup_n \| 0-X_n | - \ldots - X_0 | < +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

ce qui contredit l'égalité précédente.

Introduisons maintenant le temps d'arrêt

$$r=\inf\{n \geqq 0 : X_0+\ldots+X_n>0\}$$

et définissons par récurrence la suite $(r^{(n)})_{n \geqq 0}$ en posant $r^{(n+1)}=r^{(n)}+r \circ \theta^{r^{(n)}}$ avec $r^{(0)}=0$. Les variables $X_{r_{(n)}+1}+\ldots+X_{r^{(n+1)}}$, $n \geqq 0$, sont indépendantes de même loi μ_r et vérifient les hypothèses du théorème (22) ([6], chap. XVIII). Par conséquent, pour tout point a de $\mathbb{R}^+$ la chaîne

$$(\| a-(X_0+\ldots+X_r) | - \ldots - (X_{r_{(n)}+1}+\ldots+X_{r^{(n+1)}}) |)_{n \geqq 0}$$

est proximale et récurrente sur les ouverts de $[0, \Delta[$. Il suffit alors de remarquer que l'on a

$$\forall a \in \mathbb{R}^+,$$
$$\|a-(X_0+\ldots+X_r)|-\ldots-(X_{r_{(n)}+1}+\ldots+X_{r^{(n+1)}})| = \|a-X_0|-\ldots-X_{r^{(n+1)}}|$$

et que pour tous points a et b de $\mathbb{R}^+$ la suite

$$((\|a-X_0|-\ldots-X_n|)-(\|b-X_0|-\ldots-X_n|))_{n\geqq 0}$$

est décroissante.

Enfin, μ étant centrée, l'espérance du temps d'arrêt r est infinie; il en est de même pour R, vu l'inégalité $R \geqq r$, $\mathbb{P}$-p. s., $\forall a \in \mathbb{R}^+$. □

Considérons maintenant le cas où la loi μ est portée par $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqq 2$.

24. Théorème. — *Soient μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 2$, et $(X_n)_{n\geqq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.*

On suppose que μ admet un moment d'ordre 1, $\int x\,\mu(dx) \in (\mathbb{R}^{*+})^d$ et que les différentes marginales μ_k, $1 \leqq k \leqq d$, de μ sont adaptées.

Alors, il existe sur $(\mathbb{R}^+)^d$ une unique mesure de probabilité T-invariante ν et une variable aléatoire Z de loi ν, telle que pour tout point a de $(\mathbb{R}^+)^d$ la suite $(\|a-X_n|-\ldots-X_0|)_{n\geqq 0}$ converge $\mathbb{P}$-p. s. vers Z.

De plus, pour tout point a de $(\mathbb{R}^+)^d$, la chaîne $(\|a-X_0|\ldots-|X_n|)_{n\geqq 0}$ est proximale et récurrente sur les ouverts V de $(\mathbb{R}^+)^d$ chargés par ν.

Preuve. — Pour tout point $x=(x_i)_{1\leqq i\leqq d}$ de $\mathbb{R}^d$, la contraction $f(x)$ définie par $f(x)a=|a-x|$, $\forall a \in (\mathbb{R}^+)^d$ s'écrit $f(x)=f_1(x)\otimes\ldots\otimes f_d(x)$, avec $f_k(x)a_k=|x_k-a_k|$. Sous les hypothèses du théorème (24), (μ, f) vérifie l'hypothèse H2 et chaque couple (μ_k, f_k), $1 \leqq k \leqq d$, vérifie les hypothèses H3 et H4 (*cf.* théorème 22). Par conséquent, d'après la proposition (10) (μ, f) vérifie les conditions H2, H3 et H4. Le théorème (24) découle alors directement des théorèmes (9) et (22). □

Notons que, même lorsque μ est portée par $(\mathbb{R}^+)^d$, $d \geqq 2$, on ne peut exhiber à la façon de W. Feller et F. B. Knight sur $\mathbb{R}^+$ une mesure de probabilité T-invariante. Le théorème (24) prouve donc, non seulement l'unicité mais aussi l'existence sur $(\mathbb{R}^+)^d$ d'une telle mesure. On peut aussi prouver l'existence de la mesure ν en étudiant le comportement de la chaîne $(\|a-X_0|-\ldots-X_n|)_{n\geqq 0}$ aux différents instants de réflexions sur les parois; cette technique sera développée ultérieurement dans le cas unidimensionnel et markovien [*cf.* lemme (30)].

