Complément d'Intégration

Vincent Perrollaz

7 février 2017

Table des matières

1 Partitions et Sommes de Darboux **2**

2 Intégrale : Définition et premières proprietés **4**

3 Inégalité triangulaire **7**

4 Relation de Chasle **9**

5 Interlude Topologique **11**

6 Continuité et Intégrabilité **12**

7 Convergence des sommes de Riemann **13**

8 Théorème Fondamental du calcul intégro-différentiel **14**

9 Théorèmes de Convergence **15**

10 Intégrales à paramètres **18**

11 Annexe **20**
11.1 Suites réels 20
11.2 Topologie 23

1 Partitions et Sommes de Darboux

Définition 1. Une partition $\mathcal{P}$ d'un intervalle $[a, b]$ est la donnée de $n+1$ nombres $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$. On dira que les nombres t_i sont les extrémités de $\mathcal{P}$.

Définition 2. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux partitions d'un même segment, on dit que $\mathcal{P}$ est plus fine que $\mathcal{Q}$ si toutes les extrémités de $\mathcal{Q}$ sont aussi des extrémités de $\mathcal{P}$.

Définition 3. On appelera $\mathrm{Part}(a, b)$ l'ensemble des partitions du segment $[a, b]$.

Définition 4. A un segment $[a, b]$, une fonction f définie sur ce segment et une partition $\mathcal{P}$ de ce segment on peut associer les quantité

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} f(t)$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} f(t)$$

On les appelle **sommes de Darboux** supérieure et inférieure associées.

Remarque 1. Il est clair qu'on a toujours

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}).$$

Proposition 1. *Si on se donne $\mathcal{P}$ une partition de $[a, b]$, f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ on a*

$$\overline{S}(f + g, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) + \overline{S}(g, \mathcal{P}), \qquad \underline{S}(f + g, \mathcal{P}) \geq \underline{S}(f, \mathcal{P}) + \underline{S}(g, \mathcal{P}).$$

Démonstration. Commençons par écrire $\mathcal{P}$ sous la forme $t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$. On peut alors écrire

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (f(t) + g(t)) \leq \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} f(t) + \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} g(t).$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (f(t) + g(t)) \geq \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} f(t) + \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} g(t).$$

Il suffit alors de multiplier les inégalités par les nombres positifs $(t_i - t_{i-1})$ et de les additionner pour obtenir le résultat. $\square$

Proposition 2. *On considère $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ une partition du segment et f une fonction définie sur $[a, b]$. On se donne α un réel alors*

$$\alpha \geq 0 \Rightarrow \overline{S}(\alpha f, \mathcal{P}) = \alpha \overline{S}(f, \mathcal{P}),\ \underline{S}(\alpha f, \mathcal{P}) = \alpha \underline{S}(f, \mathcal{P}),$$

$$\alpha \leq 0 \Rightarrow \overline{S}(\alpha f, \mathcal{P}) = \alpha \underline{S}(f, \mathcal{P}),\ \underline{S}(\alpha f, \mathcal{P}) = \alpha \overline{S}(f, \mathcal{P}).$$

Démonstration. On raisonne comme pour la démonstration précédente mais en utilisant les inégalités

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (\alpha f(t)) = \alpha \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (f(t)) \text{ et } \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (\alpha f(t)) = \alpha \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (f(t))$$

si α est positif. Pour α négatif on utilisera par contre les inégalités

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (\alpha f(t)) = \alpha \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (f(t)) \text{ et } \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (\alpha f(t)) = \alpha \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} (f(t))$$

$\square$

Proposition 3. *Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux partitions d'un même intervalle $[a,b]$ sur lequel on a une fonction f à valeur réelle et que $\mathcal{P}$ est plus fine que $\mathcal{Q}$ alors*

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Q}), \qquad \underline{S}(f,\mathcal{P}) \geq \underline{S}(f,\mathcal{Q}).$$

Démonstration. Le résultat se démontre en deux étapes.

1. On va commencer par démontrer le résultat lorsque $\mathcal{P}$ admet une seule extrémité de plus que $\mathcal{Q}$. La partition $\mathcal{Q}$ est alors la donnée de $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n$ tandis que $\mathcal{P}$ est la donnée de $t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1}$. Le fait que $\mathcal{P}$ soit plus fine que $\mathcal{Q}$ signifie alors qu'il existe un entier $p \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\forall i \in [\![0,p-1]\!], \quad t_i = x_i, \qquad \forall j \in [\![p+1,n+1]\!], \quad x_{i-1} = t_i.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\mathcal{Q}) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \left[(x_p - x_{p-1}) \sup_{x\in[x_{p-1},x_p]} f(x)\right] + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) + \left[(t_{p+1} - t_{p-1}) \sup_{t\in[t_{p-1},t_{p+1}]} f(t)\right] + \sum_{i=p+2}^{n+1} (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) + \left[(t_p - t_{p-1}) \sup_{t\in[t_{p-1},t_{p+1}]} f(t) + (t_{p+1} - t_p) \sup_{t\in[t_{p-1},t_{p+1}]} f(t)\right] \\
&\qquad + \sum_{i=p+2}^{n+1} (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) \\
&\geq \sum_{i=1}^{p-1} (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) + \left[(t_p - t_{p-1}) \sup_{t\in[t_{p-1},t_p]} f(t) + (t_{p+1} - t_p) \sup_{t\in[t_p,t_{p+1}]} f(t)\right] \\
&\qquad + \sum_{i=p+2}^{n+1} (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) \\
&= \overline{S}(f,\mathcal{P}).
\end{aligned}$$

Comme $\underline{S}(f,\mathcal{P}) = -\overline{S}(-f,\mathcal{P})$ et $\underline{S}(f,\mathcal{Q}) = -\overline{S}(-f,\mathcal{Q})$ on en déduit alors

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \geq \underline{S}(f,\mathcal{Q}).$$

2. Le résultat général se déduit alors de ce cas particulier de la façon suivante si $\mathcal{Q}$ a n extrémités et $\mathcal{P}$ en a $n+m$ on peut introduire des partitions $\mathcal{R}_1,...,\mathcal{R}_{m-1}$ telles que $\mathcal{R}_i$ a $n+i$ extrémités, $\mathcal{R}_1$ est plus fine que $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}_{i+1}$ est plus fine que $\mathcal{R}_i$ et finalement $\mathcal{P}$ est plus fine que $\mathcal{R}_{m-1}$ (il suffit d'ajouter les extrémités de $\mathcal{P}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{Q}$ une par une). En appliquant le cas particulier précédent on a alors

$$\overline{S}(f,\mathcal{Q}) \geq \overline{S}(f,\mathcal{R}_1) \geq \overline{S}(f,\mathcal{R}_2) \geq ... \geq \overline{S}(f,\mathcal{R}_{m-1}) \geq \overline{S}(f,\mathcal{P}).$$

