Compléments d'intégration : Fonctions d'une variable complexe.

Vincent Perrollaz

Table des matières

1 Construction de $\mathbb{C}$. **2**

2 Module et conjugué. **3**

3 Quelques inégalités. **4**

4 Topologie et Continuité dans $\mathbb{C}$. **7**

5 Dérivabilité dans $\mathbb{C}$. **8**

6 Séries Entières. **9**

7 Isométries particulières du plan. **10**

8 Classification des isométries du plan et théorème des trois réflexions **12**

1 Construction de $\mathbb{C}$.

Définition 1. Sur $\mathbb{R}^2$ on définit deux lois de compositions internes $+$ et $\cdot$ par :

$$\forall((a,\alpha),(b,\beta)) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2, \qquad (a,\alpha)+(b,\beta) := (a+b, \alpha+\beta), \tag{1}$$
$$(a,\alpha)\cdot(b,\beta) := (ab-\alpha\beta, a\beta+\alpha b). \tag{2}$$

Proposition 1. $(\mathbb{R}^2,+)$ *est un groupe abélien.*

Proposition 2. $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *est un anneau commutatif unitaire.*

Remarque 1. Dans la suite on désignera l'anneau $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ par $\mathbb{C}$.

Proposition 3. *L'application $\mathcal{I} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{I}(x) := (x, 0)$$

est un morphisme d'anneau unitaire.

Définition 2. On notera dans la suite $i := (0,1)$.

Remarque 2. Comme on a $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)\cdot(0,1) = \mathcal{I}(a)+i\mathcal{I}(b),$$

on utilisera désormais **l'abus de notation**

$$(a,b) = a+ib.$$

Définition 3. Si $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a+ib$ avec a et b des réels on pose

$$\mathrm{Re}(z) := a, \qquad \mathrm{Im}(z) := b.$$

(Cette définition a un sens car $(a,b) = (\alpha,\beta)$ si et seulement $a = \alpha$ et $b = \beta$)

2 Module et conjugué.

Définition 4. Si $z \in \mathbb{C}$ on définit

$$\bar{z} := \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z), \qquad |z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Proposition 4. *Pour tout couple de complexes (z, w) on a*

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

Proposition 5. *Pour tous nombres complexes z et w on a*

$$|z|^2 = z\bar{z}, \qquad |zw| = |z||w|.$$

Proposition 6. $\mathbb{C}$ *est un corps.*

3 Quelques inégalités.

Proposition 7 (Inégalités triangulaires)**.** *Pous tous nombres complexes z et w on a*

$$|z+w| \leq |z|+|w|, \tag{3}$$

avec égalité si et seulement si on a un réel positif t tel que $z = tw$ ou $w = tw$.

$$\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|. \tag{4}$$

Démonstration. • Pour prouver la première inégalité on calcule de la façon suivante.

$$\begin{aligned}(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 &= z\bar{z} + w\bar{w} + 2|z||w| - z\bar{z} - w\bar{w} - z\bar{w} - \bar{z}w \\ &= 2|z||w| - z\bar{w} - \bar{z}w.\end{aligned}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}(2|z||w|)^2 - (z\bar{w}+\bar{z}w)^2 &= 4z\bar{z}w\bar{w} - z^2\bar{w}^2 - \bar{z}^2w^2 - 2z\bar{z}w\bar{w} \\ &= -(z\bar{w}-\bar{z}w)^2\end{aligned}$$

Or on voit facilement que

$$\mathrm{Re}(z\bar{w}-\bar{z}w) = \frac{\overline{z\bar{w}-\bar{z}w} + z\bar{w} - \bar{z}w}{2} = \frac{\bar{z}w - z\bar{w} + z\bar{w} - bzw}{2} = 0,$$

mais une quantité imaginaire pure à un carré négatif donc

$$-(z\bar{w}-\bar{z}w)^2 \geq 0,$$

on en déduit donc

$$(z\bar{w}+\bar{z}w)^2 \leq (2|z||w|)^2,$$

comme en remplaçant z par $-z$ on a aussi

$$(-z\bar{w}-\bar{z}w)^2 \leq (2|z||w|)^2,$$

on en déduit

$$z\bar{w}+\bar{z}w \leq 2|z||w|,$$

et donc

$$(|z|+|w|)^2 \geq |z+w|^2,$$

puis comme ces quantités sont positives on obtient finalement l'inégalité voulue.

