Note de convexité.

Vincent Perrollaz

22 novembre 2019

Table des matières

1 Convexité en dimension 1

Définition 1. *Une application $f : Df \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque l'épigraphe*

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x, y) \in Df \times \mathbb{R} \ : \ y \geq f(x)\}, \tag{1}$$

est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 1. *Comme on a $Df = \pi_1(\mathrm{Epi}(f))$ où $\pi_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x \in \mathbb{R}$ est linéaire on voit que Df est donc forcément un convexe. Dans ce qui suit le domaine d'une application convexe sera désigné par I qui sera un intervalle à priori quelconque.*

Exercice 1.
Montrer que le sup *d'une famille de fonctions convexes est également une fonction convexe.*

Proposition 1. *Si on se donne f une application convexe et qu'on note*

$$\mathcal{A}(f) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall x \in Df, \quad \alpha x + \beta \leq f(x)\}, \tag{2}$$

alors on a

$$\forall x \in Df, \qquad f(x) = \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(f)} (\alpha x + \beta). \tag{3}$$

Remarque 2. *La notation $\mathcal{A}$ est utilisée pour les fonctions affines mais n'est pas canonique.*

En utilisant la proposition précédente on peut mettre obtenir les résultats suivants.

Exercice 2 (Formule de Jensen)**.**
Prouver que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une fonction convexe f on a

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n, \ \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right) \Rightarrow \left(f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right). \tag{4}$$

Exercice 3 (Formule de Jensen intégrale)**.**
Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et que μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ alors

$$f\left(\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)\right) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x). \tag{5}$$

Exercice 4.
Montrer que si f est convexe alors pour tout suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de Df convergeant vers $\bar{x} \in Df$ on a

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n). \tag{6}$$

Proposition 2. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ satisfait*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall \theta \in [0, 1], \qquad f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta) f(y), \tag{7}$$

alors f est une application convexe.

Définition 2. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est quelconque on appelle enveloppe convexe de f l'application $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f^*(x) := \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(f)} (\alpha x + \beta). \tag{8}$$

Exercice 5.
Calculer l'enveloppe convexe d'une application constante par morceaux.

Proposition 3. *Soit une application $f : I \to \mathbb{R}$ alors f est convexe si et seulement si l'application*

$$(x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \tag{9}$$

est croissante en x et en y.

Formulé autrement on a

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \qquad a < b < c \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}. \tag{10}$$

Corollaire 1. *En tout $x \in \overset{\circ}{I}$, l'application f a une dérivée à droite f'_d et une dérivée à gauche f'_g définies par*

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \qquad \begin{cases} f'_d(x) := \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \\ f'_g(x) := \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \end{cases} \tag{11}$$

et on a

$$\forall (x, y) \in I, \quad x < y \Rightarrow \begin{cases} f'_d(x) \leq f'_g(y) \\ f'_g(x) \leq f'_d(x) \\ f'_g(x) \leq f'_g(y) \\ f'_d(x) \leq f'_d(y) \end{cases} \tag{12}$$

Corollaire 2. *Une application convexe définie sur un intervalle I est continue en tout point de l'intérieur $\overset{\circ}{I}$.*

Proposition 4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en tout point de I. Alors f est convexe sur $\overset{\circ}{I}$ si et seulement si l'application $x \mapsto f'(x)$ est croissante.*

Proposition 5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une appication de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée f' est elle même dérivable en tout point. Alors f est convexe sur $\overset{\circ}{I}$ si et seulement si*

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \qquad f''(x) \geq 0. \tag{13}$$

Exercice 6.
On considère une application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que l'on ait deux réels strictement positifs m et M satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad m \leq f''(x) \leq M, \tag{14}$$

- *Étant donnés $(x, y) \in \mathbb{R}$ et $\theta \in (0, 1)$, encadrer alors la quantité*

$$\Delta := \theta f(x) + (1 - \theta) f(y) - f(\theta x + (1 - \theta) y). \tag{15}$$

- *Même question pour encadrer la différence entre les deux côtés de la formule de Jensen à n-variables.*
- *Même question pour la formule de Jensen intégrale.*

Théorème 1.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application convexe alors f est dérivable sur I hormis un nombre au plus dénombrable de points.

Les fonctions f'_d et f'_g sont croissantes et de ce fait dérivables presque partout.

