Correction exo 2 cc2 2021–2022

On s'intéresse à l'équation différentielle scalaire

$$\dddot{y}(t) = \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t). \tag{1}$$

(1a) On commence par poser $X(t) := (y(t)\,\dot{y}(t)\,\ddot{y}(t))^T$. On constate alors que

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dddot{y}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ -y(t) + \dot{y}(t) + \ddot{y}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X(t).\end{aligned}$$

(1b) On sait alors que $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{M(t-t_0)}X_0$ est solution de

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = M\,X(t), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \tag{2}$$

pour tout choix de t_0 dans $\mathbb{R}$ et X_0 dans $\mathbb{R}^3$. Il s'agit évidemment d'une solution maximale car elle est définie sur $\mathbb{R}$, en appliquant Cauchy-Lipschitz on en déduit que c'est l'unique solution maximale du problème de Cauchy choisi.

(1c) On vient de prouver qu'une solution maximale s'écrit forcément $X : t \mapsto e^{M\,t}X_0$ pour un certain vecteur X_0. Si on introduit alors la base canonique $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$ puis qu'on pose

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_i(t) := e^{M\,t}e_i, \tag{3}$$

on constate que l'on a alors $X = e_1^*(X_0)f_1 + e_2^*(X_0)f_2 + e_3^*(X_0)f_3$. Comme $f_i(0) = e_i$ on en déduit facilement que la famille est libre en plus d'être génératrice. On a donc trouvé une base de l'espace des solutions maximales et celui-ci est donc un espace vectoriel de dimension 3.

(1d) On peut calculer

$$\begin{aligned}\det(\lambda \mathrm{Id} - M) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda(\lambda-1)-1)+1 \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda+1).\end{aligned}$$

On voit que les valeurs propres sont 1 et -1.

(2a) Le polynôme caractéristique de l'équation (1) est clairement $x^3 - x^2 - x + 1$ on a donc 1 comme racine double et -1 comme racine simple. On sait donc que la solution générale est de la forme $t \mapsto (a\,t + b)e^t + c\,e^{-t}$. Cela revient à dire que $t \mapsto t\,e^t$, $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{-t}$ forment une base de l'espace des solutions de (1).

(2b) Pour déterminer une solution générale de

$$\dddot{y}(t) = \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) + e^t, \tag{4}$$

on va insérer l'ansatz $y(t) = (t\,a(t) + b(t))e^t + c(t)e^{-t}$.

La première étape de la variation de la constante permet alors d'obtenir

$$(t\,\dot{a}(t) + \dot{b}(t))e^t + \dot{c}(t)e^{-t} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(t) = (t\,a(t) + a(t) + b(t))e^t - c(t)e^{-t}.$$

La seconde étape assure

$$(t\dot{a}(t) + \dot{a}(t) + \dot{b}(t))e^t - \dot{c}(t)e^{-t} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{y}(t) = (t\,a(t) + 2a(t) + b(t))e^t + c(t)e^{-t}.$$

Finalement on obtient donc

$$\dddot{y}(t) = (t\,\dot{a}(t) + 2\dot{a}(t) + \dot{b}(t))e^t + \dot{c}(t)e^{-t} + (t\,a(t) + 3a(t) + b(t))e^t - c(t)e^{-t}.$$

On conclut alors que satisfaire (4) revient à satisfaire :

$$e^t = \dddot{y}(t) - \ddot{y}(t) - \dot{y}(t) + y(t) = (t\,\dot{a}(t) + 2\dot{a}(t) + \dot{b}(t))e^t + \dot{c}(t)e^{-t}.$$

On s'est donc ramené au système

$$\begin{pmatrix} t\,e^t & e^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & e^t & -e^{-t} \\ (t+2)e^t & e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

En retranchant la première équation à la troisième on obtient $\dot{a}(t) = 1/2$. On peut alors déterminer $\dot{c}(t) = e^{2t}/4$ et $\dot{b}(t) = -(2t+1)/4$.

On en déduit $a(t) = t/2 + \alpha$, $b(t) = -(t^2 + t)/4 + \beta$ et $c(t) = e^{2t}/8 + \gamma$. Dont on tire la solution générale de (4) sous la forme

$$y(t) = (\alpha t + \beta)e^t + \gamma e^{-t} + \frac{2t^2 - 2t + 1}{8}e^t. \tag{5}$$

(3) En utilisant la question 1, on sait qu'il suffit de déterminer la solution de

$$\begin{cases} \dddot{y}(t) = \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t), \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \ddot{y}(0) = y_2. \end{cases} \tag{6}$$

Or la formule générale assure que $y(t) = (a\,t + b)e^t + c\,e^{-t}$, donc il faut déterminer a, b et c, en utilisant les données initiales de (6). On a donc le système

$$\begin{cases} b + c = y_0 \\ a + b - c = y_1 \\ 2\,a + b + c = y_2 \end{cases} \tag{7}$$

La solution est donnée par $a = \frac{y_2 - y_0}{2}$, $b = \frac{3y_0 + 2y_1 - y_2}{4}$ et $c = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{4}$.
Finalement on obtient l'identité

$$e^{tM} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t & e^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & e^t & e^{-t} \\ (t+2)e^t & e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} te^t & e^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & e^t & e^{-t} \\ (t+2)e^t & e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Comme y_0, y_1 et y_2 sont quelconques on conclut alors

$$e^{tM} = \begin{pmatrix} -\frac{te^t}{2} + \frac{3e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{4} & \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} & \frac{te^t}{2} - \frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{4} \\ -\frac{(t+1)e^t}{2} + \frac{3e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4} & \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} & \frac{(t+1)e^t}{2} - \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4} \\ -\frac{(t+2)e^t}{2} + \frac{3e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{4} & \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} & \frac{(t+2)e^t}{2} - \frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{4} \end{pmatrix}. \tag{10}$$