Et de la même façon

$$\underline{S}(f,\mathcal{Q}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{R}_1) \leq \underline{S}(f,\mathcal{R}_2) \leq ... \leq \underline{S}(f,\mathcal{R}_{m-1}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}).$$

$\square$

2 Intégrale : Définition et premières proprietés

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$. On dit que f est intégrable lorsque

$$\sup_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(a,b)} \underline{S}(f,\mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(a,b)} \overline{S}(f,\mathcal{P}).$$

On note alors la quantité commune

$$\int_a^b f(x)dx$$

et on l'appelle l'intégrale de f entre a et b.

Remarque 2. On peut voir que pour une fonction f constante ($f(x) = k$) on a

$$\forall \mathcal{P} \in \mathrm{Part}(a,b), \qquad \overline{S}(f,\mathcal{P}) = k(b-a) = \underline{S}(f,\mathcal{P}),$$

elle donc intégrable et

$$\int_a^b kdt = k(b-a).$$

Proposition 4. *1. Si f est intégrable et positive sur $[a,b]$ alors :*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2. Si f_1 et f_2 sont intégrables sur un segment $[a,b]$ alors f_1+f_2 est intégrable sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b (f_1+f_2)(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

3. Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si α est un réel quelconque alors αf est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. 1. La première proriété est évidente car si f est positif on voit trivialement que

$$\forall \mathcal{P} \in \mathrm{Part}(a,b), \qquad \underline{S}(f,\mathcal{P}) \geq 0.$$

2. Pour le seconde propriété on procède de la façon suivante. On commence par définir

$$m = \sup_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(a,b)} \underline{S}(f+g,\mathcal{P}), \qquad M = \inf_{\mathcal{Q}\in \mathrm{Part}(a,b)} \overline{S}(f+g,\mathcal{Q}).$$

On sait déjà que $m \leq M$ et notre objectif est donc de montrer que $m \geq M$. Pour ce faire on se donne $\epsilon > 0$. Les fonctions f et$g$ étant intégrables on peut se donner 4 partitions de $[a,b]$ $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_3,\ \mathcal{P}_4$ satisfaisant :

$$\int_a^b f(t)dt - \underline{S}(f,\mathcal{P}_1) \leq \epsilon, \qquad \overline{S}(f,\mathcal{P}_2) - \int_a^b f(t)dt \leq \epsilon,$$

$$\int_a^b g(t)dt - \underline{S}(g,\mathcal{P}_3) \leq \epsilon, \qquad \overline{S}(g,\mathcal{P}_4) - \int_a^b g(t)dt \leq \epsilon.$$

On peut maintenant appeler $\mathcal{P}$ la partition de $[a,b]$ dont les extrémités sont la réunion des extrémités de $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2,\ \mathcal{P}_3,\ \mathcal{P}_4$. Elle est par construction plus fine que chacune d'elle et en utilisant la propriété 3 on obtient alors

$$\int_a^b f(t)dt - \underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \epsilon, \qquad \overline{S}(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f(t)dt \leq \epsilon,$$

$$\int_a^b g(t)dt - \underline{S}(g,\mathcal{P}) \leq \epsilon, \qquad \overline{S}(g,\mathcal{P}) - \int_a^b g(t)dt \leq \epsilon.$$

En additionant les inégalités par colonne on obtient alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt - (\underline{S}(f,\mathcal{P}) + \underline{S}(g,\mathcal{P})) \leq 2\epsilon, \qquad \overline{S}(f,\mathcal{P}) + \overline{S}(g,\mathcal{P}) - (\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt) \leq 2\epsilon.$$

On utilise maintenant la propriété 1 pour obtenir

$$\underline{S}(f+g,\mathcal{P}) \geq \underline{S}(f,\mathcal{P}) + \underline{S}(g,\mathcal{P}) \geq \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt - 2\epsilon,$$

$$\overline{S}(f+g,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}) + \overline{S}(g,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt + 2\epsilon.$$

Or par construction on a

$$M \leq \overline{S}(f+g,\mathcal{P}) \text{ et } \underline{S}(f+g,\mathcal{P}) \leq m,$$

ce qui donne donc

$$m \geq \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt - 2\epsilon,$$

$$M \leq \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt + 2\epsilon.$$

Mais comme ϵ était un nombre positif quelconque on en déduit

$$m \geq \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \geq M,$$

on conclut alors bien $m = M = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ ce qui donne à la fois l'intégrabilité de $f+g$ et l'additivité de l'intégrale.

3. Pour démontrer la dernière propriété on va commencer par poser

$$m := \sup_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(a,b)} (\underline{S}(\alpha f,\mathcal{P})), \qquad M := \inf_{\mathcal{Q}\in \mathrm{Part}(a,b)} (\overline{S}(\alpha f,\mathcal{P})).$$

On sait d'ors et déjà que $m \leq M$.

Comme la fonction f est intégrable, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver par construction deux partitions $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ telles que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_1) - \epsilon \leq \int_a^b f(t)dt \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}_2) + \epsilon.$$

Si $\mathcal{P}$ est la partition dont les extrémités sont la réunion des extrémités de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, elle est plus fine que chacune des deux et en utilisant la proposition 3 on obtient

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \epsilon \leq \int_a^b f(t)dt \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}) + \epsilon.$$

Si on multiplie l'inégalité précédente par α et qu'on utilise la proposition 2 on obtient (pour α positif ou négatif)

$$M - \alpha\epsilon \leq \overline{S}(\alpha f,\mathcal{P}) - \alpha\epsilon \leq \alpha \int_a^b f(t)dt \leq \underline{S}(\alpha f,\mathcal{P}) + \alpha\epsilon \leq m + \alpha\epsilon.$$

Comme ϵ est un nombre positif quelconque on obtient en faisant $\epsilon \to 0$

$$M \leq \alpha \int_a^b f(t)dt \leq m,$$

comme on avait dit que $m \leq M$ on obtient finalement bien

$$m = \alpha \int_a^b f(t)dt = M,$$

ce qui donne bien l'intégrabilité de αf et l'homogénéité de l'intégrale.