- Dans le cas d'égalité on voit que dans la démonstration précédente on a nécessairement

$$z\bar{w}-\bar{z}w = 0,$$

or du cas trivial où l'un des deux complexes est nul on en déduit

$$\frac{z}{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}},$$

mais donc $t = \frac{z}{w} \in \mathbb{R}$. En injectant dans l'égalité on obtient

$$(|1+t||w| = |z+w| = |z|+|w| = (1+|t|)|w|,$$

puis si $t<0$ on a

$$|1+t| = 1+|t| \Rightarrow \begin{cases} 1+t = 1-t & \text{si } 1+t \geq 0 \\ -1-t = 1-t & \text{si } 1+t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ -1=1 \end{cases},$$

ce qui contradictoire. On en conclut donc bien que $t \geq 0$.

- Pour prouver la deuxième inégalité on écrit

$$\begin{cases} |z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w| = |z-w| + |w| \\ |w| = |w-z+z| \leq |w-z| + |z| = |w-z| + |z| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| - |w| \leq |z-w| \\ -(|z|-|w|) = |w| - |z| \leq |w-z| = |z-w| \end{cases}$$

$$\Rightarrow ||z| - |w|| \leq |z-w|.$$

□

Définition 5. Étant donné un point du plan M de coodonnées cartésiennes (x, y) on appelera affixe de M le nombre complexe $z = x + iy$.

Proposition 8. *Si A et B sont deux points du plan d'affixes a et b alors*

$$d(A, B) = |b - a|.$$

Soient A, B et C trois points du plan. On a alors

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

et l'égalité a lieu si et seulement si le point B est sur le segment reliant A et C.

Proposition 9. *Étant donnés deux points A et B du plan d'affixes a et b, on a l'équivalence entre*

i) M est sur la droite (AB)

ii) l'affixe z de M satisfait $\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b-a}\right) = 0.$

Proposition 10. *Si P est un point du plan d'affixe $w \in \mathbb{C}$ et r un réel positif on a l'équivalence entre*

i) M est sur le cercle de centre P et de rayon r

ii) l'affixe z de M vérifie $|z - w| = r$.

Proposition 11. *Étant donnés un nombre complexe z_0 et un réel positif r, les ensembles*

$$D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < r\}, \qquad \bar{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| \leq r\}$$

sont les disques ouvert (resp. fermé) de rayon r et de centre $(\operatorname{Re}(z_0), \operatorname{Im}(z_0))$.

Proposition 12. *Soit A et B deux points distincts, alors l'ensemble des points équidistants de A et de B est une droite.*

Démonstration. On note a et b les affixes des deux points. Si M_1, M_2 et M_3 sont trois points équidistants de A et de B d'affixes $Z_1,\ z_2,\ z_3$ on a alors

$$\forall i \in [\![1, 3]\!], \qquad |z_i - a| = |z_i - b|.$$

En élevant au les modules au carré on en déduit

$$\forall i \in [\![1, 3]\!], \qquad (z_i - a)(\bar{z}_i - \bar{a}) = (z_i - b)(\bar{z}_i - \bar{b}).$$

En développant les produits et en supprimant les $\bar{z}_i z_i$ présent des deux côtés on arrive à

$$\forall i \in [\![1, 3]\!], \qquad -z_i\bar{a} - \bar{z}_i a + |a|^2 = -z_i\bar{b} - \bar{z}_i b + |b|^2,$$

et donc

$$\forall i \in [\![1, 3]\!], \qquad z_i\overline{b-a} + \overline{z_i}(b-a) = |b|^2 - |a|^2,$$

