

# Notes sur les équations différentielles 2021-2022

Vincent Perrollaz

13 avril 2022

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Géométrie . . . . .	2
1.2	Modélisation . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Utilisation des séries entières</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Équations à variables séparables</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Diagramme de phase en dimension 1</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Équation différentielles linéaires d'ordre 1</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Équation linéaire d'ordre 2 homogènes : Wronskien</b>	<b>16</b>
<b>8</b>	<b>Variation de la constante pour les équations d'ordre 2.</b>	<b>17</b>
<b>9</b>	<b>Formulation intégrale et Lemme de Gronwall</b>	<b>18</b>
<b>10</b>	<b>Théorème de Cauchy-Lipschitz</b>	<b>20</b>
<b>11</b>	<b>Solution maximale</b>	<b>21</b>
<b>12</b>	<b>Prolongement des solutions</b>	<b>22</b>
<b>13</b>	<b>Espace des phases, coulée d'une EDO et semigroupe</b>	<b>24</b>
<b>14</b>	<b>Équation linéaire autonome en dimension d</b>	<b>28</b>

# 1 Introduction

**Définition 1.** Une équation différentielle ordinaire (i.e. EDO) est un problème consistant, étant donné

- un intervalle non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,
- des entiers  $n, m$  et  $d$  strictement positifs,
- un ouvert non vide  $U$  de  $\mathbb{R}^{d(n+1)}$ ,
- une fonction  $F$  définie sur  $I \times U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  continue,

à rechercher les fonctions  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^n$  vérifiant

$$\forall t \in I, \quad F(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

## 1.1 Géométrie

De nombreuses équations différentielles ont une origine géométrique. On va donner un exemple particulièrement simple posé par Florimond de Beaune en 1638.

**Énoncé.** On considère le graphe  $\mathcal{G} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$  d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . La sous tangente à l'abscisse  $x_0$  est le segment reliant le point  $(x_0, 0)$  et l'intersection de la tangente à  $\mathcal{G}$  en  $(x_0, f(x_0))$  avec l'axe des abscisses (on consultera l'illustration de la construction sur la figure 1 page 3). Le problème consiste à déterminer les courbes dont les sous-tangentes ont une longueur orientée  $l \in \mathbb{R}$  indépendante de l'abscisse.

**Résolution.** La tangente est d'équation  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ , en résolvant  $y = 0$  en la variable  $x$  on obtient

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On demande donc à ce que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad l = x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

C'est à dire qu'on cherche une fonction  $f$  vérifiant

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad lf'(x_0) + f(x_0) = 0.$$

Par rapport à la définition 1 On a  $I = \mathbb{R}$ ,  $d = 1$ ,  $n = 1$ ,  $m = 1$ ,  $U = \mathbb{R}^2$  et  $F(x, y_0, y_1) = ly_1 + y_0$ , et la fonction inconnue est  $f$ .

## 1.2 Modélisation

Lors de l'étude d'un phénomène d'origine physique, chimique, biologique, économique... la mathématisation procède généralement suivant les objectifs *décrire/prédire/agir*. Les équations différentielles apparaissent souvent dans les deux dernières étapes. On va donner un exemple relevant des phénomènes de dynamique des population.

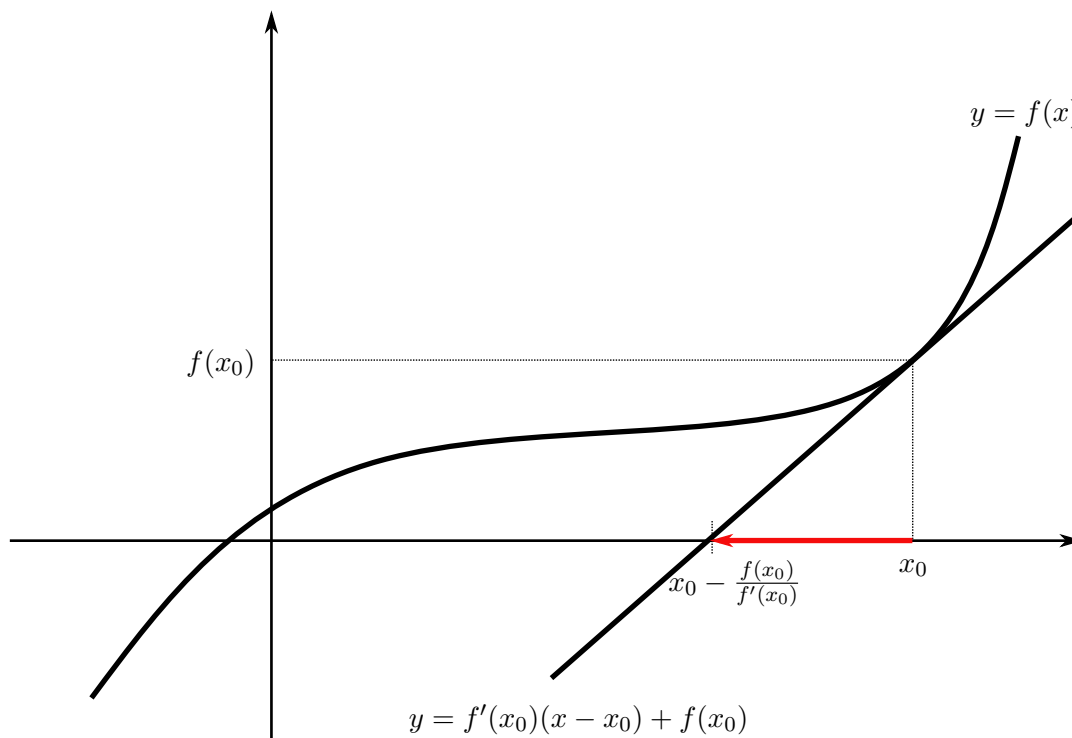


FIGURE 1 – Sous-tangente en rouge

**Décrire.** On va chercher à décrire l'évolution d'une population à travers le temps. Il peut s'agir de la population humaine de la planète, d'un pays, d'une ville... Il peut également s'agir d'une population d'animaux, d'insectes, de bactéries...

Une première approche pourrait consister à faire des recensements de la population à intervalles réguliers. On aurait donc une suite de valeurs  $p_0, p_1, \dots, p_n$ .

Mais la fréquence des recensements, et donc l'interprétation de l'indice  $n$ , reste à déterminer. On pourrait avoir  $(p_n^a)_{n \geq 0}$  où  $n$  représente l'année ( $a$  pour annuel donc), mais aussi  $(p_n^m)_{n \geq 0}$  (mensuel),  $(p_n^h)_{n \geq 0}$  (hebdomadaire),  $(p_n^j)_{n \geq 0}$  (journalier)... Le passage d'une fréquence plus grande à une plus petite est toujours possible (par exemple  $p_n^a = p_{12n}^m$ ,  $p_n^h = p_{7n}^j$ ). On voit qu'on aurait en fait intérêt à utiliser une échelle commune et donc à utiliser une fonction  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$  où le temps évolue de manière continue.

Les recensements consiste alors à *échantillonner* la fonction  $p$  à des moments discrets.

**Prédire.** Il est à peu près clair que pour tous les temps  $t_1 < t_2$  on peut écrire

$$p(t_2) - p(t_1) = \mathcal{N}([t_1, t_2]) - \mathcal{D}([t_1, t_2]),$$

où  $\mathcal{N}([t_1, t_2])$  représente les naissances dans l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  et  $\mathcal{D}([t_1, t_2])$  représente les décès.

On a donc  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{D}$  des fonctionnelles à valeurs positives sur les sous ensembles de  $\mathbb{R}$ . Les naissances et décès étant, de plus, des événements indivisibles, on en déduit que  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{D}$  sont additives et donc des mesures. En les supposant (de manières abusives à moins de faire

intervenir un aspect probabiliste) absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, on en déduit par le théorème de Radon-Nykodym l'existence de fonctions  $\mathbf{n}$  et  $\mathfrak{d}$  (à priori juste mesurables et positives) telles que

$$\forall t_1 < t_2, \quad p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{n}(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{d}(t)dt,$$

Comme il est à priori évident que la quantité de naissances/décès est croissant avec la taille de la population, on peut invoquer le principe d'Ockham pour supposer, dans un premier temps, qu'à chaque instant  $t$ ,  $\mathbf{n}(t)$  et  $\mathfrak{d}(t)$  sont proportionnels à la population  $p(t)$ . Précisément cela revient à supposer qu'on ait des nombres réels  $\tau_n$  et  $\tau_d$  (les taux de naissances/décès) tels que  $\mathbf{n}(t) = \tau_n p(t)$  et  $\mathfrak{d}(t) = \tau_d p(t)$ . On aboutit donc à

$$\forall t_1 < t_2, \quad p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\tau_n - \tau_d)p(t)dt.$$

et en divisant par  $t_2 - t_1$  puis en faisant tendre  $t_2 \rightarrow t_1$  on obtient finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{p}(t) = (\tau_n - \tau_d)p(t). \quad (1)$$

Dans ce contexte cette EDO s'appelle l'équation de Malthus. On remarquera que, mis à part des noms de variables et d'inconnus différents, on retombe sur l'équation géométrique de la section 1.1 pour  $l := \frac{1}{\tau_d - \tau_n}$ . C'est un phénomène courant qui est en fait une des forces de la modélisation mathématiques. On connecte en effet des domaines à priori étrangers, ce qui permet de transférer des intuitions/heuristiques/interprétations.