$\square$

3 Inégalité triangulaire

Proposition 5. *Si f est une fonction intégrable sur un segment $[a,b]$, alors la fonction $t \mapsto |f(t)|$ est intégrable et on a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Démonstration. On va procéder en deux étapes.

1. Commençons par montrer l'intégrabilité de $t \mapsto |f(t)|$. Pour ce faire on introduit les quantités

$$m := \sup_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(a,b)} \underline{S}(|f|,\mathcal{P}), \qquad M := \inf_{\mathcal{Q}\in \mathrm{Part}(a,b)} \overline{S}(|f|,\mathcal{Q}).$$

Comme f est intégrable on a deux partitions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ telles que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}_1) + \epsilon \geq \int_a^b f(t)dt \geq \overline{S}(f,\mathcal{P}_2) - \epsilon.$$

Si on considère $\mathcal{P}$ la partition dont les extrémités sont la réunion des extrémités de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, elle est plus fine que chacune des deux partitions et on a donc en utilisant la proposition 3

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) + \epsilon \geq \int_a^b f(t)dt \geq \overline{S}(f,\mathcal{P}) - \epsilon.$$

On appelera $t_0 < t_1 < ... < t_n$ les extrémités de $\mathcal{P}$ ce qui permet d'écrire

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t), \qquad \overline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t).$$

On a donc également

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})(\sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) - \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t)) = \overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq 2\epsilon. \tag{1}$$

Mais quelque soit l'indice i on peut trouver deux réels $\zeta_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tels que

$$\sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} |f(t)| \leq |f(\zeta_i)| + \frac{\epsilon}{2n}, \qquad \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} |f(t)| \geq |f(\eta_i)| - \frac{\epsilon}{2n}.$$

On a en faisant la différence des deux inégalités

$$\sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} |f(t)| - \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} |f(t)| \leq |f(\zeta_i)| - |f(\eta_i)| + \frac{\epsilon}{n} \leq |f(\zeta_i) - f(\eta_i)| + \frac{\epsilon}{n} \leq \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) - \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) + \frac{\epsilon}{n}.$$

En combinant ces inégalités avec (1) on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\overline{S}(|f|,\mathcal{P}) - \underline{S}(|f|,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})(\sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} |f(t)| - \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} |f(t)|) \\
&\leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})(\sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) - \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) + \frac{\epsilon}{n}) \\
&\leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})(\sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) - \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t)) + \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\frac{\epsilon}{n} \\
&\leq \overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) + (b-a)\epsilon \\
&\leq (2 + b - a)\epsilon.
\end{aligned}$$

Mais d'après les définitions de m et M on a

$$M - m \leq \overline{S}(|f|, \mathcal{P}) - \underline{S}(|f|, \mathcal{P}) \leq (2 + b - a)\epsilon,$$

et comme ϵ un réel positif quelconque on peut prendre la limite $\epsilon \to 0$ dans cette dernière inégalité ce qui donne $M \leq m$. Comme dans tous les cas on a $m \leq M$ on a bien $m = M$ c'est à dire que $t \mapsto |f(t)|$ est bien intégrable.

2. On va maintenant montrer l'inégalité à proprement parlé. On sait

$$\forall t \in [a, b], \qquad |f(t)| - f(t) \geq 0, \text{ et } |f(t)| + f(t) \geq 0.$$

D'après ce qui précède et la proposition 4 on peut alors écrire

$$\int_a^b |f(t)| - f(t) dt \geq 0, \qquad \int_a^b |f(t)| + f(t) dt \geq 0,$$

ce qui implique

$$-\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt,$$

ce qui implique bien

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

□

4 Relation de Chasle

Proposition 6 (Chasle)**.** *Soit $[a,c]$ un segment et f une fonction définie sur ce segment, alors quelque soit $b \in [a,c]$, on a équivalence entre*

- *f est intégrable sur $[a,b]$ et $[b,c]$,*
- *f est intégrable sur $[a,c]$,*

et on a alors

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{2}$$

Démonstration. On va procéder en deux étapes.

1. Supposons que l'on sache que f est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$. On commence par définir

$$m := \sup_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(a,c)} \underline{S}(f,\mathcal{P}), \qquad M := \inf_{\mathcal{Q}\in \mathrm{Part}(a,c)} \overline{S}(f,\mathcal{Q}).$$

La fonction f étant intégrable sur $[a,b]$ on peut obtenir deux partitions $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2 \in \mathrm{Part}(a,b)$ telles que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_1) - \epsilon \le \int_a^b f(t)dt \le \underline{S}(f,\mathcal{P}_2) + \epsilon,$$

puis en appelant $\mathcal{P}_g$ la partition dont les extrémités sont la réunion des extrémités de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ on a grâce à la proposition 3

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_g) - \epsilon \le \int_a^b f(t)dt \le \underline{S}(f,\mathcal{P}_g) + \epsilon. \tag{3}$$

En raisonnant de la même façon on peut obtenir une partition $\mathcal{P}_d \in \mathrm{Part}(b,c)$ telle que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_d) - \epsilon \le \int_b^c f(t)dt \le \underline{S}(f,\mathcal{P}_d) + \epsilon. \tag{4}$$

Si on appelle $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ les extrémités de $\mathcal{P}_g$ et $b = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = c$ les extrémités de $\mathcal{P}_d$ on voit que $a = t_0 < \ldots < t_n = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = c$ constituent une partition de $[a,c]$ qu'on appelera $\mathcal{P}$ et que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) = \overline{S}(f,\mathcal{P}_g) + \overline{S}(f,\mathcal{P}_d), \qquad \underline{S}(f,\mathcal{P}) = \underline{S}(f,\mathcal{P}_g) + \underline{S}(f,\mathcal{P}_d).$$

En combinant ces dernières inégalités avec (3) et (4) on obtient alors

$$\begin{aligned} M - 2\epsilon \le \overline{S}(f,\mathcal{P}) - 2\epsilon = \overline{S}(f,\mathcal{P}_g) + \overline{S}(f,\mathcal{P}_d) - 2\epsilon \\ \le \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt \\ \le \underline{S}(f,\mathcal{P}_g) + \underline{S}(f,\mathcal{P}_d) + 2\epsilon = \underline{S}(f,\mathcal{P}) + 2\epsilon \le m + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Comme ϵ est un réel positif quelconque on peut faire $\epsilon \to 0$ et obtenir

$$M \le \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt \le m,$$

puis comme on sait qu'on a toujours $m \le M$ on obtient

$$m = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = M,$$

ce qui fournit l'intégrabilité sur $[a,c]$ et la relation de Chasles voulue.

