Compléments d'intégration : Séries de Fourier.

Vincent Perrollaz

Table des matières

1 Séries de Taylor **2**

2 Fonctions périodiques **3**

3 Polynômes Trigonométriques **4**

4 Séries de Fourier **5**

5 Théorème de Césaro **7**

6 Théorème de Fejer **8**

7 Espaces Préhilbertiens **11**

8 Identité de Parseval **13**

9 Théorème de Bernstein **15**

10 Régularité des fonctions dérivables au sens complexe. **17**

1 Séries de Taylor

Définition 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est polynômiale losqu'il existe un entier $n \geq 0$ et un $n+1$-uplet $(a_0, ..., a_n)$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Proposition 1. *Soit f une fonction polynômiale, alors si $f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ on a :*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad \textit{et pour} \quad k \geq n+1, \qquad f^{(k)}(0) = 0.$$

Démonstration. Comme f est donné par une somme finie on a $f(0) = a_0$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k,$$

Si par récurrence on a $f^{(p)}(0) = p! a_p$ jusqu'à un certain p on en déduit alors :

$$f^{(p+1)}(0) = \left((f)^{(p)}\right)'(0) = (p+1) a_{p+1} p! = (p+1)! a_{p+1},$$

on en déduit le résultat voulu par récurrence. □

Définition 2. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable, on note $a_n(f) := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Proposition 2. *Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}.$$

Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on a :

$$\forall n \geq 0, \qquad a_n(f) = 0.$$

Remarque 1.
1. On a ainsi un exemple de fonction indéfiniment dérivable dont la série de Taylor $\sum a_n x^n$ converge sur $\mathbb{R}$ mais dont la somme est différente sur $\mathbb{R}^*$.
2. En d'autre terme la fonctionnelle :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to (a_n(f))_{n \geq 0},$$

n'est pas injective.

Lemme 1. *Si P est une fonction polynômiale alors on a :*

$$P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0.$$

Théorème 1 (Borel)**.** *La fonctionnelle qui a une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ associe la suite $(a_n(f))_{n \geq 0}$ est surjective.*

2 Fonctions périodiques

Définition 3. Soit $T > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite T-périodique lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x).$$

Définition 4. Pour $T > 0$ un entier on notera $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π périodiques, et $\mathcal{C}^{pm}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et 2π périodiques.

Remarque 2.

1. Si f est définie sur un intervalle $[0, \alpha[$ et continue par morceaux alors la fonction $\tilde{f}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) := f(x - E(\frac{x}{\alpha})\alpha),$$
(où E désigne la partie entière) est continue par morceaux et α périodique. Elle est égale à f sur l'intervalle de définition de cette dernière.
2. Si f est une fonction T-périodique alors la fonction :
$$x \in \mathbb{R} \mapsto f\left(\frac{Tx}{S}\right),$$
est S périodique. Dans un souci de simplification des formules, on se restreindra dans la suite a des fonctions qui seront 2π périodiques.

Proposition 3. *Si f est une fonction dans $\mathcal{C}^{pm}_{2\pi}$ alors on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Démonstration. Soit x un réel quelconque fixé. On pose $k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ ce qui rappelons le signifie :

$$k \in \mathbb{Z}, \qquad k \leq \frac{x}{2\pi} \leq k+1.$$

On alors également :

$$2k\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi \leq x + 2\pi.$$

En utilisant la relation de Chasle on peut écrire :

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_x^{2(k+1)\pi} f(t)dt + \int_{2(k+1)\pi}^{x+2\pi} f(t)dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = s + 2\pi$ on a alors :

$$\int_{2(k+1)\pi}^{x+2\pi} f(t)dt = \int_{2k\pi}^{x} f(s+2\pi)ds,$$

donc en utilisant la 2π-périodicité de f, $f(s+2\pi) = f(s)$ et on obtient :

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_x^{2(k+1)\pi} f(t)dt + \int_{2k\pi}^{x} f(s)ds = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(t)dt.$$

on peut alors conclure en effectuant le changement de variable $t = 2k\pi + r$ ce qui nous donne :

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(r+2k\pi)dr,$$

mais comme f est 2π-périodique, une récurrence élémentaire montre que $f(r+2k\pi) = f(r)$ quelque soit le réel r on a donc bien :

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(r)dr.$$

□

3 Polynômes Trigonométriques

Définition 5. Soit f une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ on dit que f est un polynôme trigonométrique si il existe un entier $n \geq 0$ et un $(2n+1)$-uplet de nombres complexes $(c_{-n}, c_{-(n-1)}, ..., c_{n-1}, c_n)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}. \tag{1}$$

Remarque 3. L'application $x : e^{ix}$ est 2π périodique donc le second terme de l'égalité ci-dessus l'est également.