2 Premières Applications

Proposition 6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors on l'inégalité dite* Arithmético-Géométrique

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n, \qquad \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \tag{16}$$

De plus on a égalité dans (16) *si et seulement si tous les x_i sont égaux.*

Remarque 3 (Énoncé en français)**.** *La moyenne géométrique est toujours plus petite que la moyenne arithmétique.*

Démonstration.
- Preuve par la concavité de ln.
- Preuve de Cauchy par récurrence.
- Preuve de Polya via $x \leq e^{x-1}$.
- Preuve par optimisation et les extrema liés.
- Preuve de Bellman par optimisation et programmation dynamique.

□

Exercice 7. *Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz en utilisant la programmation dynamique.*

Définition 3. *Étant donnés un entier positif n et un réel p au moins égal à 1 on définit*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad ||x||_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{17}$$

Définition 4. *Étant donné un entier n on définit*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle x|y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i. \tag{18}$$

Proposition 7 (Inégalité de Hölder)**.**
On considère deux réels strictement positifs p et q conjugués, c'est à dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors étant donné un entier positif n, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle x|y \rangle \leq ||x||_p \cdot ||y||_q. \tag{19}$$

Démonstration. Commencer par montrer le

Lemme 1 (Inégalité de Young)**.**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{20}$$

Différencier preuve entre
- réduction de cas (commencer par les normes valant 1)
- exploitation d'une différence de symétrie entre les deux côtés d'une inégalité pour l'améliorer en faisant apparaître un paramètre d'un côté et en optimisant.

$\square$

Corollaire 3. *On a pour tout entier n et tout réel p plus grand que* 1

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad ||x||_p = \sup_{||y||_q=1} \langle x|y\rangle. \tag{21}$$

Proposition 8. *On considère un réel p plus grand que* 1 *est un entier n positif. On a toujours* l'inégalité de Minkowski

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n, \qquad ||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p. \tag{22}$$

Exercice 8.
Discuter les cas d'égalité dans les équations d'Hölder et de Minkowski.

Exercice 9.
Étant donné un entier n au moins égal à 3 *déterminer pour un cercle donné le polygone à n cotés inscrit dans le cercle de plus grande aire.*

Exercice 10.
Étant donnés un entier n est des réels positifs $(r_1, \ldots, r_n)$ montrer que l'on a

$$(1+r_G)^n \leq \prod_{i=1}^{n} (1+r_i) \leq (1+r_A)^n, \tag{23}$$

où r_A et r_G sont respectivement les moyennes arithmétiques et géométrique des r_i. Comment interpréter pécunièrement cette inégalité ?

Exercice 11.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}, \tag{24}$$

est-elle convexe ? (On pourra distinguer le cas où f est continu de celui où elle ne l'est pas)

3 Convexité dans $\mathbb{R}^d$

Définition 5. *Une application $f : Df \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque l'épigraphe*

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x,y) \in Df \times \mathbb{R} \ : \ y \geq f(x)\}, \tag{25}$$

est une partie convexe de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Remarque 4. *Comme on a $Df = \pi_1(\mathrm{Epi}(f))$ où $\pi_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} \to x \in \mathbb{R}^d$ est linéaire on voit que Df est donc forcément un convexe. Dans ce qui suit le domaine d'une application convexe sera désigné par I qui sera un intervalle à priori quelconque.*

Exercice 12.
Montrer que le sup *d'une famille de fonctions convexes est également une fonction convexe.*

Proposition 9. *Si on se donne f une application convexe et qu'on note*

$$\mathcal{A}(f) := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \ : \ \forall x \in Df, \quad \langle \alpha | x \rangle + \beta \leq f(x)\}, \tag{26}$$

alors on a

$$\forall x \in Df, \qquad f(x) = \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(f)} (\langle \alpha | x \rangle + \beta). \tag{27}$$

Exercice 13 (Jensen)**.**
Prouver que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a lorsque f est convexe

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n, \ \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n,$$
$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right) \Rightarrow \left(f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right). \tag{28}$$

Proposition 10. *Si U est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$ et que $f : U \to \mathbb{R}$ satisfait*

$$\forall (x,y) \in U^2, \quad \forall \theta \in [0,1], \qquad f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y), \tag{29}$$

alors f est une application convexe.

Définition 6. *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est quelconque on appelle enveloppe convexe de f l'application $f^* : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f^*(x) := \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(f)} (\alpha x + \beta). \tag{30}$$

Proposition 11. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ alors f est convexe si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in U^2, \qquad f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x) | y - x \rangle. \tag{31}$$

Proposition 12. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^2$ alors f est convexe si et seulement si pour tout point $x \in U$ la forme quadratique*

$$h \in \mathbb{R}^d \mapsto \langle d^2 f(x) h | h \rangle, \tag{32}$$

est positive.