2. On va montrer ici que si f est intégrable sur $[a,c]$ elle l'est aussi sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$ ce qui suffira pour avoir en plus Chasles d'après ce qui précède. On va commencer par définir

$$m_g := \sup_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(a,b)} \underline{S}(f,\mathcal{P}), \qquad M_g := \inf_{\mathcal{Q}\in \mathrm{Part}(a,b)} \overline{S}(f,\mathcal{Q}),$$

$$m_d := \sup_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(b,c)} \underline{S}(f,\mathcal{P}), \qquad M_d := \inf_{\mathcal{Q}\in \mathrm{Part}(b,c)} \overline{S}(f,\mathcal{Q}).$$

On sait déjà que $m_g \leq M_g$ et $m_d \leq M_d$ il nous suffit donc de montrer $m_g \geq M_g$ et $m_d \geq M_d$ mais ceci peut revient à

$$m_g + m_d \geq M_g + M_d.$$

Comme f est intégrable sur $[a,c]$ on a deux partitions $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2 \in \mathrm{Part}(a,c)$ telles que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_1) - \epsilon \leq \int_a^c f(t)dt \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}_2) + \epsilon.$$

Si on appelle $\mathcal{P}_3$ la partition dont les extrémités sont la réunion des extrémités de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ elle est plus fine que chacune des deux et en utilisant la proposition 3 on obtient

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_3) - \epsilon \leq \int_a^c f(t)dt \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}_3) + \epsilon.$$

On peut alors rajouter le point b comme extrémité de $\mathcal{P}_3$ et on appellera $\mathcal{P}$ la partition ainsi obtenue. On a bien sûr encore

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \epsilon \leq \int_a^c f(t)dt \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}) + \epsilon.$$

On appelera $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = c$ les extrémités de $\mathcal{P}$. On sait alors par construction qu'il existe un indice $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $b = t_p$. On voit alors que $t_0 < ... < t_p$ et $t_p < ... < t_n$ sont des partitions de $[a,b]$ et $[b,c]$ qu'on appelera $\mathcal{P}_g$ et $\mathcal{P}_d$. De plus on a

$$M_g + M_d - \epsilon \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}_g) + \overline{S}(f,\mathcal{P}_d) - \epsilon = \overline{S}(f,\mathcal{P}) - \epsilon \leq \underline{S}(f,\mathcal{P}) + \epsilon = \underline{S}(f,\mathcal{P}_g) + \underline{S}(f,\mathcal{P}_d) + \epsilon \leq m_g + m_d + \epsilon.$$

Mais ce raisonnement étant valable pour tout $\epsilon > 0$ on peut faire $\epsilon \to 0$ dans l'inégalité finale et donc

$$M_g + M_d \leq m_g + m_d,$$

ce qui est bien ce dont on avait besoin pour conclure.

□

Remarque 3. En utilisant une récurrence on montre facilement que si on a $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ on a

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt.$$

5 Interlude Topologique

Définition 6 (Rappel)**.** Une fonction f continue en un point p si on a :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - p| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(p)| \leq \epsilon.$$

Proposition 7 (Heine)**.** *Si f est une fonction continue en tout point d'un segment $[a, b]$ alors elle est uniformément continue, i.e.*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Démonstration. Supposons le résultat faux. Cela signifie :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y),\ |x - y| \leq \eta,\ |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

En choisissant $\eta = \frac{1}{n}$ pour les $n \geq 1$, on récupère des points x_n et y_n dans $[a, b]$ tels que :

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon > 0,\ \forall n \geq 1.$$

On peut utiliser la proprieté de Bolzano-Weierstrass pour la suite x_n et obtenir une extraction ϕ et un point $p \in [a, b]$ tel que :

$$x_{\phi(n)} \underset{n \to +\infty}{\to} p.$$

Mais les y_n étant à distance $\frac{1}{n}$ de x_n il est clair qu'on a aussi :

$$y_{\phi(n)} \underset{n \to +\infty}{\to} p.$$

La continuité de f en p assure alors que :

$$\epsilon < |f(y_{\phi(n)}) - f(x_{\phi(n)})| \underset{n \to +\infty}{\to} |f(p) - f(p)| = 0,$$

ce qui est absurde. □

Définition 7. On appelle module de continuité de f sur le segment $[a, b]$ la fonction ω définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\ :\ x, y \in [a, b]^2,\ |x - y| \leq \delta\}.$$

Remarque 4.

- On notera que la propriété d'uniforme continuité peut se reformuler :

$$\omega_f(\delta) \underset{\delta \to 0^+}{\to} 0.$$

- L'intérêt du module de continuité tient à ce qu'on peut écrire :

$$\forall x, y \in [a, b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|).$$

  Il s'agit en fait de la plus petite fonction permettant d'avoir cette inégalité.

On trouvera en annexe une démonstration alternative du théorème de Heine en utilisant une proprieté alternative à Bolzano-Weirstrass.

6 Continuité et Intégrabilité

Proposition 8. *Une fonction définie sur un segment $[a,b]$ et continue en tout point de ce segment est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. On pose

$$m := \sup_{\mathcal{P}\in \mathrm{Part}(a,b)} \underline{S}(f,\mathcal{P}), \qquad M := \inf_{\mathcal{Q}\in \mathrm{Part}(a,b)} \overline{S}(f,\mathcal{Q}).$$

Soit n un entier strictement positif. On appelle $\mathcal{P}_n$ la partition composée des extrémités $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ données par la formule

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \qquad t_i = a + \frac{i(b-a)}{n}.$$

On a alors

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}_n) \leq m \leq M \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}_n),$$

et donc

$$0 \leq M - m \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}_n) - \underline{S}(f,\mathcal{P}_n).$$

Mais on peut écrire

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_n) - \underline{S}(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \left(\sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) - \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) \right). \tag{5}$$

Mais on voit d'après la formule des t_i que $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. De plus comme f est continue elle atteint sont sup et son inf sur tout segment.