Exemple 1. Comme on a les formules d'Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos(x) := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

les fonctions sin et cos sont bien des polynômes trigonométriques.

Proposition 4. *Si f est un polynôme trigonométrique donné par la formule :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

On a la formule suivante pour les coefficients :

$$\forall k \in [\![-n, n]\!], \qquad c_k = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}.$$

Remarque 4. On peut déduire de ces formules qu'une fonction polynôme trigonométrique admet au plus une seule expression de type (1).

Démonstration. Commençons par remarquer que si $p \neq 0$, on a :

$$\left(\frac{e^{ipx}}{ip)}\right)' = e^{ipx}.$$

Ceci implique alors que

$$\int_0^{2\pi} e^{ipx} dx = \left[\frac{e^{ipx}}{ip}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

car la primitive est également 2π-périodique. Comme on a clairement $\int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$ on en conclut alors :

$$\int_0^{2\pi} e^{ipt} \frac{dt}{2\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

On a alors facilement :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{ilt} e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{l=-n}^{n} c_l e^{i(l-k)t} \frac{dt}{2\pi} \\
&= \sum_{l=-n}^{n} c_l \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)t} \frac{dt}{2\pi} \\
&= c_k.
\end{aligned}$$

□

4 Séries de Fourier

Définition 6. Si f est une fonction dans $\mathcal{C}^{pm}_{2\pi}$ on définit les coefficients de Fourier $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f) := \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi}.$$

Définition 7. Étant donnée une fonction f on appelle série de Fourier de f la suite de fonction $(S_n(f))_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

Exemple 2.

1. Si f est la fonction 2π périodique définie sur $[0, 2\pi)$ par :

$$f(x) := x,$$

on a :

$$c_0(f) = 2\pi, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad c_k(f) = \frac{i}{k}.$$

2. Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f') = ikc_k(f).$$

Proposition 5. *Pour $n \geq 0$ on note D_n le noyau de Dirichlet donné par la formule :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_n(x) := \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(x-t)D_n(t)\frac{dt}{2\pi}. \tag{3}$$

Démonstration. Si n est un entier positif et $u \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, on peut effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} e^{iku} &= e^{-inu}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)u} \\
&= e^{-inu}\sum_{l=0}^{2n} e^{ilu} \\
&= e^{-inu}\sum_{l=0}^{2n} (e^{iu})^l \\
&= e^{-inu}\frac{(e^{iu})^{(2n+1)}-1}{e^{iu}-1} \text{ car } e^{iu} \neq 1 \\
&= e^{iu/2}\frac{e^{(2n+1)u/2} - e^{-(2n+1)u/2}}{e^{iu}-1} \\
&= \frac{e^{(2n+1)u/2} - e^{-(2n+1)u/2}}{e^{iu/2} - e^{-iu/2}} \\
&= \frac{\sin((2n+1)u/2)}{\sin(u/2)}.
\end{aligned}$$

Comme les termes à droite et à gauche de l'égalité sont continus, l'identité est vraie pour tout réel u. Soit maintenant $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{pm}$ et n un entier positif, on a alors :

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ik(x-t)} \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) \frac{dt}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième partie de l'identité (3) on effectue le changement de variable $s = x - t$, ceci permet d'obtenir :

$$S_n(f)(x) = \int_x^{x-2\pi} f(x-s) D_n(s) \frac{-ds}{2\pi} = \int_{x-2\pi}^{x} f(x-t) D_n(t) \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

La dernière égalité s'obtenant en utilisant la proposition 3 $\square$

5 Théorème de Césaro

Théorème 2 (Césaro)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Si la suite converge vers une limite z alors on a également*

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} z.$$

Démonstration. Par commodité on notera $U_n := \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1}$. Soit $\epsilon > 0$, la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$ assure l'existence de $N \geq 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - z| \geq \frac{\epsilon}{2},$$

mais alors on peut écrire

$$|U_n - z| = |\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1} - \frac{\sum_{k=0}^{n} z}{n+1}| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} |u_k - z|}{n+1}.$$