On a donc

$$\begin{cases} z_1\overline{b-a}+\overline{z_1}(b-a)=|b|^2-|a|^2, \\ z_2\overline{b-a}+\overline{z_2}(b-a)=|b|^2-|a|^2, \\ z_3\overline{b-a}+\overline{z_3}(b-a)=|b|^2-|a|^2 \end{cases}$$

en retranchant la première égalité à la deuxième et à la troisième on obtient

$$\begin{cases} (z_2-z_1)(\overline{b-a})+\overline{z_2-z_1}(b-a)=0, \\ (z_3-z_1)(\overline{b-a})+\overline{z_3-z_1}(b-a)=0, \end{cases}$$

mais on peut en fait reconnaitre

$$\begin{cases} 2\mathrm{Im}\left((z_2-z_1)(\overline{b-a})\right)=0, 2\mathrm{Im}\left((z_3-z_1)(\overline{b-a})\right)=0, \end{cases}$$

on en déduit donc l'existence de deux réels λ et μ tels que

$$(z_2-z_1)=\frac{i\lambda}{\overline{b-a}}, \qquad (z_3-z_1)=\frac{i\mu}{\overline{b-a}},$$

Au final on a

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-1}=\frac{\mu}{\lambda}\in\mathbb{R},$$

ce qui montre grâce à la proposition 9 que M_3, M_2 et M_1 sont alignés. $\square$

Proposition 13. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs représentés par les nombres complexes z et w alors*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{z\bar{w}+\bar{z}w}{2}.$$

4 Topologie et Continuité dans $\mathbb{C}$.

Définition 6. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ et w des nombres complexes. On dit que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers w (ce qu'on notera $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} w$) lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \Rightarrow |z_n - w| \leq \epsilon.$$

Proposition 14. *Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} w$ si et seulement si*

$$\mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathrm{Re}(w), \qquad \mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathrm{Im}(w).$$

Définition 7. On dit qu'un sous ensemble O de $\mathbb{C}$ est un ouvert lorsque pour tout complexe $w \in O$ on peut trouver $r > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |z - w| < r \Rightarrow z \in O.$$

Définition 8. On dit qu'un sous ensemble F de $\mathbb{C}$ est un fermé lorsque quelque soit la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ converge vers un élément w dans $\mathbb{C}$ alors $w \in F$.

Proposition 15. *Pour tout sous ensemble X de $\mathbb{C}$ on a équivalence entre X ouvert et $\mathbb{C} \setminus X$ est fermé.*

Définition 9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction.

- On se donne $w \in \Omega$. On dit que f est continue en w lorsque pour toute suite $(z_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de Ω on a
$$z_n \underset{n\to+\infty}{\to} w \Rightarrow f(z_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(w).$$
- On dit que f est continue sur Ω si elle l'est en chaque point.

Proposition 16. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $w \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. La fonction f est continue en w si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall z \in \Omega, \qquad |z - w| \leq r \Rightarrow |f(z) - f(w)| \leq r.$$

Proposition 17. *La somme, le produit et la composition de fonctions continues sont continues là où elles sont définies.*

Définition 10. On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est borné si il existe un réel R tel que $X \subset D(0, R)$.

Proposition 18. *Soit K un fermé borné non vide de $\mathbb{C}$. On se donne $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de K. Alors il existe $w \in K$ et une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que*

$$z_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} w.$$

Proposition 19. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction continue. Si $K \subset \Omega$ est un fermé borné de $\mathbb{C}$ alors la fonction $z \to |f(z)|$ est bornée et atteint ses bornes.*

5 Dérivabilité dans $\mathbb{C}$.

Définition 11. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

- Soit w un complexe dans Ω. On dit que f est dérivable en w lorsque il existe un nombre D tel que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall z \in \Omega \setminus \{w\}, \qquad |z-w| \leq r \Rightarrow \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - D \right| \leq \epsilon.$$

  On peut montrer que ce complexe D si il existe est unique on le note alors $f'(w)$.
- On dit que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ lorsque f est dérivable en tout point de Ω et que la fonction

$$f' : w \in \Omega \to f'(w) \in \mathbb{C},$$

  est continue sur Ω.