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \exists (x_i,y_i) \in [t_{i-1},t_i]^2, \qquad f(x_i) = \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t), \qquad f(y_i) = \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t).$$

Mais on voit alors

$$(x_i,y_i) \in [t_{i-1},t_i]^2 \Rightarrow |x_i - y_i| \leq t_i - t_{i-1} \leq \frac{b-a}{n}.$$

On peut maintenant reprendre (5) pour obtenir.

$$0 \leq M - m \leq \overline{S}(f,\mathcal{P}_n) - \underline{S}(f,\mathcal{P}_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}(f(y_i) - f(x_i)) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega_f(|x_i - y_i|) \leq (b-a)\omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Et donc pour $n \to +\infty$ on a bien le terme de droite qui tend vers 0 d'où on peut conclure

$$M = m.$$

□

7 Convergence des sommes de Riemann

Définition 8. Si $\mathcal{P}$ (qu'on notera $t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$) est une partition d'un segment $[a,b]$ on appelle taille de la partition la quantité
$$\delta(\mathcal{P}) := \max_{i \in [\![1,n]\!]}(t_i - t_{i-1}).$$

Théorème 1. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur ce segment. Quelque soit la partition $\mathcal{P}$ (notée $t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$) si on se donne des nombres $\zeta_1, ..., \zeta_n$ satisfaisant*
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad t_{i-1} \leq \zeta_i \leq t_i,$$
on a
$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\zeta_i)\right| \leq (b-a)\omega_f(\delta(\mathcal{P})).$$
En particulier on voit que l'on a convergence des sommes vers l'intégrale lorsque la taille de la partition tend vers 0.

Démonstration. On a le calcul suivant
$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\zeta_i)\right| &= \left|\int_{t_0}^{t_n} f(t)dt - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\zeta_i)dt\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t) - f(\zeta_i))dt\right| && \text{grâce à la remarque 3} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t) - f(\zeta_i))dt\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t) - f(\zeta_i)|dt && \text{grâce à la proposition 5}
\end{aligned}$$
mais comme $|f(t) - f(\zeta_i)| \leq \omega_f(|t - \zeta_i|) \leq \omega_f(|t_i - t_{i-1}|) \leq \omega_f(\delta(\mathcal{P}))$
$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_f(\delta(\mathcal{P}))dt \\
&\leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\omega_f(\delta(\mathcal{P})) \\
&\leq \omega_f(\delta(\mathcal{P})) \sum_{i=1}^n t_i - t_{i-1} \\
&\leq (b-a)\omega_f(\delta(\mathcal{P})) && .
\end{aligned}$$
□

8 Théorème Fondamental du calcul intégro-différentiel

Définition 9. 1. Une fonction f défini sur un segment $[a, b]$ est dérivable en tout point si la quantité :

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

existe pour tout $x \in [a, b]$.

2. Une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ lorsqu'elle dérivable en tout point de $[a, b]$ et que la fonction $x \mapsto f'(x)$ est continue sur $[a, b]$.

Théorème 2. *Si g est une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors quelque soit le point c de $[a, b]$ la fonction G définie sur $[a, b]$ par*

$$G(x) = \int_c^x g(t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in (a, b), \qquad G'(x) = g(x).$$

Démonstration. Étant donné un réel h on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - g(x) &= \frac{\int_c^{x+h} g(t)dt - \int_c^x g(t)dt - hg(x)}{h} \\
&= \frac{\int_x^{x+h} g(t)dt + \int_c^x g(t)dt - \int_c^x g(t)dt - \int_x^{x+h} g(x)dt}{h} \qquad \text{grâce à la relation de Chasles} \\
&= \frac{\int_x^{x+h} (g(t) - g(x))dt}{h}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on a alors :

$$\left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - g(x) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |g(t) - g(x)| dt.$$

Puis comme t est entre x et $x + h$ on a $|t - x| \leq |h|$ et donc $|g(t) - g(x)| \leq \omega_g(|h|)$ d'où

$$\left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - g(x) \right| \leq \omega_g(|h|) \underset{h \to 0}{\to} 0.$$

G est donc dérivable de dérivée g, qui est continue donc G est $\mathcal{C}^1$. □

Théorème 3. *Si une fonction f définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. On a alors*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration. On introduit la fonction F via

$$F(x) := \int_a^x f'(t)dt.$$

D'après le théorème 2 on a alors que F est $\mathcal{C}^1$ et que $F' = f'$. Comme $F(a) = 0$ on en déduit que la fonction

$$x \mapsto F(x) - f(x) + f(a),$$

est de dérivée nulle, donc constante, et vaut 0 en a. Au final

$$\forall x \in [a, b], \qquad F(x) = f(x) - f(a).$$

□

9 Théorèmes de Convergence

Définition 10. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. On considère $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions de I à valeurs réelles. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction f vers I lorsque

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \qquad n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Remarque 5. On peut reformuler la définition précédente en définissant pour une fonction $F : I \to \mathbb{R}$

$$||f||_\infty := \sup_{t\in I} |f(t)|.$$

La convergence uniforme a alors lieu si et seulement si la suite numérique $(||f_n - f||_\infty)_{n\geq 0}$ tend vers 0.

Lemme 1. *Soit J un segment. Soit $f : J \to \mathbb{R}$, alors on a*

$$\sup_J f - \inf_J f = \sup\{f(x) - f(y) \ : \ (x, y) \in J\}.$$

Démonstration. On va procéder par double inégalité.

Pour prouver $\geq$ il suffit de constater que

$$\forall (x, y) \in J^2, \qquad f(x) \leq \sup_J f, \quad f(x) \geq \inf_J f,$$

ce qui implique

$$f(x) - f(y) \leq \sup_J f - \inf_J f,$$

on conclut alors en utilisant que le sup est le plus petit des majorants.