Notons finalement (en anticipant sur la suite du cours) que l'aspect prédictif vient de ce qu'étant donné un instant  $t_0$  et une valeur  $p_0$  il existe une seule fonction  $t \mapsto p(t)$  satisfaisant (1) et  $p(t_0) = p_0$ . Elle est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p(t) = p_0 e^{(t-t_0)(\tau_n - \tau_d)}.$$

En termes moins mathématiques, la connaissance du présent ( $p(t_0) = p_0$ ) détermine entièrement le futur (et aussi le passé dans ce cas).

**Agir.** On pourrait maintenant considérer que  $p(t)$  représente une population de poissons et que la pêche est représentée par l'augmentation du taux de décès. Ainsi on aurait une fonction  $a(t)$  définie valant 0 si la pêche est interdite à l'instant  $t$  et une constante  $A$  strictement positive si la pêche est autorisé. La population évolue alors suivant l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = (\tau_n - \tau_d(1 + a(t)))p(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases} \quad (2)$$

Mais la valeur de la fonction  $a$  est à *choisir*.

1. Une approche purement consumériste serait de vouloir déterminer la politique de pêche permettant de maximiser le nombre de poissons pêchés sur  $[0, T]$  tout en n'autorisant la pêche qu'un certain ratio du temps  $\theta \in [0, 1]$ . Mathématiquement cela revient à déterminer  $a : [0, T] \mapsto \{0, A\}$  vérifiant  $\int_0^T a(t)dt = A\theta$  et maximisant

$$\int_0^T a(t)p(t)dt$$

où  $p$  est la solution de (2) correspondant à ce choix de  $a$ .

- Une autre approche, peut être plus respectueuse de l'environnement, consisterait à vouloir maximiser  $p(T)$  sous la contrainte  $\int_0^T a(t)dt = A\theta$ .

## 2 Utilisation des séries entières

On va traiter le cas de l'équation de Maltus par analyse-synthèse.

**Analyse.** On considère une fonction  $x$  de classe  $\mathcal{C}^1$  satisfaisant l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

où  $\alpha$  est un réel fixé.

On voit facilement par récurrence que  $x$  est en fait de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et vérifie

$$\forall n \geq 0, \quad x^{(n+1)}(t) = \alpha x^{(n)}(t).$$

On en déduit immédiatement par récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad x^{(n)}(t_0) = \alpha^n x_0.$$

Si on suppose que  $x$  est en fait *analytique*, cela montre que l'on a (en utilisant la série de Taylor)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0 \alpha^k}{k!} (t - t_0)^k = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}. \quad (4)$$

**Synthèse.** Il est clair que la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) := x_0 e^{\alpha(t-t_0)},$$

satisfait (3).

**Conclusion.** On a déterminé une solution de l'EDO (3) mais on a seulement montré que c'était la seule qui était analytique. Or, pour que le modèle soit réellement prédictif, il faut garantir que c'est en fait la seule parmi toutes les fonctions  $\mathcal{C}^1$  (i.e. celles pour lesquelles l'EDO a un sens).

**Remarque 1.** *Cette approche par série entière est en fait très générale. Elle mène au théorème de Cauchy-Kowalewski. Celui-ci est trop technique pour être énoncé et démontré dans ce cours. On utilisera malgré tout régulièrement une approche par série entière pour « deviner » les formules et théorèmes.*

### 3 Équations à variables séparables

**Définition 2.** Une équation différentielle est dite à variables séparables lorsqu'elle se ramène à écrire :

$$\dot{x}(t) = a(t)b(x(t))$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues à valeurs réelles.

**Remarque 2.** Pour les équations à variables séparables, on peut effectuer formellement le calcul suivant.

Si on définit  $B(x) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{b(y)}$  alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)b(x(t)), \\ \implies \frac{\dot{x}(t)}{b(x(t))} &= a(t), \\ \implies B'(x(t))\dot{x}(t) &= a(t), \\ \implies B(x(t)) &= \int_{t_0}^t a(s)ds, \\ \implies x(t) &= B^{-1}\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \end{aligned} \tag{5}$$

On peut chercher à rendre le calcul rigoureux et aboutir alors aux résultats suivants.

**Théorème 1** (Existence). Soient

- $t_0$  et  $x_0$  deux réels,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $J$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $x_0$ ,
- $a$  une application  $\mathcal{C}^0$  définie sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
- $b$  une application  $\mathcal{C}^0$  définie sur  $J$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Alors il existe un intervalle ouvert  $I_0$  de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$  et contenu dans  $I$  et une fonction  $x \in \mathcal{C}^1(I_0; J)$  telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)b(x(t)), & \forall t \in I_0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{6}$$

**Théorème 2** (Unicité). Soient

- $t_0$  et  $x_0$  deux réels,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $J$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $x_0$ ,
- $a$  une application  $\mathcal{C}^0$  définie sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
- $b$  une application  $\mathcal{C}^0$  définie sur  $J$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
- $I_1$  et  $I_2$  des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$  et contenus dans  $I$ ,
- $x_1$  (resp.  $x_2$ ) une fonction dans  $\mathcal{C}^1(I_1; J)$  (resp.  $\mathcal{C}^1(I_2; J)$ ).

Si on a pour  $k$  valant 1 et 2

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = a(t)b(x_k(t)), & \forall t \in I_k, \\ x_k(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (7)$$

et  $b(x_0) \neq 0$  alors il existe  $I_3$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $x_0$  et contenu dans  $I_1 \cap I_2$  tel que

$$\forall t \in I_3, \quad x_1(t) = x_2(t). \quad (8)$$

On utilise cette méthodologie pour déterminer que

**Exemple 1.** Si  $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  alors

$$t \mapsto x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right),$$

est la solution de

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t) = a(t)x(t). \end{cases}$$

L'unicité sans condition vient du fait que notre formule garantit que la fonction est égale à 0, soit nulle part, soit partout.

**Exemple 2.** On applique la méthodologie des variables séparables pour constater que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (x(t))^2, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (9)$$

est donnée suivant trois configurations.

1. Si  $x_0 = 0$ , on observe

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 0.$$

2. Si  $x_0 > 0$  on a par contre

$$\forall t \in \left(-\infty; t_0 + \frac{1}{x_0}\right), \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

3. Si  $x_0 < 0$  on a par contre

$$\forall t \in \left(t_0 + \frac{1}{x_0}; +\infty\right), \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

On constate que dans les deux derniers cas, on n'a pas de solution globale. Ce que sous-entendait déjà le passage de  $I$  à  $I_0$  dans le théorème 1. On dit qu'on a explosion en temps fini.

**Exemple 3.** On s'intéresse ici à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (10)$$



**Cas  $x_0 > 0$ .** La méthodologie des variables séparables indique de considérer la formule

$$x(t) = \left( \sqrt{x_0} + \frac{t-t_0}{2} \right)^2.$$

Il y a cependant une subtilité : alors que le terme de droite est définie sur  $\mathbb{R}$  entier, on peut constater qu'en fait la formule satisfait la relation différentielle uniquement pour  $t \geq t_0 - 2\sqrt{x_0}$ , c'est à dire là où  $\sqrt{x_0} + \frac{t-t_0}{2} \geq 0$ .

On voit alors que la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) := \begin{cases} \left( \sqrt{x_0} + \frac{t-t_0}{2} \right)^2 & \text{si } t \geq t_0 - 2\sqrt{x_0}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est solution de (10). On notera en particulier que le raccord en  $T := t_0 - 2\sqrt{x_0}$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Mais on constate facilement que  $x$  est également solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(T) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Or la fonction constante identiquement égale à 0 est également solution de (11). Il n'y a donc pas d'unicité, même localement près de  $T$ .

**Cas  $x_0 < 0$ .** On détermine comme solution

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) := \begin{cases} - \left( \sqrt{-x_0} - \frac{t-t_0}{2} \right)^2 & \text{si } t \leq t_0 + 2\sqrt{-x_0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

Si  $T := t_0 + 2\sqrt{-x_0}$ , on a de nouveau non unicité pour l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(T) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

**Cas général.** Pour tous réels  $a \leq b$  la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_{a,b}(t) := \begin{cases} - \left( \frac{a-t}{2} \right)^2 & \text{si } t < a \\ 0 & \text{si } a \leq t \leq b \\ \left( \frac{t-b}{2} \right)^2 & \text{si } t > b, \end{cases} \quad (14)$$

vérifie bien  $x_{a,b} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ainsi que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}.$$

- Pour  $x_0 > 0$  on pose  $b_0 := t_0 - 2\sqrt{x_0}$  et alors pour tout réel  $a \leq b_0$ , la fonction  $x_{a,b_0}$  est solution de (10).
- Si  $x_0 < 0$  on pose  $a_0 = t_0 + 2\sqrt{-x_0}$  et pour tout  $b \geq a_0$  la fonction  $x_{a_0,b}$  est solution de (10).
- Finalement pour  $x_0 = 0$ , dès que  $a \leq t_0 \leq b$  la fonction  $x_{a,b}$  est solution de (10).

Dans tous les cas, l'EDO (10) admet donc une infinité de solutions. Le pouvoir prédictif du modèle est donc extrêmement limité.

## 4 Diagramme de phase en dimension 1

**Définition 3.** Une équation différentielle est dite autonome lorsqu'elle ne dépend pas explicitement de la variable libre.

**Exemple 4.** Les équations

$$\dot{x}(t) = (x(t))^2, \quad (\dot{x}(t))^2 + (x(t))^3 = 0, \quad (15)$$

sont autonomes alors que les équations

$$\dot{x}(t) = (t+1)x(t), \quad (1+t^2)\dot{x}(t) + \cos(t)\sin(x(t)) = 0, \quad (16)$$

ne le sont pas.

