Examen du cours de compléments d'analyse.
Session 1, 2022–2023

On rappelle, à tout hasard, que la qualité et la rigueur de la rédaction seront des critères importants dans l'évaluation de la copie !

Exercice 1. On introduit l'ensemble I défini par

$$I := \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \,:\, m < 2^n\}, \tag{1}$$

et les applications définies sur $\mathbb{N}^2$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$,

$$\begin{cases} \mathcal{L} : (i, j) \mapsto (i + 1, 2j), \\ \mathcal{R} : (i, j) \mapsto (i + 1, 2j + 1). \end{cases} \tag{2}$$

1. Dessiner l'intersection de I avec $[0, 3] \times \mathbb{R}$.
2. Montrer que I est stable par $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$.
3. Montrer que tout sous ensemble de $\mathbb{N}^2$ contenant $(0, 0)$ et stable par $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ contient I.
4. Construire une bijection explicite entre I et $\mathbb{N}^*$.
5. Montrer qu'il existe un unique couple d'applications $(\mathcal{N}, \mathcal{D})$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{cases} \mathcal{N}(i + 1, 2j) = \mathcal{N}(i, j) + \mathcal{D}(i, j), \\ \mathcal{D}(i + 1, 2j) = \mathcal{D}(i, j), \\ \mathcal{N}(i + 1, 2j + 1) = \mathcal{N}(i, j), \\ \mathcal{D}(i + 1, 2j + 1) = \mathcal{N}(i, j) + \mathcal{D}(i, j), \\ \mathcal{N}(0, 0) = \mathcal{D}(0, 0) = 1, \end{cases} \qquad \forall (i, j) \in I. \tag{3}$$

6. Montrer que pour tout (i, j) de I, les entiers $\mathcal{N}(i, j)$ et $\mathcal{D}(i, j)$ sont premiers entre eux.
7. Montrer que l'application ϕ définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{Q}_+^*$ par

$$\forall (i, j) \in I, \quad \phi(i, j) := \frac{\mathcal{N}(i, j)}{\mathcal{D}(i, j)}, \tag{4}$$

   est une bijection.
8. Quel dessin vous inspire cette construction ?
9. En déduire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

Exercice 2. On définit pour tout réel positif s et tout entier n strictement positif l'ensemble

$$\mathcal{S}_n(s) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n \,:\, \sum_{k=1}^{n} a_k \le s\}, \tag{5}$$

et l'application définie sur $\mathbb{R}_+^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \qquad P_n(a_1, \dots, a_n) := \prod_{k=1}^{n} a_k. \tag{6}$$

1. Montrer que pour tout réel positif s et tout entier n strictement positif, $\mathcal{S}_n(s)$ est un fermé, borné, non vide.
2. En déduire que pour tout $n \ge 0$, il existe une fonction M_n définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall s \ge 0, \quad M_n(s) := \max_{(a_1, \dots a_n) \in \mathcal{S}_n(s)} P_n(a_1, \dots, a_n). \tag{7}$$

3. Montrer que l'on a pour tout entier strictement positif n

$$\forall s \ge 0, \quad M_{n+1}(s) = \max_{0 \le x \le s} \left(x\, M_n(s - x) \right). \tag{8}$$

4. En déduire des formules explicites pour les fonctions $(M_n)_{n \ge 1}$.
5. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n \ge 0}$ une suite de réels telle que $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n \ge 0}$ converge alors que, par contre, $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n \ge 0}$ tend vers $+\infty$. Soit l un réel quelconque.

1. Soit I un sous ensemble fini quelconque de $\mathbb{N}$, montrer que l'ensemble

$$P^+(I) := \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \notin I \quad a_n > 0\} \tag{9}$$

   est non vide.
2. Comment en déduire simplement le même résultat pour

$$P^-(I) := \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \notin I \quad a_n < 0\}. \tag{10}$$

3. Soit I un sous ensemble fini quelconque de $\mathbb{N}$, montrer que l'ensemble

$$M^+(I) := \{n \in P^+(I) \,:\, \forall m \in P^+(I) \quad a_n \ge a_m\} \tag{11}$$

   est non vide.
4. Même question pour

$$M^-(I) := \{n \in P^-(I) \,:\, \forall m \in P^-(I) \quad a_n \le a_m\}. \tag{12}$$

5. Montrer qu'il existe une unique application ϕ définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq 0, \quad \phi(n) := \begin{cases} \min M^+ \left(\phi(\{k \in \mathbb{N} \,:\, k < n\})\right) & \text{si } \sum_{0 \leq k < n} a_{\phi(k)} < l, \\ \min M^- \left(\phi(\{k \in \mathbb{N} \,:\, k < n\})\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13}$$

   Par convention, une sommation sur l'ensemble vide sera évalué à 0.

6. Montrer que si l'on suppose que

$$\forall n \geq 0, \quad a_n \neq 0, \tag{14}$$

   on peut en déduire que ϕ est une bijection.

7. Montrer que de plus, en supposant à nouveau (14), $\left(\sum_{k=0}^{n} a_{\phi(k)}\right)_{n \geq 0}$ converge vers l.

8. Comment peut-on modifier la construction dans le cas où l'on ne suppose pas (14) pour que ϕ vérifie encore les résultats des deux questions précédentes.

Exercice 4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x, u) \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x, u) \underset{u \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{cases} \tag{15}$$

et que

$$\forall K \in \mathbb{R}, \quad \exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^2, \quad -K \leq F(x, u) \leq K \implies -C \leq u \leq C. \tag{16}$$

On suppose également qu'il existe un réel M tel que

$$\forall (x, u) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, u) = M \implies \partial_u F(x, u) \neq 0. \tag{17}$$

Montrer qu'il existe une fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x, v(x)) = M. \tag{18}$$