Notes sur les équations différentielles
2022–2023

Vincent Perrollaz

11 avril 2023

Table des matières

1 Introduction

Définition 1. *Une équation différentielle ordinaire (i.e. EDO) est un problème consistant, étant donnés*

- *un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$,*
- *des entiers n, m et d strictement positifs,*
- *un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^{d(n+1)}$,*
- *une fonction F définie sur $I \times U$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ continue,*

à rechercher les fonctions $y : I \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^n$ vérifiant

$$\forall t \in I, \quad F(t, y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0. \tag{1}$$

1.1 Géométrie

De nombreuses équations différentielles ont une origine géométrique. On va donner un exemple particulièrement simple posé par Florimond de Beaune en 1638.

Énoncé. On considère le graphe $\mathcal{G} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x)\}$ d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$. La sous tangente à l'abscisse x_0 est le segment reliant le point $(x_0, 0)$ et l'intersection de la tangente à $\mathcal{G}$ en $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des abscisse (on consultera l'illustration de la construction sur la figure 1.1 page 3). Le problème consiste à déterminer les courbes dont les sous-tangentes ont une longueur orientée $l \in \mathbb{R}$ indépendante de l'abscisse.

Résolution. La tangente est d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, en résolvant $y = 0$ en la variable x on obtient

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On demande donc à ce que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad l = x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

C'est à dire qu'on cherche une fonction f vérifiant

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad lf'(x_0) + f(x_0) = 0.$$

Par rapport à la définition 1 On a $I = \mathbb{R}$, $d = 1$, $n = 1$, $m = 1$, $U = \mathbb{R}^2$ et $F(x, y_0, y_1) = ly_1 + y_0$, et la fonction inconnue est f.

1.2 Modélisation

Lors de l'étude d'un phénomène d'origine physique, chimique, biologique, économique. . .la mathématisation procède généralement suivant les objectifs *décrire/prédire/agir*. Les équations différentielles apparaissent souvent dans les deux dernières étapes. On va donner un exemple relevant des phénomènes de dynamique des population.

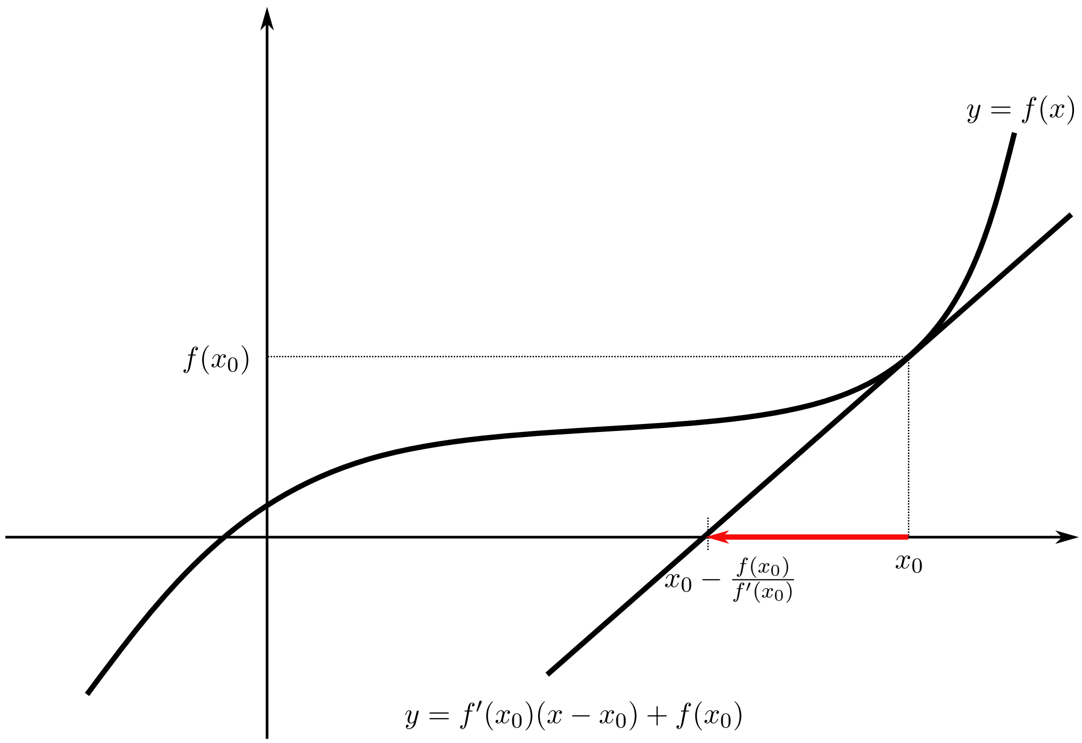

FIGURE 1 – Sous-tangente en rouge

Décrire. On va chercher à décrire l'évolution d'une population à travers le temps. Il peut s'agir de la population humaine de la planète, d'un pays, d'une ville...Il peut également s'agir d'une population d'animaux, d'insectes, de bactéries...