**Remarque 3.** On fera attention à la forme sous laquelle est écrite l'équation. Ainsi

$$(1+t)\dot{x}(t) = (1+t)x(t)$$

est-elle autonome ?

**Proposition 1** (Invariance de l'ensemble des solutions par translation en temps). Soient

- $t_0 < t_1 < t_2$  des nombres réels,
- $J$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ ,
- $b$  une application continue définie sur  $J$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
- $x$  une application  $C^1$  définie sur  $]t_0, t_2[$  à valeurs dans  $J$ .

Si  $x$  est solution de

$$\forall t \in (t_0, t_2), \quad \dot{x}(t) = b(x(t)),$$

on en déduit que la fonction  $y$  définie par

$$\forall t \in (t_0 - t_1, t_2 - t_1), \quad y(t) = x(t_1 + t),$$

vérifie

$$\forall t \in (t_0 - t_1, t_2 - t_1), \quad \dot{y}(t) = b(y(t)).$$

**Définition 4.** Le diagramme de phase d'une équation autonome d'ordre 1 :

$$\dot{x}(t) = b(x(t)), \quad (17)$$

est le graphe  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = b(x)\}$ .

**Exemple 5.** En se basant sur le diagramme de phase de la figure 2 page 12 on peut faire les constats suivants.

- Il y a quatre réels  $x_1^* < x_2^* < x_3^* < x_4^*$  pour lesquels  $b(x) = 0$ .
- $Y$  sont associées quatre solutions de l'EDO (17) données par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) := x_i^*.$$

- Si  $x$  est une solution de (17) définie sur un intervalle  $I$ , on voit que l'on a

$$\begin{cases} x(t) < x_1^* \implies b(x(t)) > 0 \implies \dot{x}(t) > 0 \implies x \text{ croissante près de } t, \\ x_1^* < x(t) < x_2^* \implies b(x(t)) < 0 \implies \dot{x}(t) < 0 \implies x \text{ décroissante près de } t, \\ x_2^* < x(t) < x_3^* \implies b(x(t)) > 0 \implies \dot{x}(t) > 0 \implies x \text{ croissante près de } t, \\ x_3^* < x(t) < x_4^* \implies b(x(t)) < 0 \implies \dot{x}(t) < 0 \implies x \text{ décroissante près de } t, \\ x_4^* < x(t) \implies b(x(t)) > 0 \implies \dot{x}(t) > 0 \implies x \text{ croissante près de } t, \end{cases} \quad (18)$$

Cette situation est représentée par les flèches sur la figure 2 page 12.

- De manière plus informelle si l'on a  $x(t_0) < x(t_1) < x_1^*$  on voit que  $t_0 < t_1$ . De plus comme l'équation (17) est à variables séparables on a

$$t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{x}(t) dt}{b(x(t))} = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{du}{b(u)}.$$

On en déduit que  $x(t_0) \rightarrow -\infty$  implique  $t_0 \rightarrow -\infty$  si et seulement si  $\int_{-\infty}^{\frac{du}{b(u)}}$  est divergente. Dans le cas contraire on a explosion en temps fini comme pour l'équation  $\dot{x} = x^2$  déjà rencontrée.

De même,  $x(t_1) \rightarrow x_1^*$  implique  $t_1 \rightarrow +\infty$  si et seulement si  $\int^{x_1^*} \frac{du}{b(u)}$  est divergente. Dans le cas contraire, on perd l'unicité de la solution comme dans le cas déjà vu de  $\dot{x} = \sqrt{|x|}$  de l'exemple 3 page 8.

- Le même raisonnement peut être effectué pour les autres zones.

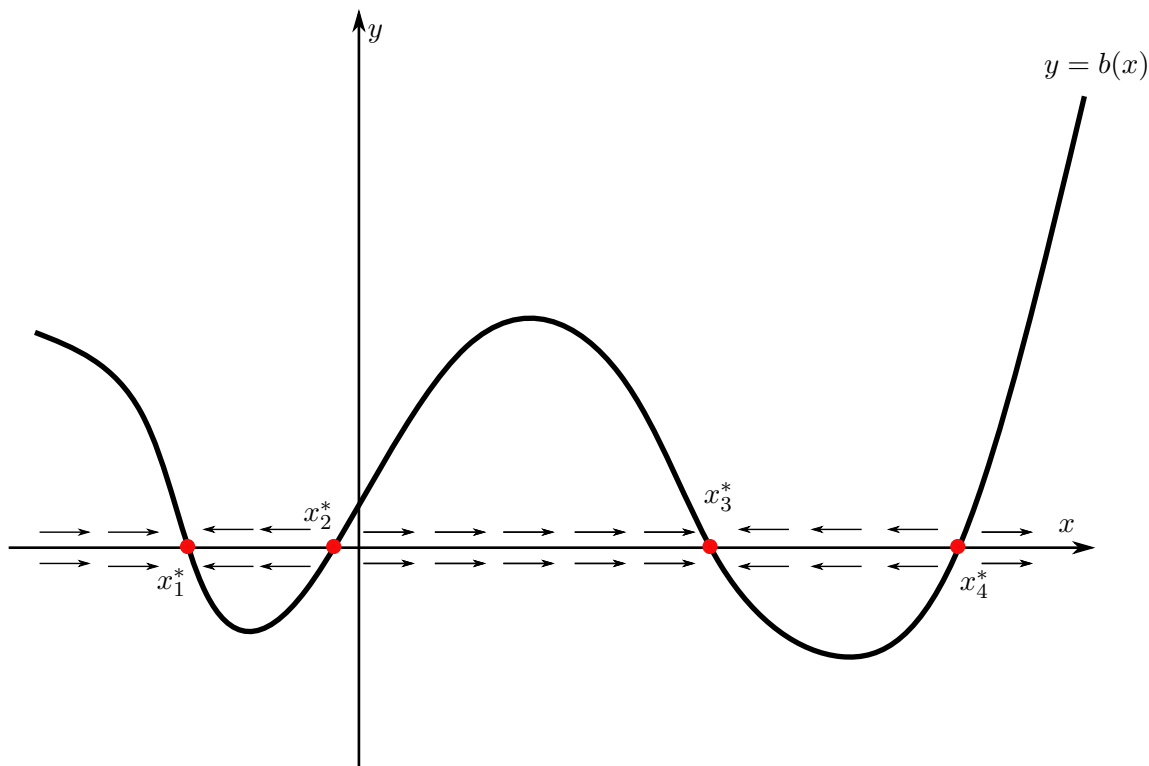


FIGURE 2 – Diagramme de phase de  $\dot{x}(t) = b(x(t))$

## 5 Équation différentielles linéaires d'ordre 1

**Proposition 2** (Problème homogène). *Soient*

- $t_0$  et  $x_0$  des réels,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $a$  une fonction continue définie sur  $I$  à valeurs réelles.

Alors une fonction  $x$  est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t), & \forall t \in I, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

**Remarque 4.** Notez que la proposition précédente montre, en particulier, que l'ensemble des solutions de

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t),$$

est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est la fonction  $t \mapsto \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$ .

**Proposition 3** (Problème non homogène). *Soient*

- $t_0$  et  $x_0$  des réels,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $a$  et  $b$  des fonctions continues, définies sur  $I$  et à valeurs réelles.

Alors une fonction  $x$  est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), & \forall t \in I, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(r)dr\right) ds.$$

**Remarque 5.** On peut constater que la solution générale du problème non homogène est la somme de n'importe quelle solution particulière du problème non homogène et de la solution générale du problème homogène.

**Remarque 6.** Pour trouver le résultat précédent, on peut utiliser la méthode du « facteur intégrant » qui correspond aux calculs suivant. Dans le cas homogène, on a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)x(t) && \forall t \in I \\ \implies \dot{x}(t) - a(t)x(t) &= 0 && \forall t \in I \\ \implies (\dot{x}(t) - a(t)x(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) &= 0 && \forall t \in I \\ \implies \frac{d}{dt} \left( x(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \right) &= 0 && \forall t \in I && (19) \\ \implies x(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) &= x(t_0) && \forall t \in I \\ \implies x(t) &= x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) && \forall t \in I. \end{aligned}$$

Puis dans le cas non homogène

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)x(t) + b(t) \\ \implies \dot{x}(t) - a(t)x(t) &= b(t) \\ \implies (\dot{x}(t) - a(t)x(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) &= b(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \\ \implies \frac{d}{dt} \left( x(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \right) &= b(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) && (20) \\ \implies x(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r)dr\right) ds \\ \implies x(t) &= x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(r)dr\right) ds. \end{aligned}$$

**Remarque 7.** On peut, aussi, trouver la formule du cas non homogène par la méthode dite « de variation de la constante ».

Comme la formule générale de résolution de l'équation homogène est

$$x(t) = \lambda \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right),$$

on va chercher la solution de l'équation non homogène sous la forme

$$x(t) = \lambda(t) \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

En injectant la nouvelle inconnue  $\lambda$  dans l'EDO, on obtient

$$\dot{\lambda}(t) \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right) = b(t).$$

Et comme on sait  $\lambda(t_0) = x_0$ , on peut finir le calcul en effectuant une intégration.