Si maintenant on sait que $n \geq N$ on a alors :

$$|U_n - z| \leq \frac{\sum_{k=0}^{N} |u_k - z|}{n+1} + \frac{\sum_{k=N+1}^{n} |u_k - z|}{n+1} \leq \frac{C_N}{n+1} + \frac{n-N}{n+1}\frac{\epsilon}{2},$$

où la notation C_N désigne une quantité positive dépendant de N mais pas de n. On a alors clairement l'existence d'un entier $N_1 \geq N$ tel que pour un indice $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geq N_1 \Rightarrow \frac{C_N}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En combinant les résultats précédents on arrive à

$$n \geq N_1 \Rightarrow |U_n - z| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Comme le choix de ϵ était arbitraire on a bien prouvé

$$U_n \underset{n\to+\infty}{\to} z.$$

□

Remarque 5. On voit que la convergence d'une suite implique la convergence vers la même limite de se moyenne arithmétique. Par contre on peut constater que si $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas et pourtant

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On voit donc que la convergence de la moyenne arithmétique peut être vu comme une **généralisation** de la notion de convergence. On dit que la suite converge au sens de Césaro.

6 Théorème de Fejer

Lemme 2. *Soit n un entier positif on a alors l'identité suivante :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad K_n(s) := \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{iks} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{s}{2})}{\sin(\frac{s}{2})}\right)^2. \tag{4}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
K_n(s) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{iks} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|) e^{iks} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=-l}^{l} e^{iks} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} e^{-ils} \frac{e^{i(2l+1)s} - 1}{e^{is} - 1} \qquad \text{d'après la preuve de (3)} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{\sum_{l=0}^{n} \left(e^{i(l+1)s} - e^{-ils}\right)}{e^{is} - 1} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{e^{is} \sum_{l=0}^{n} (e^{is})^l - \sum_{l=0}^{n} (e^{-is})^l}{e^{is} - 1} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{e^{is} - 1} \left(e^{is} \frac{e^{i(n+1)s} - 1}{e^{is} - 1} - \frac{1 - e^{-i(n+1)s}}{1 - e^{-is}}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{e^{is}}{(e^{is} - 1)^2} \left(e^{i(n+1)s} - 2 + e^{-i(n+1)s}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{(e^{is/2} - e^{-is/2})^2} \left(e^{i(n+1)s/2} - e^{-i(n+1)s/2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)s/2)}{\sin(s/2)}\right)^2.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3. *Soit f une fonction continue et 2π-périodique. Alors pour tout entier $n \geq 1$ on a :*

$$F_n(f)(x) := \frac{\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)}{n+1} = \int_0^{2\pi} K_n(x-t) f(t) \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x-t) \frac{dt}{2\pi}. \tag{5}$$

Démonstration. On écrit directement :

$$\begin{aligned}
F_n(f)(x) &= \frac{\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)}{n+1} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-k}^{k} c_l(f)e^{ilx}}{n+1} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-k}^{k} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ilt}\frac{dt}{2\pi}e^{ilx}}{n+1} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-k}^{k} f(t)e^{ilx}e^{-ilt}}{n+1}\frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{\sum_{l=-k}^{k} e^{il(x-t)}}{n+1}\frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ik(x-t)}\frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)\frac{dt}{2\pi}.
\end{aligned}$$

On peut obtenir l'autre partie de l'identité (5) en posant $s = t - x$ et en procédant comme pour la fin de la preuve de la proposition 5. □

Lemme 4. *Le noyau de Fejer K_n possède les propriétés suivantes :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1, \qquad K_n(t) \geq 0, \tag{6}$$

$$\forall n \geq 1, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\frac{dt}{2\pi} = 1, \tag{7}$$

$$\forall \delta \in]0,\pi[, \qquad \int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t)\frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\frac{dt}{2\pi} \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \tag{8}$$

Démonstration. Il suffit pour prouver (6) de se souvenir que $K_n(s) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)s/2)}{\sin(s/2)}\right)^2$.

Pour montrer (7) on combine simplement $K_n(f)(s) = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{iks}$ avec (2).