Une première approche pourrait consister à faire des recensements de la population à intervalles réguliers. On aurait donc une suite de valeurs $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

Mais la fréquence des recensements, et donc l'interprétation de l'indice n, reste à déterminer. On pourrait avoir $(p_n^a)_{n\geq 0}$ où n représente l'année (a pour annuel donc), mais aussi $(p_n^m)_{n\geq 0}$ (mensuel), $(p_n^h)_{n\geq 0}$ (hebdomadaire), $(p_n^j)_{n\geq 0}$ (journalier)...Le passage d'une fréquence plus grande à une plus petite est toujours possible (par exemple $p_n^a = p_{12n}^m$, $p_n^h = p_{7n}^j$). On voit qu'on aurait en fait intérêt à utiliser une échelle commune et donc à utiliser une fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ où le temps évolue de manière continue.

Les recensements consiste alors à *échantillonner* la fonction p à des moments discrets.

Prédire. Il est à peu près clair que pour tous les temps $t_1 < t_2$ on peut écrire

$$p(t_2) - p(t_1) = \mathcal{N}([t_1, t_2]) - \mathcal{D}([t_1, t_2]),$$

où $\mathcal{N}([t_1, t_2])$ représente les naissances dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ et $\mathcal{D}([t_1, t_2])$ représente les décès.

On a donc $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ des fonctionnelles à valeurs positives sur les sous ensembles de $\mathbb{R}$. Les naissances et décès étant, de plus, des évènements indivisibles, on en déduit que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont additives et donc des mesures. En les supposant (de manières abusives à moins de faire intervenir un aspect probabiliste) absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, on en déduit par le théorème de Radon-Nykodym l'existence de fonctions $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{d}$ (à priori juste mesurables et positives) telles que

$$\forall t_1 < t_2, \quad p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{n}(t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{d}(t)\mathrm{d}t,$$

Comme il est à priori évident que la quantité de naissances/décès est croissant avec la taille de la population, on peut invoquer le principe d'Ockham pour supposer, dans un premier temps, qu'à chaque instant t, $\mathfrak{n}(t)$ et $\mathfrak{d}(t)$ sont proportionnels à la population $p(t)$. Précisément cela revient à supposer qu'on ait des nombres réels τ_n et τ_d (les taux de naissances/décès) tels que $\mathfrak{n}(t) = \tau_n p(t)$ et $\mathfrak{d}(t) = \tau_d p(t)$. On aboutit donc à

$$\forall t_1 < t_2, \quad p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\tau_n - \tau_d)p(t)\mathrm{d}t.$$

et en divisant par $t_2 - t_1$ puis en faisant tendre $t_2 \to t_1$ on obtient finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{p}(t) = (\tau_n - \tau_d)p(t). \tag{2}$$

Dans ce contexte cette EDO s'appelle l'équation de Malthus. On remarquera que, mis à part des noms de variables et d'inconnus différents, on retombe sur l'équation géométrique de la Section 1.1 pour $l := \frac{1}{\tau_d - \tau_n}$. C'est un phénomène courant qui est en fait une des forces de la modélisation mathématiques. On connecte en effet des domaines à priori étrangers, ce qui permet de transférer des intuitions/heuristiques/interprétations.

Notons finalement (en anticipant sur la suite du cours) que l'aspect prédictif vient de ce qu'étant donné un instant t_0 et une valeur p_0 il existe une seule fonction $t \mapsto p(t)$ satisfaisant (2) et $p(t_0) = p_0$. Elle est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad p(t) = p_0 e^{(t-t_0)(\tau_n - \tau_d)}.$$

En termes moins mathématiques, la connaissance du présent ($p(t_0) = p_0$) détermine entièrement le futur (et *aussi* le passé dans ce cas).

Agir. On pourrait maintenant considérer que $p(t)$ représente une population de poissons et que la pêche est représentée par l'augmentation du taux de décès. Ainsi on aurait une fonction $a(t)$ définie valant 0 si la pêche est interdite à l'instant t et une constante A strictement positive si la pêche est autorisé. La population évolue alors suivant l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = (\tau_n - \tau_d(1 + a(t)))p(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases} \tag{3}$$

Mais la valeur de la fonction a est *à choisir*.

1. Une approche purement *consumériste* serait de vouloir déterminer la politique de pêche permettant de maximiser le nombre de poissons pêchés sur $[0, T]$ tout en n'autorisant la pêche qu'un certain ratio du temps $\theta \in [0, 1]$. Mathématiquement cela revient à déterminer $a : [0, T] \mapsto \{0, A\}$ vérifiant $\int_0^T a(t)\mathrm{d}t = A\theta$ et maximisant la quantité $\int_0^T a(t)p(t)\mathrm{d}t$ où p est la solution de (3) correspondant à ce choix de a.
2. Une autre approche, peut être plus respectueuse de l'environnement, consisterait à vouloir maximiser $p(T)$ sous la contrainte $\int_0^T a(t)\mathrm{d}t = A\theta$.

2 Utilisation des séries entières

On va traiter le cas de l'équation de Malthus par analyse-synthèse.