Proposition 20. *La somme le produit et la composition de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sont $\mathcal{C}^1$ là où elles sont définies.*

Définition 12. Une application $\gamma : I \to \mathbb{C}$ (avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) est $\mathcal{C}^1$ lorsque pour tout $t \in I$ la limite suivante existe

$$\gamma'(t) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\gamma(t+\epsilon) - \gamma(t)}{\epsilon},$$

et que la fonction $\gamma' : I \to \mathbb{C}$ est continue.

Proposition 21. *Si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ alors $f \circ \gamma : I \to \mathbb{C}$ est également $\mathcal{C}^1$.*

Théorème 1 (Accroissements Finis). *Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. On se donne $a, b \in I$ et $M > 0$ tels que*

$$\forall t \in [a,b], \qquad |\gamma'(t)| \leq M.$$

Alors on a

$$\forall (s,t) \in [a,b]^2, \qquad |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq M|t-s|.$$

6 Séries Entières.

Définition 13. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle rayon de convergence le réel positif (éventuellement $+\infty$)

$$\sup\{r \geq 0 \ : \ (|a_n| r^n)_{n\geq 0} \text{ est bornée } \}.$$

Proposition 22. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes de rayon de convergence $R > 0$. Alors la formule*

$$f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \tag{5}$$

définit une fonction f continue sur le disque ouvert centré en 0 et de rayon R. Et la série converge normalement sur tout compact du disque ouvert $D(0, R)$.

Proposition 23. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes de rayon de convergence R. Alors la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par*

$$\forall n \geq 0, \qquad b_n = (n+1)a_{n+1},$$

a un rayon de convergence égal au moins à R.

Corollaire 1. *La fonction f définie en (5) est $\mathcal{C}^1$ au sens complexe sur $D(0, R)$ et*

$$\forall z \in D(0, R), \qquad f'(z) = \sum_{n\geq 0} (n+1)a_{n+1} z^n.$$

Corollaire 2. *La fonction f est en fait $\mathcal{C}^\infty$.*

Proposition 24. *On appelle exponentielle la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \exp(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Elle vérifie les propriétés suivantes.

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \qquad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \exp(z) \neq 0, \qquad \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z).$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \exp'(z) = \exp(z).$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}).$$

Proposition 25. *On a la formule d'Euler suivante*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta),$$

il s'agit de l'affixe du point du cercle unité interceptant un arc de longueur orientée (dans le sens trigonométrique) θ depuis le point d'affixe 1.

7 Isométries particulières du plan.

Définition 14. On appelera isométrie du plan toute application du plan dans lui même conservant les distances.

Définition 15. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application $\tau_{\vec{u}}$ du plan dans lui même qui satisfait

$$\forall M, \qquad \tau_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}.$$

Proposition 26. *Si le vecteur $\vec{u}$ est représenté par le complexe w et que P et M sont deux points du plan, on a équivalence entre*

i) $P = \tau_{\vec{u}}(M)$

ii) les affixes p et m de P et M satisfont $p = m + w$.

Définition 16. On appelle rotation de centre C et d'angle θ l'application $R_{C,\theta}$ du plan dans lui même qui à un point M associe $R_{C,\theta}(M)$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CR_{C,\theta}(M)}$ sont de même longueur et font un angle θ.

Proposition 27. *Si C est d'affixe c, θ est un réel quelconque et P et M sont deux points du plan, on a équivalence entre*

i) $P = R_{C,\theta}(M)$

ii) les affixes p et m de P et M satisfont $p = e^{i\theta}(m - c) + c$.