Par ailleurs, nous avons le résultat purement algébrique suivant :

25. COROLLAIRE. — *Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs tel que* $\frac{a}{c} \notin \mathbb{Q}$, $\frac{b}{d} \notin \mathbb{Q}$ *et* $ad-bc>0$. *Alors, il existe* $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$ *et une suite* $((x_n, y_n))_{n \geqq 0}$ *de* $\{(a, -b), (-c, d)\}$ *tels que*

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,$$
$$\lim_n \| |x-x_n| - \ldots - x_0| = \alpha \quad et \quad \lim_n \| |y-y_n| - \ldots - y_0| = \beta.$$

Preuve. — La condition $ad-bc>0$ entraîne l'existence d'un réel p tel que $\frac{b}{d}<p<\frac{a}{c}$ si bien que l'espérance de la mesure

$$\mu = \frac{1}{p+1} \varepsilon_{(a, -b)} + \frac{p}{p+1} \varepsilon_{(-c, d)}$$

est un élément de $(\mathbb{R}^{*+})^2$. Comme de plus $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$ sont irrationnels, les marginales de μ sont adaptées sur $\mathbb{R}$. Le corollaire découle alors de façon immédiate du théorème (24). □

Nous avons peu de renseignements sur la localisation des points de contraction (α, β); néanmoins, ces points étant les éléments du support de la mesure invariante ν, on montre de façon élémentaire qu'ils ne peuvent pas appartenir à l'ensemble

$$\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqq \inf(\sqrt{a^2+b^2}-a, \sqrt{c^2+d^2}-d)\}.$$

En particulier, on a $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

B. — Études de la marche aléatoire sur $(\mathbb{R}^+)^d$ à pas markoviens et avec réflexions sur les axes

26. DÉFINITION. — *On dit que le noyau markovien* P *sur* $\mathbb{R}^d$ *admet des moments d'ordre* $k\,(k>0)$ *si* $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^k \mathrm{P}(x, dy) < +\infty$.

Nous avons le théorème suivant :

27. THÉORÈME. — *Soient* P *un noyau markovien sur* $\mathbb{R}$ *et* $((\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, (\mathrm{X}_n)_{n \geqq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}})$ *la chaîne canonique associée à* P.

On suppose qu'il existe $\delta \in]0, 1]$ *et une mesure de probabilité* μ *sur* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(x, .) \geqq \delta\mu(.).$$

La chaîne $(X_n)_{n\geqq 0}$ *est alors récurrente positive au sens de Harris de mesure de probabilité* P-*invariante* π. *On note* $(X_n^*)_{n\geqq 0}$ *une version récurrente positive au sens de Harris de la chaîne duale de* $(X_n)_{n\geqq 0}$ [18], *h la densité de* μ *par rapport à* π *et* Δ *la borne supérieure dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *du support de* μ.

On suppose en outre que μ *est adaptée sur* $\mathbb{R}$, *que* $S_\mu \cap \mathbb{R}^{*+} \neq \varnothing$ *et que* P *admet des moments d'ordre* $3+\varepsilon$ *avec* $\int x\,\pi(dx)>0$.

Alors, il existe une unique mesure de probabilité $\lambda=\int \varepsilon_x \otimes \lambda_x\,\pi(dx)$ T-*invariante sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ *et une variable aléatoire* Z *sur* $\mathbb{R}^+$ *de loi* $f(x)\lambda_x$ *sous* $\mathbb{P}_x$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *telle que pour élément a de* $[0, \Delta[$ *la suite* $(h(X_n^*)(\|a-X_n^*|-\ldots-X_0^*|-Z))_{n\geqq 0}$ *converge* $\mathbb{P}_x$-*p. s. vers* 0.