## 6 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants

**Théorème 3.** *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $a, b$  des réels,
- $x_0$  et  $x_1$  deux réels.

*On s'intéresse à l'équation différentielle*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0 & \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = x_1. \end{cases} \quad (21)$$

*Pour ce faire on définit le polynôme  $P = X^2 + aX + b$ . On a alors trois situations distinctes.*

1. *Lorsque  $P$  a deux racines réels distinctes  $r_1, r_2$ ,  $x$  est une solution de (21) si et seulement si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{x_1 - r_2 x_0}{r_1 - r_2} e^{r_1(t-t_0)} + \frac{r_1 x_0 - x_1}{r_1 - r_2} e^{r_2(t-t_0)}. \quad (22)$$

2. *Lorsque  $P$  a une racine double  $r \in \mathbb{R}$ ,  $x$  est solution de (21) si et seulement si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = ((x_1 - r x_0)(t - t_0) + x_0) e^{r(t-t_0)}. \quad (23)$$

3. *Lorsque  $P$  a deux racines complexes (conjuguées car  $P$  est à coefficients réels)  $r - i\theta$ ,  $r + i\theta$  ( $\theta \neq 0$  car on a exclu le cas précédent),  $x$  est solution de (21) si et seulement si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^{r(t-t_0)} \left( x_0 \cos(\theta(t-t_0)) + \frac{x_1 - r x_0}{\theta} \sin(\theta(t-t_0)) \right) \quad (24)$$

**Remarque 8.** *On ne cherchera en aucun cas à mémoriser les formules exactes. On commencera plutôt par rechercher des solutions sous l'une des formes voulues par la situation*

$$t \mapsto \alpha e^{r_1(t-t_0)} + \beta e^{r_2(t-t_0)}, \quad (25)$$

$$t \mapsto (\alpha(t-t_0) + \beta) e^{r(t-t_0)}, \quad (26)$$

$$t \mapsto e^{r(t-t_0)} (\alpha \cos(\theta(t-t_0)) + \beta \sin(\theta(t-t_0))), \quad (27)$$

*puis on utilisera les conditions en  $t_0$  pour déterminer  $\alpha$  et  $\beta$ .*

**Remarque 9.** *On constate que le théorème précédent assure en particulier que l'espace des solutions d'une EDO  $\ddot{x} + a\dot{x} + b = 0$  est un espace vectoriel de dimension 2.*

**Remarque 10.** *On pourrait obtenir une forme identique dans le premier et le troisième cas, à condition d'utiliser les cosinus et sinus hyperboliques :*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

## 7 Équation linéaire d'ordre 2 homogènes : Wronskien

Lorsque l'équation n'est plus à coefficients constants mais dépendant du temps, il ne faut pas espérer trouver des formules explicites générales. On peut, parfois, trouver des expressions exactes en séries entières lorsque les coefficients sont analytiques en  $t$ . On a malgré tout quelques résultats généraux.

**Théorème 4.** *Soient*

- $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide,
- $a$  et  $b$  des fonctions continues définies sur  $I$  et à valeurs réelles,
- $x$  et  $y$  des fonctions définies sur  $I$  de classe  $\mathcal{C}^2$  à valeurs réelles.

On appelle Wronskien de  $x$  et  $y$  la fonction définie par

$$\forall t \in I, \quad W(t) := x(t)y'(t) - \dot{x}(t)y(t). \quad (28)$$

Lorsque  $x$  et  $y$  vérifient

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0, \\ \ddot{y}(t) + a(t)\dot{y}(t) + b(t)y(t) = 0, \end{cases} \quad (29)$$

le wronskien, lui, vérifie

$$\forall t \in I, \quad \dot{W}(t) + a(t)W(t) = 0, \quad (30)$$

et donc aussi

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, \quad W(t_2) = W(t_1)e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds}. \quad (31)$$

**Théorème 5.** *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $a$  et  $b$  des fonctions continues, définies sur  $I$  et à valeurs réelles.

Il existe des fonctions  $x_0$  et  $x_1$  de classe  $\mathcal{C}^2$  définies sur  $I$  et à valeurs réelles vérifiant

$$\begin{cases} \ddot{y}_0(t) + a(t)y_0(t) + b(t)y_0(t) = 0, & \forall t \in I, & \ddot{y}_1(t) + a(t)y_1(t) + b(t)y_1(t) = 0, & \forall t \in I, \\ y_0(t_0) = 1, & \dot{y}_0(t_0) = 0, & y_1(t_0) = 0, & \dot{y}_1(t_0) = 1. \end{cases} \quad (32)$$

De plus, étant donnés des réels  $\alpha$  et  $\beta$ , une fonction  $x \in \mathcal{C}^2(I; \mathbb{R})$  vérifie

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0, & \forall t \in I, \\ x(t_0) = \alpha, & \dot{x}(t_0) = \beta. \end{cases} \quad (33)$$

si et seulement si on a

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \alpha y_0(t) + \beta y_1(t). \quad (34)$$

**Remarque 11.** On en déduit que de nouveau que l'ensemble des solutions de

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0$$

est un espace vectoriel de dimension deux dont  $\{y_0, y_1\}$  est une base.



## 8 Variation de la constante pour les équations d'ordre 2.

**Théorème 6.** Soient

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $a, b$  et  $f$  des fonctions continues, définies sur  $I$  et à valeurs réelles.

On considère  $y_0$  et  $y_1$  comme dans le Théorème 5. Alors, pour tous réels  $x_0, x_1$  il existe une unique solution  $x \in \mathcal{C}^2(I; \mathbb{R})$  de

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = f(t), & \forall t \in I, \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1, \end{cases} \quad (35)$$

et elle est donnée par la formule

$$\forall t \in I, \quad x(t) := x_0 y_0(t) + x_1 y_1(t) + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} (y_0(s) y_1(t) - y_0(t) y_1(s)) f(s) ds. \quad (36)$$

**Remarque 12.** Une nouvelle fois, on ne cherchera pas à retenir la formule. On utilisera plutôt la méthode de la variation de la constante. En utilisant la remarque 11, on cherche donc la solution de (35) sous la forme :

$$x(t) = \alpha(t)y_0(t) + \beta(t)y_1(t).$$

En dérivant une première fois, on obtient

$$\dot{x}(t) = \dot{\alpha}(t)y_0(t) + \dot{\beta}(t)y_1(t) + \alpha(t)\dot{y}_0(t) + \beta(t)\dot{y}_1(t).$$

Mais comme on a remplacé une fonction inconnue  $x$ , par deux fonctions inconnues  $\alpha$  et  $\beta$ , on a gagné un degré de liberté. On a donc la possibilité d'introduire une équation supplémentaire.

Pour que la résolution en  $\alpha, \beta$  soit plus simple que celle en  $x$ , l'idée est de la réduire d'une dérivée. A cette fin il est donc naturel de tuer les termes différentiels en  $\alpha, \beta$  apparaissant dans  $\dot{x}$ .

On requiert donc, de manière artificielle,

$$\forall t \in I, \quad \dot{\alpha}(t)y_0(t) + \dot{\beta}(t)y_1(t) = 0,$$

dont on déduit qu'en fait

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = \alpha(t)\dot{y}_0(t) + \beta(t)\dot{y}_1(t).$$

Puis

$$\forall t \in I, \quad \ddot{x}(t) = \dot{\alpha}(t)\dot{y}_0(t) + \dot{\beta}(t)\dot{y}_1(t) + \alpha(t)\ddot{y}_0(t) + \beta(t)\ddot{y}_1(t).$$

On a ensuite

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = \dot{\alpha}(t)\dot{y}_0(t) + \dot{\beta}(t)\dot{y}_1(t).$$

On a, de fait, l'équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} y_0(t) & y_1(t) \\ \dot{y}_0(t) & \dot{y}_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Et on sait résoudre explicitement ce système. En effet, le déterminant de la matrice est le Wronskien de  $y_0$  et  $y_1$ . Or on l'a calculé explicitement dans le Théorème 4.

## 9 Formulation intégrale et Lemme de Gronwall

On commence par une reformulation des EDO, plus maniable du point de vue théorique.

**Théorème 7.** *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle ouvert contenant  $t_0$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $x_0$  un point de  $E$ ,
- $U$  un ouvert de  $E$  contenant  $x_0$ ,
- $F$  une fonction continue, définie sur  $I \times U$  et à valeurs dans  $E$ ,
- $x$  une fonction définie sur  $I$  et à valeurs dans  $U$ .

Alors il y a équivalence entre

(i) la fonction  $x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), & \forall t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (37)$$

(ii) la fonction  $x$  est continue et vérifie

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds. \quad (38)$$

On fournit maintenant un résultat classique très pratique pour obtenir des estimations sur des solutions d'EDO.

**Théorème 8** (Lemme de Gronwall). *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $a$  un réel,
- $b$  une fonction continue, définie sur  $I$  et à valeurs positives,
- $x$  une fonction continue, définie sur  $I$  et à valeurs réelles.

On suppose que

$$\forall t \in I, \quad x(t) \leq a + \int_{t_0}^t b(s)x(s) ds. \quad (39)$$

Alors on en déduit

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \implies x(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t b(s) ds\right). \quad (40)$$

**Définition 5.** *Soient*

- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $U$  un ouvert non vide de  $E$ .

Une fonction  $F$  définie sur  $I \times U$  à valeurs dans  $E$  est dite localement lipschitzienne en la seconde variable lorsque

$$\forall(\bar{t}, \bar{x}) \in I \times U, \quad \exists \epsilon > 0, \quad \exists K > 0, \quad \forall(t, a, b) \in I \times U^2, \\ |t - \bar{t}| + \|a - \bar{x}\|_E + \|b - \bar{x}\|_E \leq \epsilon \implies \|F(t, a) - F(t, b)\|_E \leq K\|a - b\|_E, \quad (41)$$

En appliquant le Lemme de Gronwall, on obtient le résultat d'unicité suivant pour les équations différentielles.