Pour démontrer (8) on se contentera de constater que si $\delta \in]0,\pi[$ on a :

$$\forall t \in [-\pi,\pi] \setminus [-\delta,\delta], \qquad 0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\delta/2)},$$

ce qui provient des inégalités :

$$\forall t \in [-\pi,\pi] \setminus [-\delta,\delta], \qquad 0 \leq \sin^2((n+1)t/2) \leq 1, \quad \sin^2(t/2) \geq \sin^2(\delta/2).$$

(Cette dernière estimée se déduit de la parité de $t \mapsto \sin(t/2)$ et de sa croissance sur $[0,\pi]$) □

Théorème 3 (Fejer)**.** *Soit f une fonction continue 2π périodique, alors on convergence uniforme de la suite de fonctions $(F_n(f))_{n\geq 1}$ vers la fonction f. C'est à dire que :*

$$\lim_{n\to+\infty} ||f - F_n(f)||_\infty := \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - F_n(f)(x)| = 0.$$

Démonstration. Soit n un entier positif et x un réel. En utilisant (7) on peut écrire :

$$f(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)\frac{dt}{2\pi}.$$

On en déduit alors :

$$|F_n(f)(x) - f(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(f(x-t) - f(x)) \frac{dt}{2\pi} \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)|f(x-t) - f(t)| \frac{dt}{2\pi}.$$

On introduit alors un paramètre $\delta \in]0, \pi[$ dont on précisera la valeur plus tard. On a alors :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)|f(x-t) - f(t)| \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)|f(x) - f(x-t)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t)|f(x) - f(x-t)| \frac{dt}{2\pi}.$$

(Ici on a noté $[-\delta, \delta]^c := [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$.)

On va majoré chacun des termes de droites par des méthodes différentes. Tout d'abord on constate :

$$\int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t)|f(x) - f(x-t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t) 2||f||_\infty \frac{dt}{2\pi} \leq 2||f||_\infty \int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{2||f||_\infty}{(n+1)\sin^2(\delta)}.$$

Pour gérer l'autre terme on utilise le module de continuité de f.

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)|f(x) - f(x-t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\omega_f(|t|) \frac{dt}{2\pi} \leq \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\omega_f(\delta) \frac{dt}{2\pi} \leq \omega_f(\delta) \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) \frac{dt}{2\pi} \leq \omega_f(\delta).$$

Au final on arrive à :

$$|F_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{(n+1)\sin^2(\delta)}.$$

Et ce quelque soit le choix du paramètre δ dans $]0, \pi[$.

Étant donné un réel strictement positif ϵ, en utilisant la 2π-périodicité et l'uniforme continuité d'une fonction continue sur un segment on obtient l'existence de δ tel que $\omega_f(\delta) \leq \frac{\epsilon}{2}$. En prenant ensuite N assez grand on peut demander que pour $n \geq N$, $\frac{2||f||_\infty}{(n+1)\sin^2(\delta)} \leq \frac{\epsilon}{2}$. En combinant ces deux résultats on obtient :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |F_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

ce qui est exactement l'uniforme convergence de $F_n(f)$ vers f puisque la borne de droite et le choix de N sont indépendants du point x. □

Remarque 6. Une première conséquence du théorème de Fejer est que si la série de Fourier converge ponctuellement en un réel x vers une valeur z alors d'après le théorème de Césaro, on a obligatoirement

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = z = f(x).$$

(car les sommes de Fejer sont les moyennes arithmétiques des sommes partielles de la série de Fourier)

7 Espaces Préhilbertiens

Définition 8. Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $(u,v) \in E \times E \to \langle u|v \rangle \in \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. linéarité en v :
$$\forall (\lambda, u, v_1, v_2) \in \mathbb{C} \times E^3, \qquad \langle u|v_1 + \lambda v_2 \rangle = \langle u|v_1 \rangle + \lambda \langle u|v_2 \rangle.$$
2. anti-symétrie :
$$\forall (u,v) \in E^2, \qquad \langle u|v \rangle = \overline{\langle v|u \rangle}.$$
3. positivité :
$$\forall u \in E, \qquad u \neq 0 \Rightarrow \langle u|u \rangle \in]0, +\infty[.$$

L'espace E muni du produit scalaire $\langle \ | \ \rangle$ est appelé espace pré-hilbertien.

Proposition 6 (Cauchy-Schwarz)**.** *Soit $E, \langle \ | \ \rangle$ un espace pré-hilbertien on a alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*
$$\forall (u,v) \in E^2, \qquad |\langle u|v \rangle|^2 \leq \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle.$$
De plus on a égalité si et seulement si les vecteurs u et v sont liés.