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$ *et tout point a de* $\mathbb{R}^+$, *la suite* $(\|a-X_0|-\ldots-X_n|)_{n\geqq 0}$ *est proximale et récurrente sur les ouverts* V *de* $\mathbb{R}^+$ *chargés par la mesure* $\int \lambda_x(.)\,\pi(dx)$.

Preuve. — Il suffit de montrer que l'opérateur P*, dual de P vis-vis de π, vérifie les hypothèses H1 à H4, puis d'appliquer le théorème (9) au couple (P^*, f).

Remarquons tout d'abord que sous l'hypothèse $\forall x\in X$, $P(x, .)\geqq \delta\mu(.)$, la chaîne $(X_n)_{n\geqq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris [18] et l'unique mesure de probabilité P-invariante π vérifie $\pi\geqq\delta\mu$. Le théorème de Radon-Nikodym établit donc l'existence d'une fonction positive h sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu(dx)=h(x)\pi(dx)$ et l'on a $P^*(x, .)\geqq\delta^2 h(x)\mu(.)$ $\pi(dx)$-p. s. En posant $\delta(x)=\delta^2 h(x)$, on obtient

$$\forall x\in X,\quad P^*(x, .)\geqq\delta(x)\mu(.)$$

avec $\delta(x)>0$ $\mu(dx)$-p. s. et $\pi(\delta)>0$.

Par ailleurs, lorsque μ est adaptée et $S_\mu\cap\mathbb{R}^{*+}\neq\varnothing$, le semi-groupe fermé $T_{f(\mu)}$ engendré par les contractions $f(x)$, $x\in S_\mu$, possède une suite contractante de point de contraction 0 [12].

Enfin, lorsque $(X_n)_{n\geqq 0}$ forme une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$, on ne peut exhiber à la façon de W. Feller et F. B. Knight une mesure T-invariante sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Pour établir l'existence d'une telle mesure, nous allons nous intéresser aux différents instants de réflexion en 0 de la suite $(\|a-X_0|-\ldots-X_n|)_{n\geqq 0}$.

On introduit le temps d'arrêt

$$R=\inf\{n\geqq 1 : Y_1-(X_1+\ldots+X_n)<0\}$$

relativement à la filtration canonique $(\sigma(X_0, \ldots, X_n))_{n \geqq 0}$; comme $\int x \pi(dx) \in \mathbb{R}^{*+}$, on a d'après la loi des grands nombres

$$\forall (x, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}_{(x, a)}[R < +\infty] = 1$$

et l'on peut définir par récurrence la suite de temps d'arrêt $(R^{(n)})_{n \geqq 0}$ en posant

$$\begin{cases} R^{(n+1)} = R^{(n)} + R \circ \theta^{R^{(n)}}, & n \geqq 0 \\ R^{(0)} = 0 \end{cases}$$

La suite $(X_{R^{(n)}}, Y_{R^{(n)}})_{n \geqq 0}$ forme alors une chaîne de Markov sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ de noyau de transition T_R défini par $T_R \Phi(x, a) = \mathbb{E}_{(x, a)}[\Phi(X_R, Y_R)]$ pour toute fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

28. LEMME. — *Supposons que* P *vérifie l'hypothèse* $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x, .) \geqq \delta\mu(.)$ *et admette des moments d'ordre* 2 [*cf. définition* (26)].
Alors, pour tout réel $c > 0$, *il existe une constante* $\lambda_c \in [0, 1]$ *telle que*

$$\sup_{(x, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \mathbb{P}_{(x, a)}[Y_R \geqq c] \leqq \lambda_c$$

avec $\sum_{k \geqq 1} \lambda_k < +\infty$.

Preuve. — On note U le noyau markovien associé à la chaîne $(X_n, S_n)_{n \geqq 0}$ avec $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et l'on pose $G = \sum_{n=0}^{+\infty} U^n$. Une étude fine du potentiel G ([16], annexe), utilisant les arguments de la théorie du renouvellement ([4], [8]), établit l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{[-1,1]})(x, 0) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{[-1,1]}(S_n)\right] \leqq K.$$