Définition 17. On appelle symétrie de centre C l'application $\mathcal{S}_C$ du plan dans lui même qui à un point M associe le point $\mathcal{S}_C(M)$ tel que

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{C\mathcal{S}_C(M)} = \vec{0}.$$

Proposition 28. *Si C est un point du plan d'affixe c, et P et M deux points du plan, on a équivalence entre*

i) $P = \mathcal{S}_C(M)$

ii) les affixes p et m de P et M satisfont $p = 2c - m$.

Définition 18. Étant donnés deux points distincts du plan A et B on appelle réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D} := (AB)$ l'application $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ qui a un point M associe le point $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(M)$ tel que le milieu de $M\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(M)$ est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Proposition 29. *Si A et B sont deux points du plan d'affixes a et b, alors pour P et M deux points du plan, on a équivalence entre*

i) $P = \mathcal{S}_{(AB)}(M)$

ii) les affixes p et m de P et M satisfont $p = \dfrac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{m} + \dfrac{\bar{b}a - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$.

Démonstration. On doit déterminer p tel que

$$\begin{cases} |p-a| = |m-a|, \\ |p-b| = |m-b| \end{cases}$$

On élève alors au carré et on exprime le module carré comme le produit avec le conjugué pour obtenir

$$\begin{cases} p\bar{p} + a\bar{a} - (\bar{a}p + a\bar{p}) = m\bar{m} + a\bar{a} - (\bar{a}m + a\bar{m}), \\ p\bar{p} + b\bar{b} - (\bar{b}p + b\bar{p}) = m\bar{m} + b\bar{b} - (\bar{b}m + b\bar{m}), \end{cases}$$

Après simplification des termes $a\bar{a}$ et $b\bar{b}$ on a

$$\begin{cases} p\bar{p} - (\bar{a}p + a\bar{p}) = m\bar{m} - (\bar{a}m + a\bar{m}), \\ p\bar{p} - (\bar{b}p + b\bar{p}) = m\bar{m} - (\bar{b}m + b\bar{m}), \end{cases}$$

On va maintenant utiliser la première équation pour exprimer $\bar{p}$ en fonction du reste et remplacer dans la seconde.

$$\begin{cases} \bar{p}(p-a) = m\bar{m} + \bar{a}p - \bar{a}m - a\bar{m}, \\ \bar{p}(p-b) = m\bar{m} + \bar{p}p - \bar{p}m - p\bar{m}, \end{cases}$$

on obtient alors

$$(p-a)(m\bar{m} + \bar{b}p - b\bar{m} - \bar{b}m) = (p-b)(m\bar{m} + \bar{a}p - a\bar{m} - \bar{a}m).$$

En développant on arrive à

$$\bar{b}p^2 + p(m\bar{m} - b\bar{m} - \bar{b}m - a\bar{b}) - a(m\bar{m} - b\bar{m} - \bar{b}m) = \bar{a}p^2 + p(m\bar{m} - a\bar{m} - \bar{a}m - \bar{a}b) - b(m\bar{m} - a\bar{m} - \bar{a}m),$$

puis

$$(\bar{b} - \bar{a})p^2 - p((b-a)\bar{m} + (\bar{b} - \bar{a})m + \bar{b}a - b\bar{a}) + (b-a)m\bar{m} + (\bar{b}a - b\bar{a})m = 0.$$

En factorisant par $(\bar{b} - \bar{a})$ on arrive à

$$(\bar{b} - \bar{a})\left(p^2 - p(\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{m}m + \frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}) + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}m\bar{m} + \frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}m\right) = 0.$$

Les points A et B étant distincts le facteur $(\bar{b} - \bar{a})$ est non nul et on a

$$p^2 - p(\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{m}m + \frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}) + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}m\bar{m} + \frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}m = 0,$$

Mais on peut réécrire le terme gauche en factorisant par $(p-m)$ (ce qui s'explique facilement car $p = m$ est trivialement solution du système de départ)

$$(p-m)\left(p - \frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} - \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{m}\right) = 0$$

et finalement on en déduit bien

$$p = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{m} + \frac{\bar{b}a - b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}.$$