Rappel : $d^2 f(x)$ est la hessienne de f en x c'est à dire la matrice des dérivées secondes, elle est symétrique grâce au lemme de Schwarz.

Proposition 13. *Soit H un espace préhilbertien. Soit U un ouvert convexe de H et $f : U \to \mathbb{R}$ une application convexe. Alors si f est localement bornée elle est également localement Lipschitz.*

Proposition 14. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application convexe avec U un ouvert, alors elle est localement bornée.*

Théorème 2 (Alexandrov). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application convexe avec U un ouvert. Alors pour presque tout x de U on a un vecteur v et une matrice M symétrique positive telle que*

$$f(x+h) = f(x) + \langle v|h\rangle + \langle Mh|h\rangle + o(||h||^2). \tag{33}$$

Exercice 14.
Soit $\mathcal{S}_n$ l'espace des matrices symétriques $n \times n$, montrer que l'application qui à une matrice M de $\mathcal{S}_n$ associe sa plus grande valeur propre est convexe.

4 Optimisation dans $\mathbb{R}^d$

Définition 7. *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^d \to R$ une application. Soit $x_0 \in E$. On dit que $f(x_0)$ est*

- *un minimum global de f sur E lorsque*

$$\forall x \in E, \qquad f(x) \geq f(x_0), \tag{34}$$

- *un maximum global de f sur E lorsque*

$$\forall x \in E, \qquad f(x) \leq f(x_0), \tag{35}$$

- *un minimum local de f lorsqu'il existe $r > 0$ tel que*

$$\forall x \in E \cap B(x_0, r), \qquad f(x) \leq f(x_0), \tag{36}$$

- *un maximum local de f lorsqu'il existe $r > 0$ tel que*

$$\forall x \in E \cap B(x_0, r), \qquad f(x) \geq f(x_0). \tag{37}$$

Un extremum est un minimum ou un maximum.

Proposition 15. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application avec U un ouvert. Soit $x_0 \in U$ Alors si $f(x_0)$ est un extremum local et si f est dérivable en x_0 alors*

$$\nabla f(x_0) = 0. \tag{38}$$

Proposition 16. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application avec U un ouvert. Soit $x_0 \in U$ Alors si $f(x_0)$ est un extremum local et si f admet un développement de Taylor à l'ordre 2 en x_0 alors on a* (38) *et la forme quadratique*

$$h \mapsto \langle d^2 f(x_0) h | h \rangle \tag{39}$$

est positive s'il s'agit d'un minimum et négative s'il sagit d'un maximum.

Proposition 17. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application avec U un ouvert. Soit $x_0 \in U$. Si f admet un développement de Taylor à l'ordre 2 en x_0 que*

$$\nabla f(x_0) = 0, \tag{40}$$

et que la forme quadratique

$$h \mapsto \langle d^2 f(x_0) h | h \rangle \tag{41}$$

est définie positive alors $f(x_0)$ est un minimum local, si elle est définie négative c'est un maximum local, et si elle est non dégénérée mais non signée ce n'est pas un extremum.

Proposition 18. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considère f et g deux application $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ alors si*

$$f(x_0) = \min_{g(x)=0} f(x) \tag{42}$$

(ou max*) on a deux réels λ, μ non tous les deux nuls tels que*

$$\lambda \nabla f(x_0) + \mu \nabla g(x_0) = 0. \tag{43}$$

Démonstration.
- Par inversion locale.
- Géométriquement via plan tangent et fonctions implicites.
- Par pénalisation.

□

Remarque 5. *Si on a une famille de contraintes $g_1, \dots, g_n$ alors on en déduit l'existence de $\lambda, \mu_1, \dots \mu_n$ non tous nuls tels que*

$$\lambda \nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \nabla g_i(x_0) = 0. \tag{44}$$

Théorème 3 (Weierstrass)**.** *Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Proposition 19. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue telle que*

$$f(x) \underset{||x|| \to +\infty}{\to} +\infty. \tag{45}$$

Alors f admet un minimum global.