Pour prouver l'inégalité réciproque on utilise les propriétés du sup et de l'inf pour obtenir deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ de J telles que

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \sup_J f, \qquad f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f,$$

or on a aussi

$$\forall n \geq 0, \qquad f(x_n) - f(y_n) \leq \sup\{f(x) - f(y) \ : \ (x, y) \in J\},$$

d'où l'inégalité recherchée en passant à la limite. $\square$

Théorème 4. *Soit $I = [a, b]$ un segment de R. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions définies sur I. Si on suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f et que les fonctions de la suite sont toutes intégrables, on peut conclure que f est intégrable et que*

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. On commence par définir les quantités

$$\underline{S} := \inf_{P\in \mathrm{Part}([a,b])} \underline{S}(f, P), \qquad \overline{S} := \sup_{P\in \mathrm{Part}([a,b])} \overline{S}(f, P).$$

Pour démontrer que f est intégrable, on doit montrer que $\underline{S} \geq \overline{S}$. Soit $\epsilon > 0$. Par la convergence uniforme on peut trouver un entier N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a, b], \qquad n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

Or par hypothèse la fonction f_N est intégrable, il existe donc une partition $P_\epsilon : a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b$ de $[a, b]$ telle que

$$\overline{S}(f_N, P_\epsilon) - \underline{S}(f_N, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Si on note alors

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \qquad J_k := [t_{k-1}, t_k],$$

on a alors

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in J_k, \qquad f(x) - f(y) &\leq |f(x) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{4(b-a)} + |f_N(x) - f_N(y)|\end{aligned}$$

or comme on sait

$$f_N(x) - f_N(y) \leq \sup\{f_N(t) - f_N(s) \ : \ (t,s) \in J_k^2\}, \qquad f_N(y) - f_N(x) \leq \sup\{f_N(t) - f_N(s) \ : \ (t,s) \in J_k^2\}.$$

on peut conclure

$$\forall (x,y) \in J_k, \qquad f(x) - f(y) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} + \sup\{f_N(t) - f_N(s) \ : \ (t,s) \in J_k^2\}.$$

Et on peut donc en déduire grâce au lemme 1

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \qquad \sup_{J_k} f - \inf_{J_k} f \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} + \sup_{J_k} f_N - \inf_{J_k} f_N.$$

On peut maintenant combiner ces estimations pour obtenir

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) &= \sum_{k=1}^{p} (t_k - t_{k-1})(\sup_{J_k} f - \inf_{J_k} f) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} (t_k - t_{k-1})(\frac{\epsilon}{2(b-a)} + \sup_{J_k} f_N - \inf_{J_k} f_N) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{p} t_k - t_{k-1} + \overline{S}(f_N, P_\epsilon) - \underline{S}(f_N, P_\epsilon) \\ &\leq \frac{\epsilon(b-a)}{2(b-a)} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

Or on a toujours

$$\overline{S} - \underline{S} \leq \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \epsilon,$$

et comme la quantité la plus à gauche ne dépend pas de ϵ, on peut prendre la limite pour $\epsilon \to 0$, ce qui donne bien l'inégalité $\overline{S} \leq \underline{S}$ et la fonction f est intégrable.

Maintenant que l'on sait que f est intégrable on peut alors facilement conclure. Soit $\epsilon > 0$, la convergence uniforme permet alors d'affirmer

$$\exists N \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \qquad n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

On peut alors écrire

$$\forall n \geq N, \qquad |\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt| = |\int_a^b (f(t) - f_n(t))dt| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|dt \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dt = \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitrairement petit on a bien prouver

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n \to +\infty}{\to} \int_a^b f(t)dt.$$

□

Théorème 5. *On se donne f, h, et $(f_n)_{n\geq 0}$ des fonctions définies et intégrables sur un segment $[a,b]$ telles que :*

- *Pour tout $x \in [a,b]$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$.*
- *Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq h(x)$.*

On peut alors conclure que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Démonstration. Admise. □

Remarque 6.

— On peut en fait utiliser le théorème dans le cas où l'ensemble d'intégration n'est pas un segment mais un intervalle quelconque potentiellement infini.

— On peut supposer que la convergence simple a lieu partout sauf en un ensemble dénombrable de points.

10 Intégrales à paramètres

Théorème 6. *Soient I et J deux intervalles (fermés, ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non) de $\mathbb{R}$ (On appelera a et b les extrémités de I). On se donne une fonction $f : (t,x) \in I \times J \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ telle que :*

1. *Quelque soit $x \in J$ la fonction $t \in I \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur I,*
2. *quelque soit $t \in I$, la fonction $x \in J \mapsto f(t,x)$ est continue,*
3. *il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que :*

$$\forall (t,x) \in I \times J, \qquad |f(t,x)| \leq g(t),$$

alors la fonction F définie par :

$$\forall x \in J, \qquad F(x) := \int_a^b f(t,x)dt,$$

est continue.

Démonstration. Soient $x \in (c,d)$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de (c,d) convergeant vers x. On va définir une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\forall t \in [a,b], \qquad f_n(t) := f(t,x_n).$$

Par continuité séquentielle 12 on a alors :

$$\forall t \in [a,b], \qquad f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} f(t,x).$$

De plus on a aussi :

$$\forall t \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n(t)| \leq g(t),$$

le théorème de convergence dominée assure alors :

$$F(x_n) = \int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(t,x)dt = F(x),$$

et de nouveau par continuité séquentielle on en déduit que F est continue en x. Le point x étant quelconque dans (c,d) on a $F \in \mathcal{C}^0(c,d)$. □

Théorème 7. *Soient I et J deux intervalles (fermés, ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non) de $\mathbb{R}$ (On appelera a et b les extrémités de I). On se donne une fonction $f : (t,x) \in I \times J \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ telle que :*

1. *Quelque soit $x \in J$ la fonction $t \in I \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur I,*
2. *quelque soit $t \in I$, la fonction $x \in J \mapsto f(t,x)$ est continument dérivable, (on notera la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$)*
3. *il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que :*

$$\forall (t,x) \in I \times J, \qquad |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq g(t),$$

alors la fonction F définie par :

$$\forall x \in J, \qquad F(x) := \int_a^b f(t,x)dt,$$

est continument dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in J, \qquad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Démonstration. On commence par constater

$$\forall (x,y) \in J^2, \qquad F(y) - F(x) = \int_a^b f(t,y) - f(t,x)dt.$$

Puis pour un $t \in I$ fixé le théorème des accroissement finis garantit l'existence de $\theta \in [0,1]$ tel que

$$f(t,y) - f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \theta y + (1-\theta)x)(y-x).$$

Mais alors l'hypothèse de domination assure

$$\forall t \in I, \qquad \left| \frac{f(t,y) - f(t,x)}{y-x} \right| \leq g(t).$$

Si $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite de I convergeant vers x on a alors en posant

$$\forall t \in I, \qquad h_n(t) = \frac{f(t,y_n) - f(t,x)}{y_n - x},$$

$$\frac{F(y_n) - F(x)}{y_n - x} = \int_a^b h_n(t)dt,$$

la convergence simple

$$\forall t \in I, \qquad h_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x),$$

et la domination

$$\forall t \in I, \ \forall n \geq 0, \qquad |h_n(t)| \leq g(t).$$

On peut donc obtenir par le théorème de convergence dominée

$$\frac{F(y_n) - F(x)}{y_n - x} \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Comme la seule hypothèse sur $(y_n)_{n\geq 0}$ est la convergence vers x on en déduit

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} \underset{y\to x}{\to} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

La fonction F est donc bien dérivable et la dérivée donnée par la formule annoncée. On peut alors conclure que F' est continue en utilisant le théorème précédent. $\square$

11 Annexe

Définition 11 (Rappel)**.** Si E est un ensemble de nombres réels non vide, on dit que M est sa borne supérieur si :

$$\forall x \in E,\ x \leq M,$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in E,\ M - \epsilon \leq x.$$

On notera ceci :

$$M = \sup E.$$

Proposition 9 (Rappel)**.** *L'ensemble $\mathbb{R}$ a la propriété suivante :*
tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$, non vide et majoré possède une borne supérieure.