$\square$

8 Classification des isométries du plan et théorème des trois réflexions

Proposition 30. *Étant donnés trois points du plan A, B et C non alignés et trois réels positifs a, b et c, il existe au plus un point M tel que*

$$MA = a, \qquad MB = b, \qquad MC = c.$$

Démonstration. Si on a deux points M et N distincts tels que

$$MA = NA, \quad MB = NB, \quad MC = NC$$

alors A, B et C sont sur la médiatrice de M et N et sont donc alignés d'après la proposition 12 □

Corollaire 3. *La seule isométrie fixant trois points non alignés est l'identité.*

Théorème 2 (des trois réflexions)**.** *Toute isométrie du plan est le produit d'au plus trois réflexions.*

Démonstration. Soient f une isométrie et A, B et C trois points non alignés.

1. On appelle A' l'image de A par f. Supposons que A et A' soient distincts. On appelle alors s_1 la réflexion par rapport à la médiatrice de A et A'. Dans le cas contraire s_1 sera l'identité. On a alors

$$s_1 \circ f(A) = A.$$

2. On appelle maintenant B' l'image de B par $s_1 \circ f$. Supposons que B et B' soient distincts. On appelle alors s_2 la réflexion par rapport à la médiatrice de B et B' autrement s_2 sera l'identité. On a alors clairement

$$s_2 \circ s_1 \circ f(B) = B,$$

De plus comme $s_1 \circ f$ est une isométrie qui fixe A on a

$$AB = AB'$$

et donc A est sur la médiatrice de B et B' et donc est invariant par s_2 on a donc également

$$s_2 \circ s_1 \circ f(A) = A.$$

3. On appelle finalement C' l'image de C par $s_2 \circ s_1 \circ f$. Si C et C' sont distincts on appelle s_3 la réflexion par rapport à la médiatrice de C et C'. On a alors

$$s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ f(C) = C'.$$

De plus $s_2 \circ s_1 \circ f$ est une isométrie qui fixe A et B on a donc

$$AC = AC', \qquad BC = BC',$$

donc A et B sont sur la médiatrice de C et C' et forcément invariant par s_3 on obtient donc aussi

$$s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ f(A) = A, \qquad s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ f(B) = B.$$

Autrement s_3 est l'identité et on a déjà d'après ce qui précède

$$s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ f(A) = A, \qquad s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ f(B) = B, \qquad s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ f(C) = C.$$

4. Au final l'isométrie

$$s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ f,$$

fixe A, B et C comme l'identité (qui est aussi une isométrie), il s'agit donc de l'identité d'après le corollaire 3. Mais comme les réflexions sont leur propres réciproques on obtient alors

$$s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ f = \mathrm{Id} \Rightarrow f = s_1 \circ s_2 \circ s_3,$$

et l'isométrie f est donc le produit d'au plus trois réflexions.

□

En utilisant l'écriture des réflexions vue à la proposition 29 on obtient alors

Corollaire 4. *Toute isométrie du plan a une écriture complexe du type*

$$z \mapsto \theta z + w \qquad \text{où} \qquad z \mapsto \theta \bar{z} + w, \qquad \text{avec} \quad \theta, w \in \mathbb{C} \text{ et } |\theta| = 1.$$

Corollaire 5. *L'ensemble des isométries muni de la composition d'applications est un groupe.*

Remarque 3.
- En pratique si on cherche l'écriture complexe d'une réflexion par rapport à la droite AB où A et B sont d'affixes a et b, on écrirera $s(z) = \alpha \bar{z} + \beta$ et on résoudra

$$\begin{cases} s(a) = a, \\ s(b) = b \end{cases}$$

pour trouver α et β.
- Si on cherche une reflexion envoyant A sur B (d'affixes a et b avec $a \neq b$) on écrit à nouveau $s(z) = \alpha \bar{z} + \beta$ mais cette fois on détermine α et β en résolvant le système

$$\begin{cases} s(a) = b, \\ s\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$