Proposition 20. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe alors si x_0 est un point de minimum local, x_0 est également un point de minimum global.*

Exercice 15.
Étant donnés des nombres $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, déterminer les extremas des fonctions

$$L_2(x) := \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2, \qquad L_1(x) := \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|. \tag{46}$$

Puis discuter de la robustesse de ces minimas par rapports aux perturbations des $(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 6. *Les méthodes itératives de gradients pour obtenir des suites convergeant vers un extrema local repose sur l'observation suivante. Étant donné un point $x_n \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$f(x_n + h) \sim f(x_n) + \langle \nabla f(x_n) | h \rangle, \tag{47}$$

pour une certaine norme N dans $\mathbb{R}^d$ on cherche alors un vecteur v_n tel que

$$\langle \nabla f(x_n) | v_n \rangle = \min_{N(u)=1} \langle \nabla f(x_n) | u \rangle \tag{48}$$

une fois ce vecteur de direction *choisi on cherche alors le* pas *via la minimisation locale ou globale de*

$$g(t) := f(x_n + t v_n), \tag{49}$$

et une fois un tel t_n choisi on pose

$$x_{n+1} = x_n + t_n v_n. \tag{50}$$

Exercice 16.
Pour une matrice inversible M donnée. Appliquer l'idée ci-dessus à la minimisation de la fonctionnelle

$$J(A) := ||MA - Id||_2^2, \tag{51}$$

pour la norme $||.||_2$ et pour la norme $||.||_1$ matricielle.

Indication *: on pourra commencer à montrer que*

$$||B||_2 = \mathrm{Tr}(B^T B). \tag{52}$$

5 Le cas de la dimension infinie

5.1 Motivation

On est naturellement amener à faire de l'optimisation en dimension infinie, plus précisément on aura une fonctionnelle J (c'est à dire une fonction prenant des fonctions en argument) à minimiser et ce pour différentes raisons.

- Calcul des variations. On chercher à déterminer pour deux points (x, y) et (a, b) (avec $a < x$ et $b > y$) la courbe reliant les deux points tel qu'un point matériel glissant sans frottement sous l'action de la seule gravité mettent le moins de temps. Si la courbe est le graphe d'une fonction $f : [a, x] \to \mathbb{R}$, le temps de parcours est égal (*Exercice*) à

$$\int_a^x \frac{\sqrt{1+(f'(s))^2}}{\sqrt{2g(b-f(s))}} ds \tag{53}$$

  que l'on cherche à minimiser pour les fonctions f satisfaisant

$$f(a) = b, \qquad f(x) = y. \tag{54}$$

- En mécanique la trajectoire d'un double pendule (masses m et M, longueurs l et L angles θ et α) est réalisée comme extrema de l'action

$$\mathcal{A}(\alpha, \theta) := \int_{t_0}^{t_1} (M+m)L^2 \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + ml^2 \frac{\dot{\theta}^2}{2} + mlL\dot{\alpha}\dot{\theta}\cos(\alpha - \theta) \\ - (M+m)gL\sin(\alpha) - mgl\sin(\theta) dt. \tag{55}$$

- En contrôle optimal on cherche des fonctions x, u minimisant

$$J(x, u) := \int_0^T C(x(t), u(t))dt + K(x(T)), \tag{56}$$

  sous la contrainte

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0. \tag{57}$$

On peut également être amener à introduire des méthodes itératives pour résoudre des équations différentielles du type

$$\begin{cases} \ddot{y} + p(x)y(x) = f(x) \\ y(0) = y(L) = 0. \end{cases} \tag{58}$$

En effet comme on peut montrer (*Exercice*) que la solution de

$$\begin{cases} \ddot{y} = g(x), \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \tag{59}$$

est donnée par

$$y(x) := \int_0^L N(x, s)g(s)ds \tag{60}$$

avec le noyau N défini par

$$N(x,s) := \begin{cases} \frac{s(x-L)}{L} & \text{si } s < x \\ \frac{x(s-L)}{L} & \text{si } s > x \end{cases} \tag{61}$$

Résoudre (58) revient alors à trouver y tel que

$$y(x) = \int_0^L N(x,s)(f(s) - p(s)y(s))ds. \tag{62}$$

5.2 Espace de Hilbert

Définition 8. *Soit E un espace vectoriel un produit scalaire est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ que l'on notera $(u,v) \mapsto \langle u|v\rangle$ vérifiant*

- *symétrie : pour tout vecteur u et v on a*

$$\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle. \tag{63}$$

- *linéarité : pour tout vecteurs u, v et w et tous réel λ on a*

$$\langle u|v + \lambda w\rangle = \langle u|v\rangle + \lambda\langle u|w\rangle. \tag{64}$$

  (par symétrie on a linéarité aussi par rapport à l'autre variable)

- *positivité : pour tout vecteur non nul u on a*

$$\langle u|u\rangle > 0. \tag{65}$$

Proposition 21 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Si E est un muni d'un produit scalaire on a pour tout vecteurs u et v

$$\langle u|v\rangle \leq \sqrt{\langle u|u\rangle}\sqrt{\langle v|v\rangle}. \tag{66}$$

Démonstration. Commencer par la preuve de Schwarz.