Le principe du maximum appliqué à G donne alors

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(x, a) \in \mathbb{R}^2 \\ k \in \mathbb{Z}}} G(1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{[k; k+1]})(x, a) &\leqq \sup_{\substack{(x, a) \in \mathbb{R}^2 \\ k \in \mathbb{Z}}} G(1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{[0, 1]})(x, a-k) \\ &\leqq \sup_{(x, a) \in \mathbb{R} \times [0; 1]} G(1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{[0, 1]})(x, a) \\ &\leqq \sup_{x \in \mathbb{R}} G(1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{[-1,1]})(x, 0) \end{aligned}$$

d'où

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, \quad \sup_{(x, a) \in \mathbb{R}^2} G(1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{[-u, 0]})(x, a) \leqq K([u]+1) \quad \text{(inégalité I)}$$

Par conséquent, pour tout $(x, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(x, a)}[Y_R \geqq c] &\leqq \mathbb{P}_{(x, a)}[X_R \geqq c] \\
&\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{(x, a)}[R = n, X_n \geqq c] \\
&\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{(x, a)}[Y_1 - X_n < X_1 + \ldots + X_{n-1} \leqq Y_1, X_n \geqq c] \\
&\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[|a-x| - X_n < X_1 + \ldots + X_{n-1} \leqq |a-x|, X_n \geqq c] \\
&\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\int_c^{+\infty} 1_{]|a-x|-u, |a-x|]}(X_1 + \ldots + X_{n-1}) P(X_{n-1}, du)\right]
\end{aligned}$$

En utilisant alors l'égalité $P(x, .) = \delta\mu(.) + (1-\delta) Q(x, .)$ où Q est un noyau markovien sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(x, a)}[Y_R \geqq c] \leqq \delta \int_c^{\infty} G(1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{]-u, 0]})(x, -|a-x|)\, \mu(du) \\
+ (1-\delta) \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x\left[\int_c^{+\infty} 1_{]|a-x|-u, |a-x|]}(X_1 + \ldots + X_{n-1}) Q(X_{n-1}, du)\right] \\
\leqq \delta K \int_c^{+\infty} ([u]+1)\, \mu(du) + (1-\delta) Q(x, [c, +\infty[) \\
+ (1-\delta) \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x\left[\int_{\mathbb{R}} \int_c^{+\infty} 1_{]|a-x|-u-v, |a-x|-v]}(X_0 + \ldots + X_{n-1}) \right. \\
\left. Q(v, du) P(X_{n-1}, dv)\right]
\end{aligned}$$

Par itération, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(x, a)}[Y_R \geqq c] \leqq \delta K \sum_{n=0}^{+\infty} (1-\delta)^n \int_c^{+\infty} ([u]+1)\, \mu Q^n(du) \\
+ \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\delta)^n Q^n(x, [c, +\infty[)
\end{aligned}$$

De l'égalité $P^k = \delta\mu + \sum_{l=1}^{k-1} \delta(1-\delta)\mu Q^l + (1-\delta)^k Q^k$ satisfaite pour tout entier $k \geqq 2$, on déduit l'inégalité $\delta \sum_{n=0}^{\infty} (1-\delta)^n \mu Q^n \leqq \pi$ si bien que

$$K\delta \sum_{n=0}^{+\infty} (1-\delta)^n \int_c^{+\infty} ([u]+1)\, \mu Q^n(du) \leqq K \int_c^{+\infty} ([u]+1)\, \pi(du).$$

Par ailleurs, comme $0<\delta<1$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\delta)^n Q^n(x,[c,+\infty[)\leqq\frac{1-\delta}{\delta}\sup_{x\in\mathbb{R}}Q(x,[c,+\infty[)$$

On pose

$$\lambda_c=K\int_c^{+\infty}([u]+1)\,\pi(du)+\frac{1-\delta}{\delta}\sup_{x\in\mathbb{R}}Q(x,[c,+\infty[).$$

Les hypothèses de moments sur P permettent alors d'établir la convergence de la série $(\lambda_k)_{k\geqq 1}$. $\square$

La propriété forte de Markov donne alors de façon immédiate

$$\sup_{(x,a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\mathbb{P}_{(x,a)}[Y_R\geqq c,\ Y_{R^{(2)}}\geqq c,\ \ldots,\ Y_{R^{(n)}}\geqq c]\leqq\lambda_c^n$$