11.1 Suites réels

Proposition 10 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels et $a < b$ deux nombres réels, tels que*

$$\forall n \geq 1,\ a \leq x_n \leq b.$$

Alors il existe une extraction ϕ (i.e. une fonction $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante) et un nombre $p \in [a, b]$ tels que :

$$x_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} p.$$

Démonstration. On va construire par récurrence deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ et une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \geq 0, \qquad a = a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_0 = b,$$
$$\forall n \geq 0, \qquad \phi(n) < \phi(n+1),$$
$$\forall n \geq 0, \qquad I_n = \{k \geq \phi(n) + 1 \ :\ a_n \leq x_k \leq b_n\} \text{ est infini },$$
$$\forall n \geq 0, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

L'initialisation est trivialement effectuée par :

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b, \qquad \phi(0) = 0,$$

car $I_0 = \mathbb{N}^*$.

Supposons maintenant la construction effectué jusqu'au rang N, avec N quelconque fixé.
On commence par poser $c = \frac{a_N + b_N}{2}$, et on définit alors :

$$L = \{k \geq \phi(n) + 1 \ :\ a_N \leq x_k \leq c\}, \qquad R = \{k \geq \phi(n) + 1 \ :\ c \leq x_k \leq b_N\}.$$

On voit que par construction $L \cup R = I_N$ est infini donc on a forcément L et/ou R infini.

- Si L est infini, on prend

  $$a_{N+1} = a_N,\ b_{N+1} = c,\ \phi(N+1) = \min L.$$

  On a alors clairement :

  $$a_N = a_{N+1} \leq c = b_{N+1} \leq b_N, \quad \text{par construction de } c,$$

  $$\phi(N+1) \geq \phi(N) + 1 > \phi(N),$$

  $$I_{N+1} = L \text{ est infini par construction},$$

  $$b_{N+1} - a_{N+1} = \frac{a_N + b_N}{2} - a_N = \frac{b_N - a_N}{2} = \frac{b-a}{2^{N+1}}.$$

- Si L est fini, alors R est infini et on pose

$$a_{N+1} = c,\ b_{N+1} = b_N,\ \phi(N+1) = \min R.$$

Et les mêmes considérations que l'autre cas permettent de conclure.

On peut alors maintenant construire :

$$p := \sup\{a_n\ :\ n \geq 0\}.$$

On va montrer que

$$x_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} p.$$

1. Par définition de la borne sup on a :

$$\forall n \geq 0, \qquad a_n \leq p.$$

2. Si $p > b_n$ pour un certain n, en posant $\epsilon = \frac{p-b_n}{2}$ et en appliquant la définition de la borne sup on a un certain $k \geq 0$ tel que

$$a_k \geq p - \epsilon = p - \frac{p-b_n}{2} = \frac{p+b_n}{2} > p,$$

ce qui est absurde par construction des suites (a_n) et (b_n). Au final on a :

$$\forall n \geq 0, \qquad p \leq b_n.$$

3. On en déduit alors que

$$\forall n \geq 0, \qquad a_n \leq p \leq b_n,$$

mais comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, on a donc :

$$\forall n \geq 0, \qquad \max(|p-b_n|, |p-a_n|) \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Ce qui implique que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers p.

4. On conclut alors en remarquant que :

$$\forall n \geq 0, \qquad a_n \leq x_{\phi(n)} \leq b_n,$$

et le théorème de convergence comparée assure que

$$x_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} p.$$

□

Proposition 11 (Critère de Cauchy)**.** *Pour une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels on a équivalence entre les assertions suivantes :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n, m \geq N\ \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \epsilon, \tag{6}$$

$$\exists l \in \mathbb{R},\ x_n \underset{n\to+\infty}{\to} l. \tag{7}$$

Remarque 7. La proposition précédente permet de montrer qu'une suite est convergente sans avoir besoin de construire sa limite.

Démonstration. Montrons d'abord (7) $\Rightarrow$ (6).

Soit $\epsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \ |x_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

mais alors on a

$$\forall n, m \geq N, \ |x_n - x_m| \leq |x_n - l| + |x_m - l| \leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Montrons maintenant (6) $\Rightarrow$ (7).

On va commencer par montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée. En utilisant $\epsilon = 1$ (6) on a un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \ |x_n - x_N| \leq 1.$$

Si on pose

$$R := 1 + \max\{|x_i - x_N| \ : \ 0 \leq i \leq N-1\},$$

on voit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \in [x_N - R, x_N + R].$$

On peut donc utiliser Bolzano-Weierstrass pour obtenir un réel l et une extraction ϕ telle que :

$$x_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{l}.$$

Montrons que toute la suite converge vers l. Étant donné un réel $\epsilon > 0$ on a par hypothèse un entier N_1 tel que :

$$\forall n, m \geq N_1, \ |x_n - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Mais la convergence de la suite extraite assure l'existence d'entier N_2 tel que :

$$\forall n \geq N_2, \ |x_{\phi(n)} - l| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme $\phi(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on un entier m tel que :

$$m \geq N_2 \text{ et } \phi(m) \geq N_1,$$

on pose alors $N := \phi(m)$ et on constate :

$$\forall n \geq N, \ |x_n - l| \leq |x_n - x_N| + |x_{\phi(m)} - l| \leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Proposition 12. *Soit f une fonction d'un intervalle (a, b) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit x un réel de l'intervalle (a, b) alors on a équivalence entre :*

1. *la fonction f est continue en x,*
2. *pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de (a, b) on a :*