Puis cas général avec une matrice d'orthogonalité via d'autre méthode en dimension définie dénombrabre.

Identité de Lagrange ? □

Proposition 22. *Si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire alors l'application*

$$u \in E \mapsto ||u|| := \langle u|u\rangle, \tag{67}$$

est une norme. On dit que E est un espace préhilbertien.

Définition 9. *Si H est un espace préhilbertien complet on dit qu'il s'agit d'un espace de Hilbert.*

Définition 10. *Soit E un espace vectoriel topologique et $f : F \subset E \to \mathbb{R}$ une application. On dira que f est convexe lorsque l'épigraphe*

$$\{(x,t) \in F \times \mathbb{R} \;:\; f(x) \leq t\} \tag{68}$$

est un convexe fermé de $E \times \mathbb{R}$.

Théorème 4. *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H alors pour tout point x dans H il existe un unique y dans C tel que*

$$\forall z \in C, \qquad ||x-y||_H \leq ||x-z||_H. \tag{69}$$

Grâce à l'unicité on introduira alors l'application qui à x associe y qu'on appelera l'opérateur de projection sur C et qu'on notera $y = p_C(x)$.

Le projeté $p_C(x)$ peut être également caractérisé comme le seul point de C satisfaisant

$$\forall z \in C, \qquad \langle z - p_C(x) | x - p_C(x)\rangle \leq 0. \tag{70}$$

Théorème 5. *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout forme linéaire continue l sur H il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, \qquad l(v) = \langle u|v\rangle. \tag{71}$$

L'application $l \mapsto u$ est de plus une isométrie de H^* sur H.

Proposition 23. *Soient H un espace de Hilbert et $f : E \to \mathbb{R}$ une application convexe. Si on note*

$$T(t) := \{(\alpha,\beta) \in H \times \mathbb{R} \ : \ \forall z \in E, \quad f(z) \geq \langle \alpha|z\rangle + \beta\}, \tag{72}$$

alors on a

$$\forall z \in E, \qquad f(z) := \sup_{(\alpha,\beta)\in T(f)} \langle \alpha|z\rangle + \beta. \tag{73}$$

Proposition 24. *Soit $E, ||.||$ un espace vectoriel normé, la boule unité est compacte si et seulement E est de dimension finie.*

Définition 11. *Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de H converge faiblement vers $u \in H$ lorsque*

$$\forall v \in H, \qquad \langle v|u_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} \langle v|u\rangle. \tag{74}$$

On notera alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u. \tag{75}$$

Proposition 25. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et v des éléments d'un Hilbert H. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers v alors elle converge aussi faiblement.*

Exercice 17. *Montrer que la réciproque est en général fausse.*

Proposition 26. *Soient H un espace de Hilbert et $f : E \subset H \to \mathbb{R}$ une application convexe alors on a*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u \qquad \Rightarrow \qquad f(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(u_n). \tag{76}$$

Exercice 18. *La norme est elle continue pour la convergence faible ?*

Théorème 6. *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de H alors si la suite est bornée i.e. si on peut trouver $R > 0$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \qquad ||u_n||_H \leq R, \tag{77}$$

on peut trouver un vecteur $\bar{u} \in H$ et une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$u_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \bar{u}. \tag{78}$$

Références

[1] E. F. Beckenbach and R. Bellman. *Inequalities*, volume 30. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Haï m Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[3] Ivar Ekeland. *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique.* Presses universitaires de France, 1974.

[4] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[5] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[6] Bernard R. Gelbaum and John M. H. Olmsted. *Counterexamples in analysis.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. Corrected reprint of the second (1965) edition.

[7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1952 edition.

[8] Lars Hörmander. *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, volume 26 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications].* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] Lars Hörmander. *Notions of convexity.* Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Reprint of the 1994 edition.

[10] Frigyes Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Functional analysis.* Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955. Translated by Leo F. Boron.

[11] Walter Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[12] J Michael Steele. *The Cauchy-Schwarz master class : an introduction to the art of mathematical inequalities.* Cambridge University Press, 2004.

[13] F. Testard. *Analyse mathématique : la maîtrise de l'implicite.* Mathématiques en devenir. Calvage & Mounet, 2012.

[14] Michel Willem. *Principes d'analyse fonctionnelle*, volume 9 of *Nouvelle Bibliothèque Mathématique [New Mathematics Library].* Cassini, Paris, 2007.