On introduit le temps d'arrêt $S=\inf\{n\geqq 1 : Y_{R^{(n)}}\leqq c\}$ relativement à la filtration $(\sigma(X_0,\ldots,X_{R^{(n)}}))_{n\geqq 0}$. Pour c suffisamment grand, on a $\lambda_c<1$ si bien que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall a\in\mathbb{R}^+,\qquad \mathbb{P}_{(x,a)}[S<+\infty]=1.$$

On peut alors définir par récurrence la suite $(S^{(n)})_{n\geqq 0}$ de temps d'arrêt en posant

$$\begin{cases} S^{(n+1)}=S^{(n)}+S\circ\theta^{R^{S^{(n)}}}, & n\geqq 0\\ S^{(0)}=0\end{cases}$$

La suite $(X_{R^{S^{(n)}}}, Y_{R^{S^{(n)}}})_{n\geqq 0}$ forme une chaîne Markov sur $\mathbb{R}\times[0,c]$ de noyau de transition T_{R^S} défini par $T_{R^S}\Phi(x,a)=\mathbb{E}_{(x,a)}[\Phi(X_{R^S},Y_{R^S})]$ pour toute fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.

En considérant une valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence vague de la suite de mesures de probabilité

$$\left(\frac{1}{n}(\pi\otimes\varepsilon_a+(\pi\otimes\varepsilon_a)T_{R^S}+\ldots+(\pi\otimes\varepsilon_a)T_{R^S}^{(n-1)})\right)_{n\geqq 1},$$

on établit l'existence d'une mesure de probabilité λ_0 T_{R^S}-invariante sur $\mathbb{R}\times[0,c]$. La méthode de balayage de Harris permet alors de démontrer les lemmes suivants

29. LEMME. — *La mesure λ_1 définie par*

$$\lambda_1(A)=\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[\sum_{n=0}^{S-1}1_A(X_{R^{(n)}},Y_{R^{(n)}})\right]$$

pour tout borélien A *de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ *est une mesure positive bornée* T_R-*invariante admettant un moment d'ordre* 1.

Notons que le fait que λ_1 possède un moment d'ordre 1 découle de l'inégalité

$$\sup_{(x, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \mathbb{P}_{(x, a)}[\mathrm{Y}_{\mathrm{R}} \geqq c, \mathrm{Y}_{\mathrm{R}^{(2)}} \geqq c, \ldots, \mathrm{Y}_{\mathrm{R}^{(n)}} \geqq c] \leqq \lambda_c^n$$

30. Lemme. – *Lorsque* P *admet des moments d'ordre* $3+\varepsilon$, *la mesure* λ *définie par*

$$\lambda(\mathrm{A}) = \mathbb{E}_{\lambda_1}\left[\sum_{n=0}^{\mathrm{R}-1} 1_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)\right]$$

pour tout borélien A *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *est une mesure positive bornée* T-*invariante*.

Dans ce dernier lemme, le fait que λ soit bornée découle directement de l'hypothèse de moments sur P. En effet, pour tout $(x, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(x, a)}[\mathrm{R}] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{(x, a)}[\mathrm{R} \geqq n] \\
&\leqq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x[\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_{n-1} \leqq |a-x|] \\
&\leqq \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{G}((x, 0), \mathbb{R} \times]-\infty, a]) \\
&\leqq \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{G}((x, 0), \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-) + ([a]+1) \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{G}(1_{\mathbb{R}} \otimes 1_{[-1, 1]})(x, 0).
\end{aligned}$$

Lorsque P possède des moments d'ordre $3+\varepsilon$, il existe une constante $\mathrm{A} > 0$ telle que

$$\forall k \leqq -1, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{G}((x, 0), \mathbb{R} \times]k, k+1]) \leqq \frac{\mathrm{A}}{k^2} \quad (cf. \text{ [16], annexe}).$$

Par conséquent

$$\lambda(1) = \mathbb{E}_{\lambda_1}[\mathrm{R}] \leqq \mathrm{A} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{G}((x, 0), [-1, 1]) \int_{\mathbb{R}^+} ([a]+1) \lambda_1(da).$$

Le lemme découle alors du fait que λ_1 possède un moment d'ordre 1. □

Considérons maintenant le cas où $(\mathrm{X}_n)_{n \geqq 0}$ forme une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 2$. Nous obtenons alors le théorème énoncé dans l'introduction et qui généralise au cas markovien le théorème 24.