**Théorème 9** (Cauchy-Lipschitz : Unicité). *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $U$  un ouvert non vide de  $E$ ,
- $F$  une fonction continue, définie sur  $I \times U$ , à valeurs dans  $E$  et localement lipschitzienne en la seconde variable,
- $x_1$  et  $x_2$  des fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $U$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Alors si on a

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = F(t, x_1(t)) & \forall t \in I, \\ \dot{x}_2(t) = F(t, x_2(t)) & \forall t \in I, \\ x_1(t_0) = x_2(t_0) \end{cases} \quad (42)$$

on en déduit

$$\forall t \in I, \quad x_1(t) = x_2(t). \quad (43)$$

**Remarque 13.** Notons que l'hypothèse sur  $F$  est une conséquence directe de  $F \in \mathcal{C}^1(I \times U; E)$  qui est plus « faible » mais beaucoup plus facile à vérifier.

## 10 Théorème de Cauchy-Lipschitz

**Théorème 10** (Cauchy-Lipschitz : Existence locale). *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $x_0$  un point de  $E$ ,
- $U$  un ouvert de  $E$  contenant  $x_0$ ,
- $F$  une fonction continue, définie sur  $I \times U$ , à valeurs dans  $E$  et localement lipschitzienne en la seconde variable.

On choisit  $\delta_1, \epsilon > 0$  satisfaisant juste

$$K := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E : |t - t_0| \leq \delta_1, \quad \|x - x_0\|_E \leq \epsilon\} \subset U. \quad (44)$$

On définit alors

$$\begin{cases} M := \max_{(t,x) \in K} \|F(t,x)\|_E, \\ \delta := \min(\delta_1, \frac{\epsilon}{M}). \end{cases} \quad (45)$$

Alors, il existe une fonction  $x \in \mathcal{C}^1((t_0 - \delta; t_0 + \delta); U)$  vérifiant

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \forall t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta). \end{cases} \quad (46)$$

**Théorème 11** (Cauchy-Lipschitz : alternative globale). *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $x_0$  un point de  $E$ ,
- $F$  une fonction continue, définie sur  $\mathbb{R} \times E$ , à valeurs dans  $E$  et telle qu'il existe un réel  $C > 0$  satisfaisant

$$\forall (t, a, b) \in \mathbb{R} \times E^2, \quad \|F(t, a) - F(t, b)\|_E \leq C\|a - b\|_E.$$

Alors, il existe une unique fonction  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $E$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (47)$$

## 11 Solution maximale

**Définition 6.** Soient

- $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel de dimension finie,
- $U$  un ouvert non vide de  $E$ ,
- $F$  une application continue, définie sur  $I \times U$  et à valeurs dans  $E$ .

Une solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad (48)$$

est la donnée

- d'un intervalle ouvert non vide  $J$  inclu dans  $I$ ,
- d'une application  $x$ , définie sur  $J$ , à valeurs dans  $U$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifiant (48) pour tout  $t$  dans  $J$ .

**Définition 7.** Soient

- $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel de dimension finie,
- $U$  un ouvert non vide de  $E$ ,
- $F$  une application continue, définie sur  $I \times U$  et à valeurs dans  $E$ .

Une solution  $x : J_1 \rightarrow U$  de

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad (49)$$

est dite maximale lorsque si  $y : J_2 \rightarrow U$  est une autre solution vérifiant

$$\forall t \in J_1 \cap J_2, \quad x(t) = y(t), \quad (50)$$

on peut en déduire  $J_2 \subset J_1$ .

**Remarque 14.** Une solution est donc maximale au sens où elle est définie sur le plus grand intervalle de temps possible.

**Théorème 12** (Cauchy-Lipschitz : reformulation générale). Soient

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $x_0$  un point de  $E$ ,
- $U$  un ouvert de  $E$  contenant  $x_0$ ,
- $F$  une fonction continue, définie sur  $I \times U$ , à valeurs dans  $E$  et localement lipschitzienne en la seconde variable.

Alors, il existe une unique solution maximale de

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad (51)$$

vérifiant  $x(t_0) = x_0$ .

## 12 Prolongement des solutions

**Théorème 13** (Lemme des bouts). *Soient*

- $a, b, a_0$  et  $b_0$  des réels tels que  $a < a_0 < b_0 < b$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $U$  un ouvert non vide de  $E$ ,
- $F$  une application continue, définie sur  $(a; b) \times U$ , à valeurs dans  $E$  et localement lipschitzienne en la seconde variable,
- $x$  une application définie sur  $(a_0, b_0)$  à valeurs dans  $U$  de classe  $\mathcal{C}^1$  satisfaisant

$$\forall t \in (a_0, b_0), \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t)). \quad (52)$$

Si il existe un compact  $K$  de  $E$ , contenu dans  $U$  et tel que

$$\forall t \in (a_0, b_0), \quad x(t) \in K,$$

on en déduit qu'il existe des réels  $a_1 \in (a, a_0)$  et  $b_1 \in (b_0, b)$  et une fonction  $y \in \mathcal{C}^1((a_1; b_1); U)$  tels que

$$\begin{cases} \forall t \in (a_1; b_1), & \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \\ \forall t \in (a_0; b_0), & y(t) = x(t). \end{cases} \quad (53)$$

**Remarque 15.** *De manière informelle, si une solution de l'équation différentielle ne se rapproche pas du bord du domaine de définition de  $F$ , on peut la prolonger un peu plus longtemps.*

*De manière plus précise, en prenant la contraposée du lemme des bouts, si on considère  $x : (a_0, b_0) \mapsto U$  une solution maximale de (52) alors on voit que quelque soient  $\delta > 0$  et  $K$  un compact de  $U$  on a*

$$\begin{cases} \exists t_1 \in (a_0, b_0) \cap (b_0 - \delta, b_0), & x(t_1) \notin K, \\ \exists t_2 \in (a_0, b_0) \cap (a_0, a_0 + \delta), & x(t_2) \notin K, \end{cases}$$

**Exemple 6.** *On peut montrer en utilisant le lemme des bouts que si  $\alpha$  et  $t_0$  sont des réels quelconques et  $x_0 \in (0; 1)$  alors la solution maximale de*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t)(1 - x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (54)$$

*est définie sur  $\mathbb{R}$  car elle vérifie  $x(t) \in (0; 1)$  pour tout  $t$  dans son intervalle de définition. En effet, les fonctions*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} B_1(t) := 0, \\ B_2(t) := 1, \end{cases} \quad (55)$$

*sont solutions maximale de (54), et donc ne peuvent être « traversée » par  $x$  grâce au résultat d'unicité dans Cauchy-Lipschitz. Or on a soit  $B_1(t_0) < x(t_0) < B_2(t_0)$ .*

**Théorème 14** (De comparaison). *Soient*

- $t_0$  et  $t_1$  des réels tels que  $t_0 < t_1$ ,
- $J$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  non vide,

- $F$  une fonction continue, définie sur  $[t_0, t_1] \times J$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
- $x$  et  $y$  des fonctions définies sur  $[t_0, t_1]$  à valeurs dans  $J$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si l'on a

$$\begin{cases} \forall t \in [t_0, t_1], & \dot{x}(t) < F(t, x(t)), \\ \forall t \in [t_0, t_1], & \dot{y}(t) > F(t, y(t)), \\ x(t_0) \leq y(t_0), \end{cases} \quad (56)$$

on en déduit que

$$\forall t \in [t_0, t_1], \quad x(t) \leq y(t). \quad (57)$$

**Remarque 16.** Il est crucial qu'au moins une des inégalités dans (56) soit stricte, sous peine d'obtenir un contre-exemple en utilisant les solutions vu dans l'Exemple 3 page 8.

On peut les transformer en inégalités larges en demandant, en plus, que  $F$  soit localement lipschitz en la seconde variable.

### 13 Espace des phases, coulée d'une EDO et semigroupe

**Théorème 15.** Soient

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $\bar{x}$  un point de  $E$ ,
- $U$  un ouvert de  $E$  contenant  $\bar{x}$ ,
- $F$  une fonction continue, définie sur  $I \times U$ , à valeurs dans  $E$  et localement lipschitzienne en la seconde variable.

On choisit  $R > 0$  et  $\delta_0 > 0$  satisfaisant juste  $K := \bar{B}(\bar{x}; 2R) \subset U$  et  $I_0 := [t_0 - \delta_0; t_0 + \delta_0] \subset I$ . On définit alors

$$\begin{cases} M := \max_{\substack{x \in K \\ t \in I_0}} \|F(t, x)\|_E \\ \delta := \min\left(\delta_0, \frac{R}{1+M}\right). \end{cases} \quad (58)$$

Il existe alors une unique application  $\phi : [t_0 - \delta; t_0 + \delta] \times \bar{B}(\bar{x}, R) \rightarrow U$  telle que pour tout  $x_0 \in \bar{B}(\bar{x}, R)$  la fonction définie par

$$\forall t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta), \quad x(t) := \phi(t, x_0),$$

est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), & \forall t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, si  $C$  est la constante de Lipschitz de  $F$  sur  $I_0 \times K$  (par rapport à la seconde variable) on a

$$\forall x_1, x_2 \in \bar{B}(\bar{x}, R), \quad \forall t \in [t_0 - \delta; t_0 + \delta], \quad \|\phi(t, x_1) - \phi(t, x_2)\|_E \leq \|x_1 - x_2\|_E \exp(C|t - t_0|).$$

**Remarque 17.** On dit qu'une telle application  $\phi$  est une coulée (ou un flot par analogie avec l'anglais flow) pour l'application  $F$ .