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x \ \Rightarrow \ f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x).$$

Démonstration. Commençons par montrer 1) $\Rightarrow$ 2).
On considère $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de (a,b) convergeant vers x. Soit ϵ un réel strictement positif. Par continuité de f en x il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in (a,b), \qquad |y-x| \leq \eta \;\Rightarrow\; |f(y)-f(x)| \leq \epsilon.$$

Mais comme la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \;\Rightarrow\; |x_n - x| \leq \eta,$$

en combinant les deux inégalités on aboutit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \;\Rightarrow\; |f(x_n)-f(x)| \leq \epsilon,$$

comme ϵ était un réel positif quelconque on a bien prouvé :

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x).$$

Montrons maintenant 2) $\Rightarrow$ 1).
Supposons que f ne soit pas continue en x, ce la signifie :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists y \in (a,b) \text{ tel que } |y-x| \leq \eta \text{ et } |f(y)-f(x)| > \epsilon.$$

En prenant $\eta = \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 0$ on en déduit l'existence de $x_n \in (a,b)$ tel que :

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n)-f(x)| > \epsilon > 0,$$

la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ainsi construite converge clairement vers x mais la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ ne converge pas vers $f(x)$. En prenant la proposition contrapposée on a bien montré 2) $\Rightarrow$ 1). □

11.2 Topologie

Proposition 13 (Borel-Lebesgue)**.** *Étant donné un intervalle $[a,b]$, on suppose qu'il existe un ensemble Λ quelconque et pour tout $\lambda \in \Lambda$ un intervalle ouvert $a_\lambda, b_\lambda)$ tels que :*

$$[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda, b_\lambda).$$

Alors on peut trouver un entier $n \geq 1$ et n éléments de Λ : $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que :

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i}).$$

(On dit que $[a,b]$ admet un sous-recouvrement fini)

Démonstration. Comme on a :

$$\forall p \in [a,b], \qquad [a,p] \subset [a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda, b_\lambda),$$

on peut commencer par définir :

$$I = \{p \in [a,b] \;:\; [a,p] \text{ admet un sous-recouvrement fini}\}.$$

Étant donné qu'on a :
$$a \in [a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda, b_\lambda),$$
on a un certain $\lambda_1 \in \Lambda$ tel que :
$$a \in (a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1}),$$
dont on peut déduire que $[a, b_{\lambda_1}) \subset I$ et donc $I \neq \emptyset$. Comme $I \subset [a,b]$ on peut introduire
$$M := \sup I.$$

Comme
$$M \in [a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda, b_\lambda),$$
on a $\lambda' \in \Lambda$ tel que $M \in (a_{\lambda'}, b_{\lambda'})$. Par définition de M on a un certain $p \in I$ tel que $p \in (a_{\lambda'}, M]$. Par définition de I on a n éléments de Λ : $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tel que :
$$[a,p] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i}),$$
et si on pose $\lambda_{n+1} = \lambda'$ on obtient alors :
$$[a,M] \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} (a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i}),$$
et donc $M \in I$.

Si de plus $M < b$ on a alors facilement que pour
$$c := \max\left(b, \frac{M + b_{\lambda'}}{2})\right) > M,$$
on a
$$[a,c] \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} (a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i}),$$
et donc $c \in I$ absurde car $M = \sup I$ et $c > M$. $\square$

Démonstration. **Du théorème de Heine.** On va procéder en plusieurs étapes.

1. On commence par introduire une variante locale du module de continuité :
$$\forall p \in [a,b],\ \forall \delta > 0, \qquad \omega_f(\delta, p) := \sup\{|f(x) - f(p)| \ : \ x \in [a,b],\ |x-p| \leq \delta\}.$$
On peut constater qu'on obtient au passage :
$$\forall x,y \in [a,b]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq w_f(|x-y|, y). \tag{8}$$
De plus la continuité de l'application f au point p peut se traduire par :
$$\omega_f(\delta, p) \underset{\delta\to 0^+}{\to} 0.$$
Il est clair qu'on a :
$$\forall \delta > 0,\ \omega_f(\delta) \leq \sup\{\omega_f(\delta, p) \ : \ p \in [a,b]\}.$$
(En fait on pourrait même montrer l'égalité, mais ce n'est pas nécessaire pour la preuve)

2. On va maintenant constater que

$$\forall x, y, p \in [a,b]^3, \qquad |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(p)| + |f(y) - f(p)|$$
$$\leq \omega_f(|x-p|, p) + \omega_f(|y-p|, p).$$

Mais si on prend $\delta > 0$ on peut en déduire :

$$\forall (x,y) \in [p - 2\delta, p + 2\delta], \qquad |f(x) - f(y)| \leq 2\omega_f(2\delta, p).$$

Mais si $y \in [p - \delta, p + \delta]$ on a alors :

$$\forall x \in [y - \delta, y + \delta], \quad x \in [p - 2\delta, p + 2\delta], \text{ et donc } |f(x) - f(y)| \leq 2\omega_f(2\delta, p).$$

Ce qui nous permet alors de conclure :

$$\forall \delta > 0, \ \forall p \in [a,b], \ \forall y \in [p - \delta, p + \delta], \ \omega_f(\delta, y) \leq 2\omega_f(2\delta, p).$$

3. Soit $\epsilon > 0$ la fonction f étant continu en tout point de $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b], \ \exists \delta(x) > 0, \ \omega_f(2\delta(x), x) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Il est alors clair qu'on peut écrire :

$$[a,b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} (x - \delta(x), x + \delta(x)).$$

La proprieté de Borel-Lebesgue permet alors de se donner un entier positif p et p nombres dans $[a,b]$: $x_1, ..., x_p$ tels que :

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)).$$

On pose alors

$$\delta := \min(\delta(x_1), ..., \delta(x_p)),$$

mais quelque soit $y \in [a,b]$ on a un indice i tel que :

$$|y - x_i| \leq \delta(x_i),$$

et donc d'après l'étape précédente :

$$\omega_f(y, \delta) \leq \omega_f(y, \delta(x_i)) \leq 2\omega_f(x_i, 2\delta(x_i)) \leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Comme y était quelconque dans $[a,b]$ et en utilisant la première étape on obtient le résultat voulu :

$$\omega_f(\delta) \leq \sup\{\omega_f(\delta, y) \ : \ y \in [a,b]\} \leq \epsilon,$$

car ϵ était un nombre strictement positif quelconque.

$\square$