Démonstration. On se donne u et v deux vecteurs de E. On considère alors la fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$P(\lambda) := \langle u + \lambda v | u + \lambda v \rangle.$$
Par positivité du produit scalaire il est clair que $P \geq 0$ mais on peut écrire en utilisant la linéarité du produit scalaire :
$$P(\lambda) = \langle u|u \rangle + \lambda \langle u|v \rangle + \lambda \langle v|u \rangle + \lambda^2 \langle v|v \rangle = \langle u|u \rangle + 2\lambda \mathrm{Re}(\langle u|v \rangle) + \lambda^2 \langle v|v \rangle.$$
On constate alors que P est un polynôme de degrés 2 à coefficient réel qui est toujours positif, son discriminant est donc négatif ce qui se traduit par :
$$(\mathrm{Re}(\langle u|v \rangle))^2 \leq \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle.$$
Cette inégalité est à ce stade démontré pour tout les couples de vecteurs de E, on peut donc substituer $\overline{\langle u|v \rangle} v$ à v pour obtenir :
$$\left(\mathrm{Re}(\overline{\langle u|v \rangle} \langle u|v \rangle) \right)^2 \leq \langle u|u \rangle \langle \overline{\langle u|v \rangle} v | \overline{\langle u|v \rangle} v \rangle,$$
ce qui donne en utilisant la linéarité/anti linéarité du produit scalaire :
$$\left(|\langle u|v \rangle|^2 \right)^2 \leq |\langle u|v \rangle|^2 \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle,$$
on peut alors conclure en divisant par $|\langle u|v \rangle|^2$ le cas où cette quantité est nulle étant trivial. □

Proposition 7. *Soit $E, \langle \ | \ \rangle$ un espace préhilbertien. Alors l'application :*
$$u \in E \mapsto ||u|| := \sqrt{\langle u|u \rangle},$$
est une norme.

Démonstration. On va vérifier les trois propriétés d'une norme pour l'application $|| \cdot ||$.

1. On a clairement $||u|| \geq 0$ quelque soit $u \in E$, et $||u|| = 0$ implique $u = 0$ d'après la positivité du produit scalaire.
2. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $u \in E$ on a $||\alpha u|| = \sqrt{\langle \alpha u | \alpha u \rangle} = \sqrt{\overline{\alpha} \alpha \langle u|u \rangle} = |\alpha| ||u||$. L'application est donc bien homogène.

3. Si u et v sont dans E on a :

$$\begin{aligned}||u+v||^2 = \langle u+v|u+v\rangle &= \langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle + \langle v|v\rangle \\ &= ||u||^2 + 2\mathrm{Re}\langle u|v\rangle + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u||\ ||v|| + ||v||^2 \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq (||u|| + ||v||)^2,\end{aligned}$$

en prenant la racine carré (qui est une fonction croissante sur les réels positifs) on obtient l'inégalité triangulaire.

$\square$

Proposition 8. *L'application définie sur* $\left(\mathcal{C}^0_{2\pi}\right)^2$ *par :*

$$\forall (f,g) \in \left(\mathcal{C}^0_{2\pi}\right)^2, \qquad \langle f|g\rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\frac{dt}{2\pi},$$

est un produit scalaire. On note $||\ ||_2$ *la norme associée.*

Démonstration. On va vérifier les trois propriétés d'un produit scalaire.

1. En utilisant la linéarité de l'intégrale on obtient facilement la linéarité par rapport au second terme de $(f,g) \mapsto \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\frac{dt}{2\pi}$.
2. Pour le caractère anti-symétrique on a juste besoin du calcul suivant. Si u et v sont des fonctions réelles

$$\int_a^b \overline{u(t)+iv(t)}dt = \int_a^b u(t) - iv(t)dt = \int_a^b u(t)dt - i\int_a^b v(t)dt = \overline{\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt} = \overline{\int_a^b u(t)+iv(t)dt},$$

car on peut en déduire :

$$\overline{\langle f|g\rangle} = \overline{\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\frac{dt}{2\pi}} = \int_0^{2\pi} \overline{\overline{f(t)}g(t)}\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \overline{g(t)}f(t)\frac{dt}{2\pi} = \langle g|f\rangle.$$