On pourra regarder la figure 3 page 25 pour visualiser le champs de vecteurs  $(x, t) \mapsto (F(t, x), 1)$  et les courbes intégrales i.e. les graphes des courbes  $t \mapsto (x(t), t)$  où  $x$  est solution de  $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ .

**Remarque 18.** Si l'application  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  on peut montrer que la coulée est  $\mathcal{C}^1$ .

De plus, pour  $x_0 \in \bar{B}(\bar{x}, R)$ ,  $u \in E$  si  $\theta \in \mathbb{R}$  est suffisamment petit, on peut écrire

$$\forall t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta), \quad \frac{\phi(t, x_0 + \theta u) - \phi(t, x_0)}{\theta} = u + \int_{t_0}^t \frac{F(s, \phi(s, x_0 + \theta u)) - F(s, \phi(s, x_0))}{\theta} ds.$$

En faisant alors  $\theta \rightarrow 0$ , on en déduit que la dérivée directionnelle en  $u$  définie par

$$\forall t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta), \quad y(t) := \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\phi(t, x_0 + \theta u) - \phi(t, x_0)}{\theta},$$

vérifie

$$\forall t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta), \quad y(t) = u + \int_{t_0}^t dF(s, \phi(s, x_0))(0, y(s)) ds,$$

c'est à dire une équation différentielle linéaire.



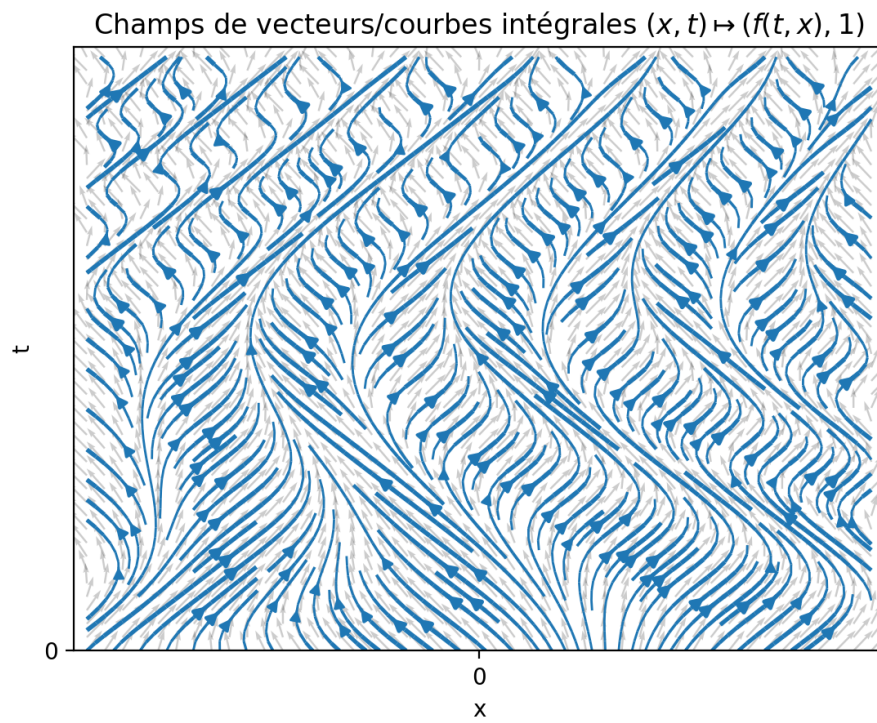
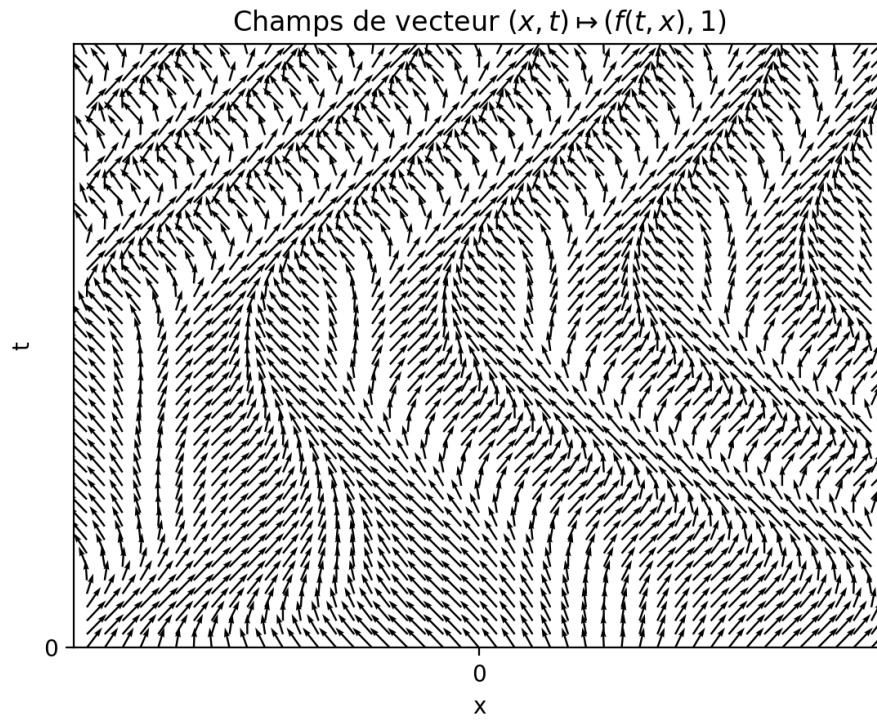


FIGURE 3 – Champs de vecteurs et courbes intégrales.

**Théorème 16.** *Soient*

- $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé de dimension finie,
- $U$  un ouvert non vide de  $E$ ,
- $F$  une fonction définie sur  $U$  à valeurs dans  $E$  localement lipschitzienne.

*On suppose que quelque soit le réel  $t_0$  et le point  $x_0$  de  $U$  la solution maximale de*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

*est définie sur  $\mathbb{R}$ . Alors il existe une courbe  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R} \times U$  et elle vérifie additionnellement*

$$\forall (t_1, t_2, x) \in \mathbb{R}^2 \times U, \quad \phi(t_1, \phi(t_2, x)) = \phi(t_1 + t_2, x).$$

**Exemple 7.** *On peut montrer que les solutions maximales du système de Lotka-Volterra*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(A - By(t)), \\ \dot{y}(t) = y(t)(Cx(t) - D) \end{cases}$$

*(avec  $A, B, C, D > 0$ ), sont globalement définies sur  $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ . On pourra consulter le diagramme de phase sur la figure 4 page 27.*

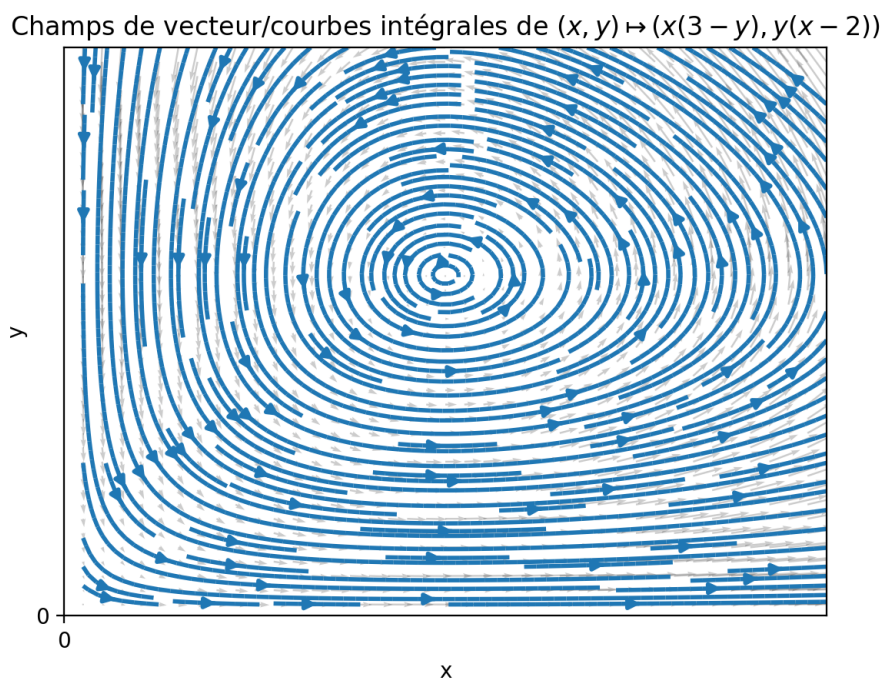
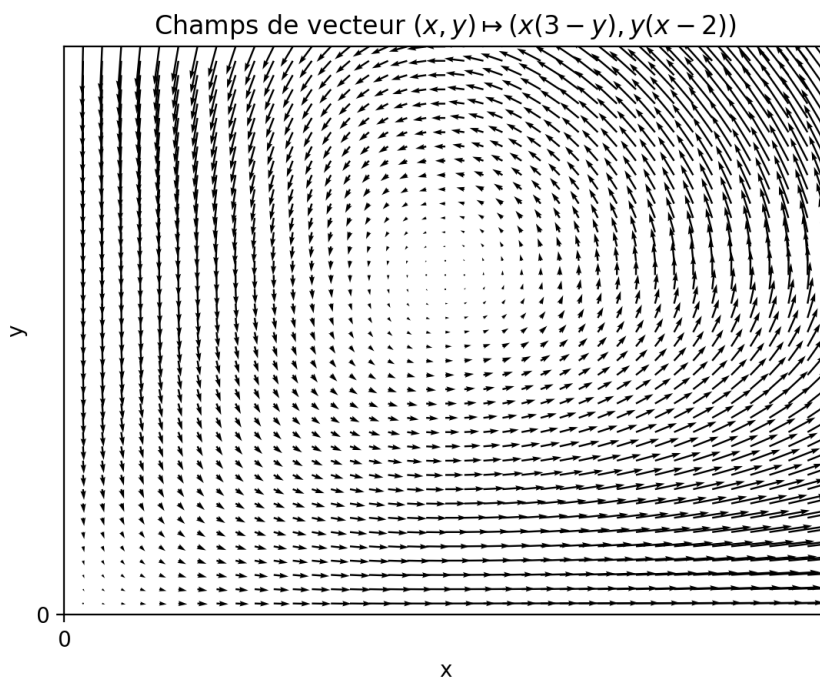