La démonstration de ce théorème se calque sur celle du théorème (24) en s'appuyant sur la proposition (10). □

REMERCIEMENTS

Ce travail fait partie d'une thèse d'Université soutenue à Rennes en décembre 1989; je tiens à remercier sincèrement M. Albert Raugi qui m'a guidé dans cette recherche.

RÉFÉRENCES

[1] M. F. BARNSLEY et J. H. ELTON, A New Class of Markov Processes for Image Encoding, *Adv. Appl. Prob.*, vol. **20**, 1988, p. 14-32.

[2] M. A. BERGER et H. METE SONER, Random Walks Generated by Affine Mappings, *J. Theor. Prob.*, vol. **1**, n° 3, 1988.

[3] M. A. BOUDIBA, La chaîne de Feller $X_{n+1}=|X_n-Y_n|$ où les v.a. $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont i.i.d. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **301**, série I, 1985, p. 517-519.

[4] L. BREIMAN, *Probability*, Addison Wesley Publishing Company, 1968.

[5] Ph. CHASSAING, Convergence d'un produit semi-markovien de matrices et simplicité du spectre de la limite, *Thèse 3^e cycle*, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1985.

[6] W. FELLER, *An introduction to Probability Theory and its Applications*, **II**, New York, J. Wiley, 1971.

[7] H. FURSTENBERG et H. KESTEN, Products of Random Matrices, *Ann. Math. Stat.*, vol. **31**, 1960, p. 457-469.

[8] Y. GUIVARC'H, Application d'un théorème limite local à la transience et à la récurrence de Marches de Markov, *Springer Verlag, Lect. Notes*, n° **1096**, 1984, p. 301-332.

[9] Y. GUIVARC'H, Exposants caractéristiques de produits des matrices aléatoires en dépendance markovienne, *Springer Verlag, Lect. Notes*, n° **1064**, 1984, p. 161-181.

[10] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Frontières de Furstenberg, propriétés de contractions et théorèmes de convergence, *Zeit. Wahr.*, n° **69**, 1985, p. 187-242.

[11] F. B. KNIGHT, On the Absolute Difference Chain, *Zeit. Wahr.*, n° **43**, 1977, p. 57-63.

[12] J. P. LEGUESDRON, Marche aléatoire sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$. Cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ avec choc élastique en zéro, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **25**, n° 4, 1989, p. 483-502.

[13] E. LEPAGE, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires, *Springer Verlag, Lect. Notes*, n° **928**, 1982, p. 258-303.

[14] G. LETAC, A Contraction Principle for Certain Markov Chains and Its Applications, *Contemporary Math.*, vol. **50**, 1986, p. 263-273.

[15] V. I. OSELEDEC, A Multiplicative Ergodic Theorem, *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. **19**, 1968, p. 197-231.

[16] M. PEIGNE, Marches aléatoires à pas markoviens sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$, *Thèse d'Université*, Université de Rennes I, 1989.

[17] A. RAUGI, , Périodes de fonctions harmoniques bornées, *Séminaires de probabilités*, Rennes, 1978.

[18] D. REVUZ, *Markov chains*, North-Holland/Mathematical Library, 1975.

[19] Von H. SCHELLING, Uber die Verteilung Kopplungswerte in gerkreuzten Ferumeldekabeln grosser Länge, *Elektrishe Nachrichten Technik*, vol. **20**, November/Dezember 1943, p. 251-259.

[20] V. N. TUTUBALIN, On Limit Theorems for a Product of Random Matrices, *Theory Prob. Appl.*, vol. **10**, 1965, p. 25-27.

[21] A. D. VIRTSER, Central Limit Theorem for Semi-Simple Lie Groups, *Theory Prob. Appl.*, vol. **15**, 1970, p. 667-687.

(*Manuscrit reçu le* 20 *décembre* 1990;
corrigé le 2 *septembre* 1991.)