Examen du cours de compléments d'analyse. Session 1, 2023–2024

On rappelle, à tout hasard, que la qualité et la rigueur de la rédaction seront des critères importants dans l'évaluation de la copie !

Exercice 1 (COURS)**.** On considère un ensemble non vide E, un élément x de E et une fonction f définie sur E à valeurs dans E. Montrer qu'il existe une unique application u définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans E telle que :

$$\begin{cases} u(0) = x, \\ u(n+1) = f(u(n)), \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 2. Pour une fonction f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ on définit

$$\forall n \geq 0, \quad M_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|,$$

prenant éventuellement la valeur $+\infty$.

1. Montrer que pour tout réel h on a
$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq M_2 h^2.$$
2. En déduire que l'on a l'inégalité
$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$
Et qu'en particulier si le terme de droite est fini celui de gauche aussi.
3. Montrer qu'on peut obtenir également
$$\begin{cases} M_1 \leq 2(M_0)^{2/3}(M_3)^{1/3}, \\ M_2 \leq 2(M_0)^{1/3}(M_3)^{2/3}. \end{cases}$$
4. Déterminer des nombres $(A_{k,n})_{0 \leq k \leq n}$ tels qu'on ait
$$\forall n \geq 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad M_k \leq A_{k,n}(M_0)^{1-k/n}(M_n)^{k/n}.$$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère U un ouvert non vide de E, f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur U et à valeurs réelles. On suppose l'existence de $\bar{x}$ dans U tel que $g(\bar{x}) = 0$ et vérifiant

$$\forall x \in U, \quad \begin{cases} g(x) = 0, \\ x \neq \bar{x} \end{cases} \implies f(x) > f(\bar{x}). \tag{2}$$

On suppose également que

$$dg(\bar{x}) \neq 0.$$

On introduit finalement $(L_n)_{n \geq 0}$ la famille de fonctions auxiliaires dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ définies par

$$\forall x \in U, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad L_n(x) := f(x) + n(g(x))^2.$$

1. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que la boule fermée de centre $\bar{x}$ et de rayon r est inclue dans U. On notera cette boule $\bar{B}$ dans la suite.
2. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de $\bar{B}$ telle que
$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in \bar{B}, \qquad L_n(x_n) \leq L_n(x).$$
3. Montrer qu'on a $g(x_n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. Montrer qu'il existe une extraction ϕ telle que $x_{\phi(n)} \to \bar{x}$ quand $n \to +\infty$.
5. Montrer qu'il existe $N \geq 0$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad |ng(x_{\phi(n)})| \leq \frac{\|df(x_{\phi(n)})\|}{2\|dg(x_{\phi(n)})\|}.$$
6. En déduire l'existence d'un réel λ tel que
$$df(\bar{x}) + \lambda dg(\bar{x}) = 0. \tag{3}$$
7. Adapter la preuve précédente pour obtenir encore (3) lorsque on a juste une inégalité large dans (2).
8. Modifier la preuve pour traiter le cas où g n'est pas à valeurs réelles mais prend ses valeurs dans un espace vectoriel F euclidien.

Exercice 4. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeur dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que f est une fonction propre c'est à dire que quelque soit le compact K de $\mathbb{R}^2$ on a $f^{-1}(K)$ compact. On introduit l'ensemble des points critiques de f via
$$C := \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, df(x) \notin \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)\}. \tag{4}$$

On supposera dans un premier temps que C est fini.

1. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) \setminus f(C)$ est ouvert.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) \setminus f(C)$ est fermé dans $\mathbb{R}^2 \setminus f(C)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus f(C)$ est connexe par arc puis en déduire que f est surjective.
4. Montrer que cela implique le théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.
5. On suppose maintenant que C n'est pas fini mais juste discret : tout point de C est isolé. Montrer que C est au plus dénombrable.
6. Adapter les preuves des trois premières questions pour montrer que f est encore surjective.
7. Que peut-on en déduire sur les fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C}$?