FIGURE 4 – Système de Lotka-Volterra

## 14 Équation linéaire autonome en dimension $d$

**Théorème 17.** *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $d$  un entier strictement positif,
- $A$  une matrice  $d \times d$  à coefficients réels,
- $x_0$  un point de  $\mathbb{R}^d$ .

Une fonction  $x$  est solution maximale de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si et seulement si on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x_0 \frac{(t-t_0)^k}{k!} = e^{A(t-t_0)} x_0.$$

**Remarque 19.** *La résolution d'équations linéaires à coefficients constants se ramène donc à un calcul d'exponentiel. On s'appuiera sur le cours d'algèbre pour diagonaliser quand c'est possible ou alors on effectuera une décomposition de Dunford.*

**Théorème 18.** *Soient*

- $t_0$  un réel,
- $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$ ,
- $b$  une application continue, définie sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,
- $d$  un entier strictement positif,
- $A$  une matrice  $d \times d$  à coefficients réels,
- $x_0$  un point de  $\mathbb{R}^d$ .

Une fonction  $x$  est solution maximale de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si et seulement si on a

$$\forall t \in I, \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} b(s) ds.$$

On conclut par différents portraits de phase correspondant au système

$$\dot{x} = Ax,$$

avec différent choix pour  $A \in M_2(\mathbb{R})$  suivant les propriétés spectrales voulues.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

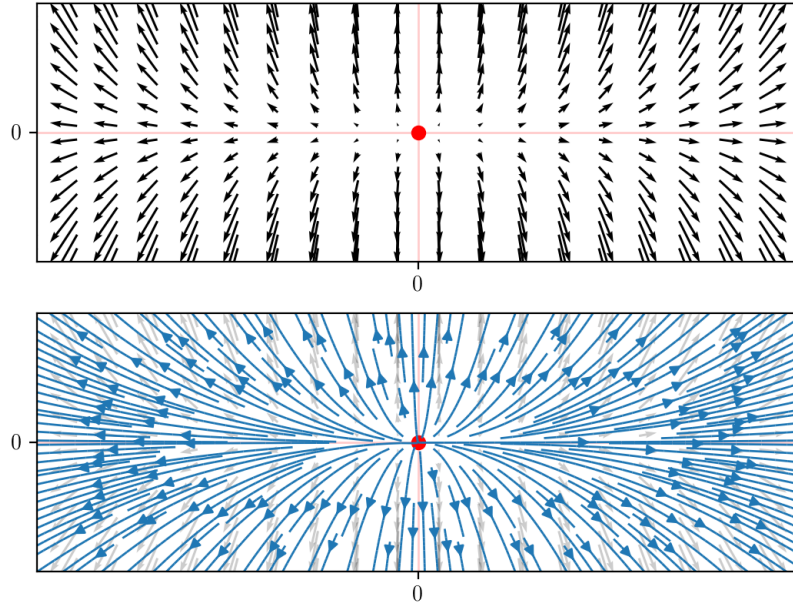


FIGURE 5 –  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

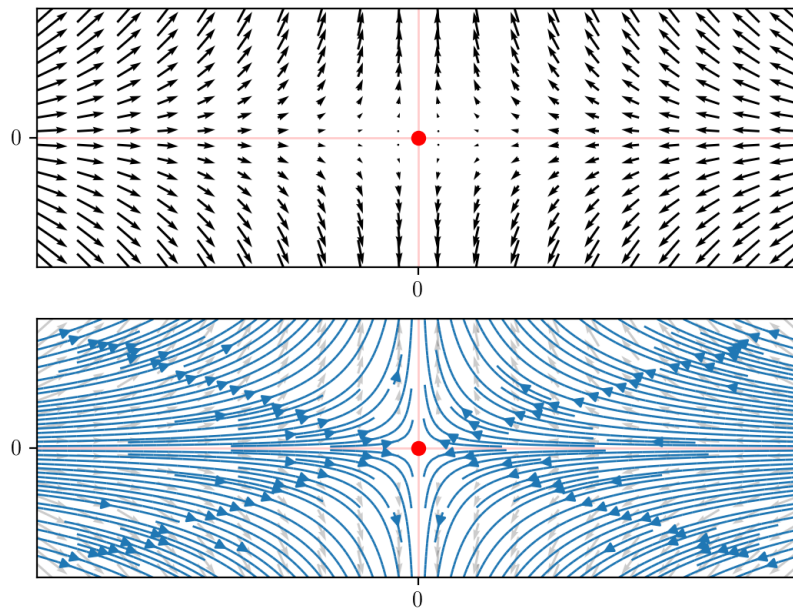


FIGURE 6 –  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

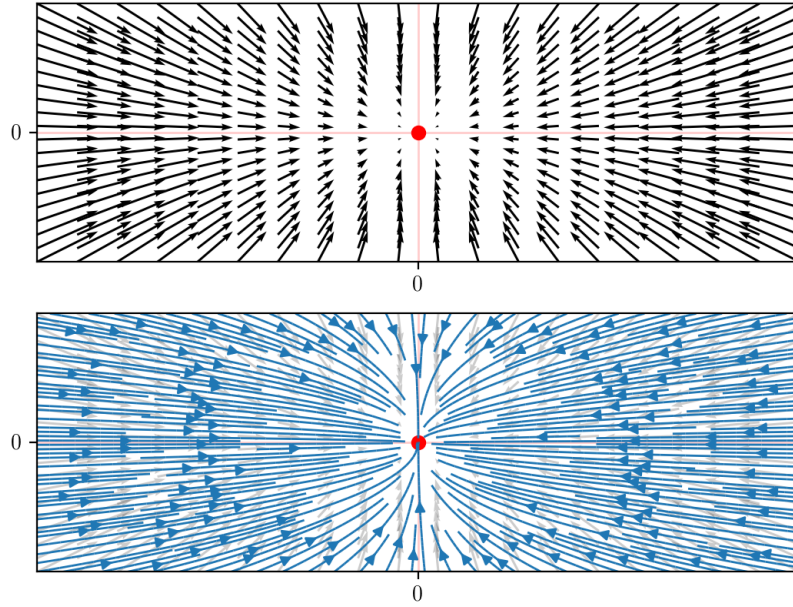


FIGURE 7 -  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

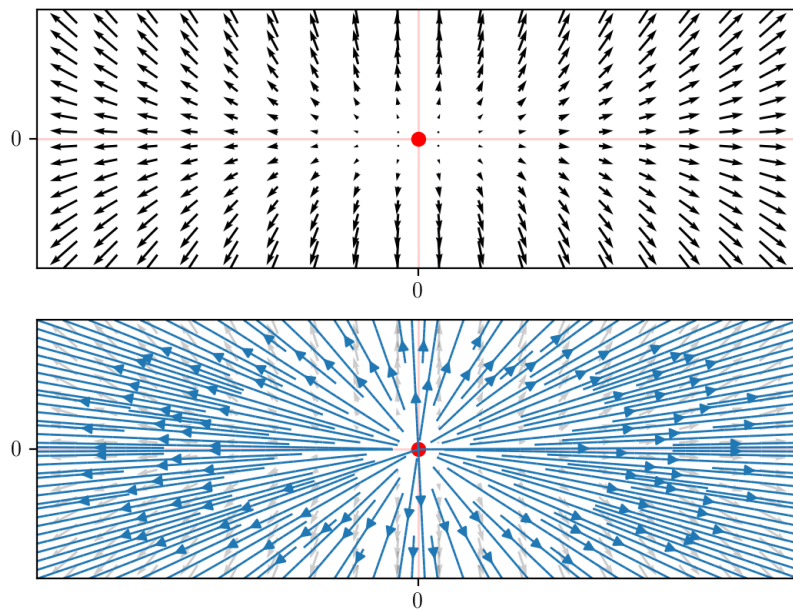


FIGURE 8 -  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  et  $A$  diagonalisable