3. Pour la troisième partie on commence par constater que

$$\langle f|f\rangle = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\frac{dt}{2\pi},$$

où $t \mapsto |f(t)|^2$ est une fonction réelle positive et continue (comme composée de fonctions continues). Or si f n'est pas nulle sur $]0,2\pi[$, on peut trouver $t_0 \in]0,2\pi[$ tel que $|f(t_0)|^2 > 0$. Mais alors par continuité on a un réel $\epsilon > 0$ tel que si $t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ on a $t \in [0,2\pi]$ et $|f(t)|^2 \geq \frac{|f(t_0)|^2}{2}$ on peut donc écrire la minoration :

$$\forall t \in [0,2\pi], \qquad |f(t)|^2 \geq 1_{[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]}(t)\frac{|f(t_0)|^2}{2},$$

qui s'intègre alors en :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\frac{dt}{2\pi} =\geq \frac{\epsilon|f(t_0|^2}{2\pi} > 0,$$

ce qui est absurde. Au final f est une fonction continue 2π-périodique, nulle sur $]0,2\pi[$ elle alors identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

$\square$

Proposition 9. *Si on appelle* e_k *la fonction* $x \mapsto e^{ikx}$ *on constatera facilement que l'on a :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f) = \langle e_k|f\rangle,$$

et delà :

$$\forall n \geq 0, \qquad S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k|f\rangle e_k.$$

Démonstration. Immédiate. $\square$

8 Identité de Parseval

Définition 9. Rappelons que si f est une fonction continue 2π-périodique, on pose

$$||f||_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Proposition 10. *Si f est une fonction dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ on a :*

$$||f||_2 \leq ||f||_\infty.$$

Démonstration. Il suffit de constater

$$||f||_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} ||f||_\infty^2 \frac{dt}{2\pi} = ||f||_\infty^2,$$

puis de prendre la racine carrée de l'inégalité. □

Lemme 5. *Si N est un entier positif on a que pour tout polynôme trigonométrique g de degrés inférieur à N*

$$\langle f - S_N(f)|g\rangle = 0.$$

Démonstration. Commençons par rappeler qu'étant donné (2) on a :

$$\forall k \neq l, \qquad \langle e_k|e_l\rangle = 0, \qquad \text{et par contre } \forall k \langle e_k|e_k\rangle = 1.$$

On peut alors écrire $g = \sum_{k=-N}^N g_k e_k$. On effectue maintenant le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\langle f - S_N(f)|g\rangle &= \langle f - \sum_{l=-N}^N \langle e_l|f\rangle e_l| \sum_{k=-N}^N g_k e_k\rangle \\
&= \langle f| \sum_{k=-N}^N g_k e_k\rangle - \langle \sum_{l=-N}^N \langle e_l|f\rangle e_l| \sum_{k=-N}^N g_k e_k\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^N g_k \langle f|e_k\rangle - \sum_{k,l=-N}^N \overline{\langle e_l|f\rangle} g_k \langle e_l|e_l\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^N g_k \langle f|e_k\rangle - \sum_{l=-N}^N g_l \langle f|e_l\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Lemme 6. *Soit N un entier positif. Quelque soit le polynôme trigonométrique g de degrés inférieur à N on a :*

$$||f - S_N(f)||_2^2 + ||S_N(f) - g||_2^2 = ||f - g||_2^2,$$

ce dont on peut déduire

$$||f - S_N(f)||_2 \leq ||f - g||_2.$$

Démonstration. On écrit tout simplement :

$$||f-g||_2^2 = ||f-S_N(f)+S_n(f)-g||_2^2 = ||f-S_N(f)||_2^2+\langle f-S_N(f)|S_N(f)-g\rangle+\langle S_N(f)-g|f-S_N(f)\rangle+||S_N(f)-g||_2^2,$$

comme $S_N(f) - g$ est un polynôme trigonométrique de degrés plus petit que N le lemme précédent assure maintenant :

$$||f - g||_2^2 = ||f - S_N(f)||_2^2 + ||S_N(f) - g||_2^2 \geq ||f - S_N(f)||_2^2.$$

□

Théorème 4 (Parseval)**.** *Soit f une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ alors on a :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi}.$$

Démonstration. On commence par constater que

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=-N}^{N} \langle f|e_k\rangle\langle e_k|f\rangle = \langle \sum_{k=-N}^{N} \langle e_k|f\rangle e_k| \sum_{l=-N}^{N} \langle e_l|f\rangle e_l\rangle = \langle S_N(f)|S_N(f)\rangle = ||S_N(f)||_2^2.$$

On cherche donc à montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} ||S_N(f)||_2^2 = ||f||_2^2.$$

Comme $S_N(f)$ est un polynôme trigonométrique de degrés inférieur à N, le lemme 6 permet d'écrire

$$||f||_2^2 = ||f - S_N(f) + S_N(f)||_2^2 = ||f - S_N(f)||_2^2 + ||S_N(f)||_2^2,$$

mais comme la somme de Fejer $F_N(f)$ est aussi un polynôme de degrés plus petit que N le lemme 6 en combinaison avec la proposition 10 fournit

$$||f - S_N(f)||_2 \leq ||f - F_N(f)||_2 \leq ||f - F_N(f)||_\infty,$$

et le théorème de Fejer (théorème 3) assure que cette dernière quantité tend vers 0. $\square$

9 Théorème de Bernstein

Définition 10. Pour f dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_h f$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tau_h f(x) := f(x+h).$$

Lemme 7. *Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ alors quelque soit $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(\tau_h f) = e^{ikh} c_k(f).$$

Démonstration. La 2π périodicité de $\tau_h f$ est immédiate. Elle est continue en tant que composition de fonctions continues. Il suffit alors de faire le calcul suivant

$$\begin{aligned} c_k(\tau_h f) &= \int_0^{2\pi} \tau_h f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(t+h) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} f(t+h) e^{-ik(t+h)} e^{ikh} \frac{dt}{2\pi} = e^{ikh} \int_h^{2\pi+h} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= e^{ikh} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} = e^{ikh} c_k(f). \end{aligned}$$

□

Lemme 8. *Soient n un entier strictement positif et $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)$ deux n-uplets de réels positifs on a*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

En posant $b_k = 1$ pour tous les indices et en prenant la racine carrée on obtient en particulier

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

Démonstration. La deuxième inégalité est une conséquence triviale de la première, qu'on va maintenant montrer. On va calculer la différence entre le terme de droite et le terme de gauche.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 &= \sum_{k,l=1}^n a_k^2 b_l^2 - \sum_{k,l=1}^n a_k b_k a_l b_l \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l=1}^n a_k^2 b_l^2 + \sum_{k,l=1}^n a_l^2 b_k^2 \right) - \sum_{k,l=1}^n a_k b_k a_l b_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n a_k^2 b_l^2 + a_l^2 b_k^2 - 2 a_k b_k a_l b_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n (a_k b_l - a_l b_k)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 9. *Si f est une fonction dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ et qu'on définit $\tilde{f}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) = f(-x),$$

alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(\tilde{f}) = -c_{-k}(f).$$

Démonstration. On écrit juste

$$c_k(\tilde{f}) = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(-t))e^{ik(-t)}\frac{dt}{2\pi} = -\int_0^{-2\pi} f(x)e^{ikx}\frac{dx}{2\pi} = -\int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}\frac{dt}{2\pi} = -c_{-k}(f).$$

□

Théorème 5 (Bernstein)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ une fonction lipschitzienne c'est à dire :*

$$\exists K \geq 0, \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}^2, \quad |f(s) - f(t)| \leq K|t - s|,$$

alors on a convergence normale de la série de Fourier de f vers f.

Démonstration. Pour montrer la convergence uniforme de $S_n(f)$ vers f il suffit de montrer la convergence normale de $S_n(f)$ car en utilisant le théorème de Fejer, la limite est forcément f.

On va maintenant se donner $n \geq 0$ et poser $h := \frac{\pi}{2^{n+1}}$, on commence par constater la chose suivante :

$$\forall k \in [\![2^n, 2^{n+1}]\!], \qquad \frac{\pi}{2} \leq kh \leq \pi,$$

et donc $\cos(kh) < 0$ ce qui implique $\cos(kh) - 1 \leq -1$ et donc

$$|e^{ikh} - 1| = \sqrt{(\cos(kh) - 1)^2 + \sin^2(kh)} \geq |\cos(kh) - 1| \geq 1.$$

En combinant ce résultat avec le lemme 7 on a alors

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k(f)| \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |(e^{ikh} - 1)c_k(f)| = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k(\tau_h f - f)|,$$

mais en utilisant le lemme 8 puis l'identité de Parseval, on peut maintenant écrire :