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

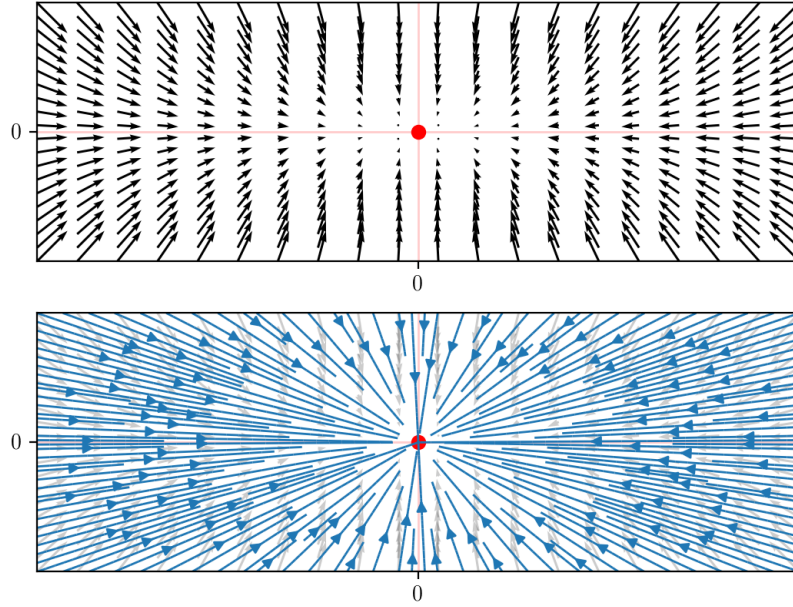


FIGURE 9 -  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  et  $A$  diagonalisable

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

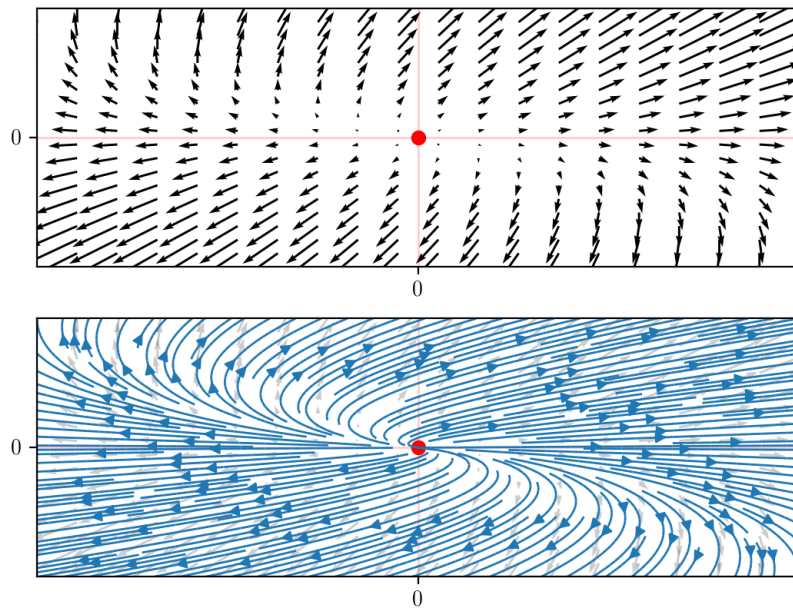


FIGURE 10 -  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  et  $A$  non diagonalisable

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

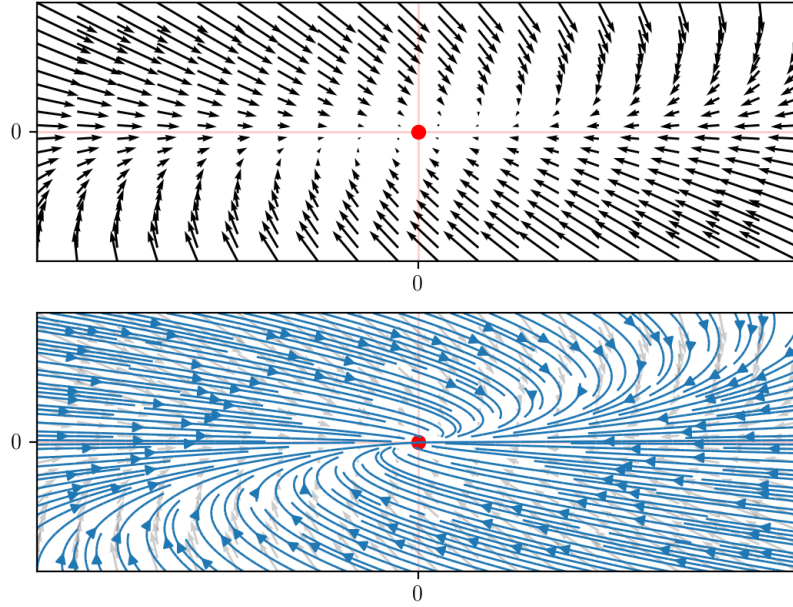


FIGURE 11 -  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  et  $A$  non diagonalisable

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$$

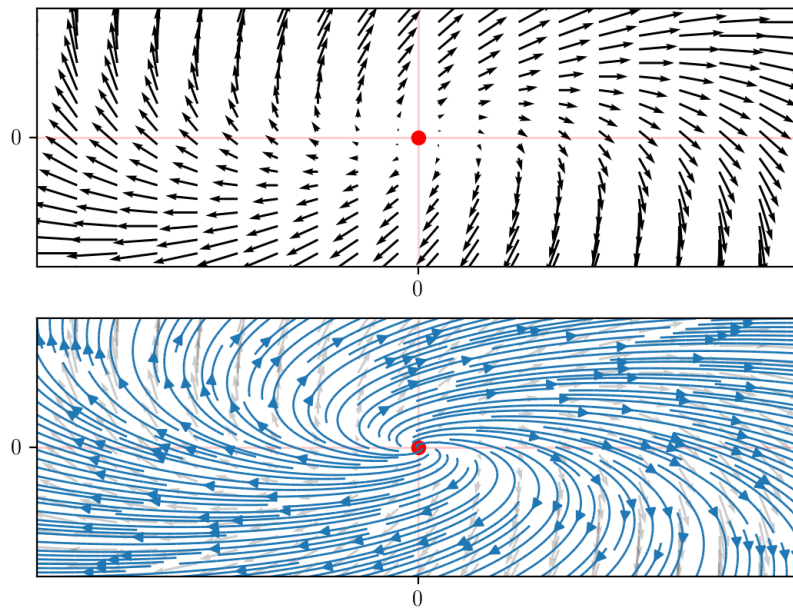


FIGURE 12 -  $\lambda = a \pm ib$  avec  $a, b > 0$



$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$$

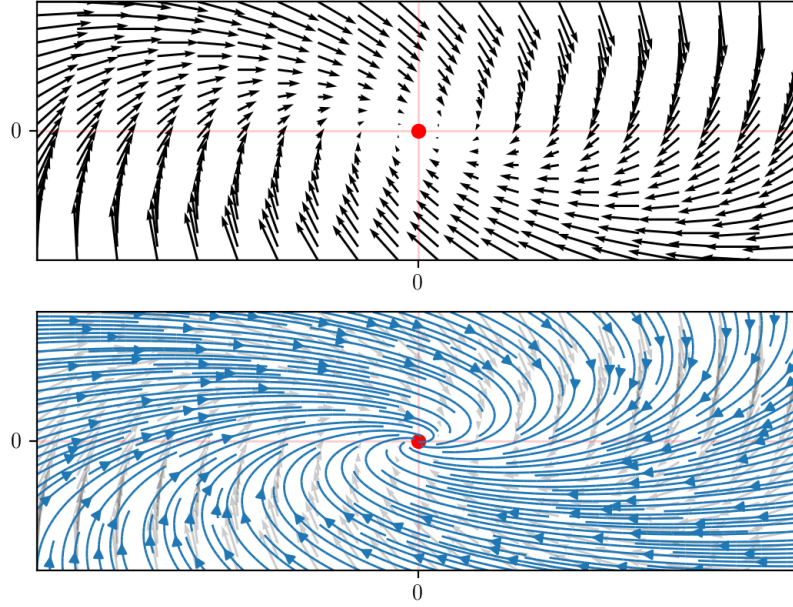


FIGURE 13 –  $\lambda = -a \pm ib$  avec  $a, b > 0$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

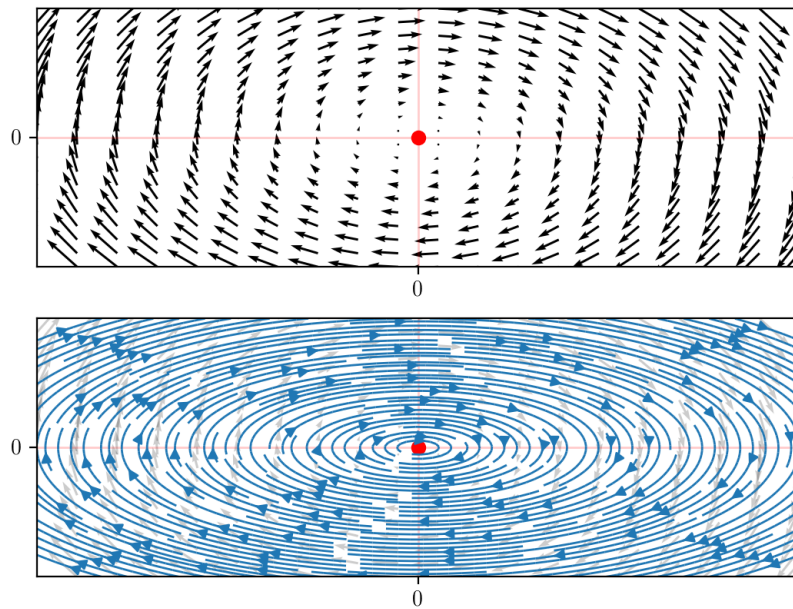


FIGURE 14 –  $\lambda = \pm ib$  avec  $b > 0$