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k(\tau_h f - f)| \leq \sqrt{2^n}\sqrt{\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k(\tau_h f - f)|^2} \leq \sqrt{2^n}||\tau_h f - f||_2.$$

En utilisant la proposition 10 on a au final

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k(f)| \leq \sqrt{2^n}||\tau_h f - f||_\infty,$$

mais la fonction f étant lipschitzienne de constante K on a

$$||\tau_h f - f||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x + h) - f(x)| \leq K|h|,$$

on conclut donc que

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |c_k(f)| \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{2}^{-n}.$$

En utilisant le lemme 9, le résultat précédent et le fait que $x \mapsto f(-x)$ est également lipschitzienne de constante K on a aussi

$$\sum_{k=-2^n}^{-(2^{n+1}-1)} |c_k(f)| \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{2}^{-n}.$$

Comme $\sqrt{2} > 1$ on a que $\sum_{n\geq 0}\sqrt{2}^{-n}$ est bien sommable et donc que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|,$$

est convergente. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^{ix}| = 1$ on a que $||c_k(f)e_k||_\infty = |c_k(f)|$ et on a bien montré la convergence normale de la série de Fourier. □

10 Régularité des fonctions dérivables au sens complexe.

Théorème 6 (Régularité des fonctions $\mathbb{C}$-dérivables)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On se donne $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ alors quelque soit $z_0 \in \Omega$ si on pose*

$$R := \inf_{z \in \Omega^c} |z - z_0|,$$

il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall z \in \Omega, \qquad |z - z_0| < R \Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

On a au passage le fait que la série entière à droite a un rayon de convergence plus grand que R.

Démonstration. Étant donné $z_0 \in \Omega$ et $r < R = \inf_{z \in \Omega^c} |z - z_0|$, il est clair que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad z_0 + re^{i\theta} \in \Omega,$$

ce qui permet de définir :

$$f_r(\theta) := f(z_0 + re^{i\theta}).$$

Par composition il est clair que f étant $\mathcal{C}^1$, f_r est également $\mathcal{C}^1$, elle bien sûr 2π périodique. D'après le théorème des accroissements finis elle est alors Lipschitz et en appliquant Bernstein on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(r) e^{in\theta}, \qquad\qquad \text{(CVN de la série)}$$

où les coefficients $c_n(r)$ sont définis par :

$$c_n(r) := \int_0^{2\pi} f_r(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{9}$$

D'après les théorèmes de dérivation sous l'intégrale on a f étant $\mathcal{C}^1$ et l'intervalle d'intégration étant compact que les fonctions c_n sont dérivables et

$$\begin{aligned}
\forall r \in]0, R[, \qquad c_n'(r) &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta} f'(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \left[\frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{2\pi i r} e^{-in\theta} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{in}{ir} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \frac{n}{r} c_n(r).
\end{aligned}$$

On en déduit alors en résolvant l'équation différentielle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \exists K_n \in \mathbb{R}, \ \forall r \in]0, R[, \qquad c_n(r) = K_n r^n.$$

Mais cela implique alors que si $r_0 \in]0, R[$ on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall r \in]0, R[, \qquad c_n(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^n c_n(r_0).$$

Mais comme f est continue elle est bornée sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r_0 ($\bar{D}(z_0, r_0)$) en utilisant la formule (9) on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall r \in]0, r_0], \qquad |c_n(r)| \leq ||f||_{\bar{D}(z_0, r_0)}.$$

Or pour $n \geq -1$ si $c_n(r_0) \neq 0$ on voit que :

$$|c_n(r)| = \left| \left(\frac{r}{r_0} \right)^n c_n(r_0) \right| \underset{r \to 0^+}{\to} +\infty,$$

ce qui est absurde on en deduit donc

$$\forall n < 0,\ \forall r \in]0, R[, \qquad c_n(r) = 0.$$

On obtient alors finalement que

$$\forall r \in [0, R], \qquad f_n(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n(r_0)}{r_0^n} r^n e^{in\theta},$$

ce qui signifie également

$$\forall z \in \Omega, \qquad |z - z_0| < R,\ \Rightarrow\ f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n(r_0)}{r_0^n} (z - z_0)^n.$$

On a donc bien que f est développable en série entière au voisinage de chaque point et que le rayon de convergence de la série est au moins égal à la distance au bord du domaine. $\square$