Analyse. On considère une fonction x de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

où α est un réel fixé.

On voit facilement par récurrence que x est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie

$$\forall n \geq 0, \quad x^{(n+1)}(t) = \alpha x^{(n)}(t).$$

On en déduit immédiatement par récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad x^{(n)}(t_0) = \alpha^n x_0.$$

Si on suppose que x est en fait *analytique*, cela montre que l'on a (en utilisant la série de Taylor)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0 \alpha^k}{k!} (t - t_0)^k = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}. \tag{5}$$

Synthèse. Il est clair que la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) := x_0 e^{\alpha(t-t_0)},$$

satisfait (4).

Conclusion. On a déterminé une solution de l'EDO (4) mais on a seulement montré que c'était la seule qui était analytique. Or, pour que le modèle soit réellement prédictif, il faut garantir que c'est en fait la seule parmi toutes les fonctions $\mathcal{C}^1$ (i.e. celles pour lesquelles l'EDO a un sens).

Remarque 1. *Cette approche par série entière est en fait très générale. Elle mène au théorème de Cauchy-Kowalewski. Celui-ci est trop technique pour être énoncé et démontré dans ce cours. On utilisera malgré tout régulièrement une approche par série entière pour « deviner » les formules et théorèmes.*

3 Équations à variables séparables

Définition 2. *Une équation différentielle est dite à variables séparables lorsqu'elle se ramène à écrire :*

$$\dot{x}(t) = a(t)b(x(t))$$

où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles.

Remarque 2. *Pour les équations à variables séparables, on peut effectuer* formellement *le calcul suivant.*

Si on définit $B(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{b(y)}$ alors

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = a(t)b(x(t)), \\ &\Longrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{b(x(t))} = a(t), \\ &\Longrightarrow B'(x(t))\dot{x}(t) = a(t), \\ &\Longrightarrow B(x(t)) = \int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s, \\ &\Longrightarrow x(t) = B^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Exemple 1. *Si $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ alors*

$$t \mapsto x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right),$$

est solution de

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ x(t) = a(t)x(t). \end{cases}$$

Exemple 2. *On applique la méthodologie des variables séparables pour constater que la solution de*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (x(t))^2, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7}$$

est donnée suivant trois configurations.

1. *Si $x_0 = 0$, on observe*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 0.$$
2. *Si $x_0 > 0$ on a par contre*
$$\forall t \in (-\infty\,;\, t_0 + 1/x_0)\,, \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$
3. *Si $x_0 < 0$ on a par contre*
$$\forall t \in (t_0 + 1/x_0\,;\, +\infty)\,, \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

On constate que dans les deux derniers cas, on n'a pas de solution globale. On dit qu'on a explosion en temps fini*.*

Exemple 3. *On s'intéresse ici à l'équation différentielle*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{8}$$

Cas $x_0 > 0$. *La méthodologie des variables séparables indique de considérer la formule*

$$x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t - t_0}{2}\right)^2.$$

Il y a cependant une subtilité : alors que le terme de droite est définie sur $\mathbb{R}$ entier, on peut constater qu'en fait la formule satisfait la relation différentielle uniquement pour $t \geq t_0 - 2\sqrt{x_0}$, c'est à dire là où $\sqrt{x_0} + \frac{t-t_0}{2} \geq 0$.

On voit alors que la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) := \begin{cases} \left(\sqrt{x_0} + \frac{t-t_0}{2}\right)^2 & si\ t \geq t_0 - 2\sqrt{x_0}, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

est solution de (8). On notera en particulier que le raccord en $T := t_0 - 2\sqrt{x_0}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Mais on constate facilement que x est également solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(T) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Or la fonction constante identiquement égale à 0 est également solution de (9). Il n'y a donc pas d'unicité, même localement près de T.

Cas $x_0 < 0$. *On détermine comme solution*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) := \begin{cases} -\left(\sqrt{-x_0} - \frac{t-t_0}{2}\right)^2 & si\ t \leq t_0 + 2\sqrt{-x_0} \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{10}$$

Si $T := t_0 + 2\sqrt{-x_0}$, on a de nouveau non unicité pour l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(T) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Cas général. *Pour tous réels $a \leq b$ la fonction définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_{a,b}(t) := \begin{cases} -\left(\frac{a-t}{2}\right)^2 & si\ t < a \\ 0 & si\ a \leq t \leq b \\ \left(\frac{t-b}{2}\right)^2 & si\ t > b, \end{cases} \tag{12}$$

vérifie bien $x_{a,b} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ainsi que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}.$$

- *Pour* $x_0 > 0$ *on pose* $b_0 := t_0 - 2\sqrt{x_0}$ *et alors pour tout réel* $a \leq b_0$*, la fonction* x_{a,b_0} *est solution de* (8)*.*
- *Si* $x_0 < 0$ *on pose* $a_0 = t_0 + 2\sqrt{-x_0}$ *et pour tout* $b \geq a_0$ *la fonction* $x_{a_0,b}$ *est solution de* (8)*.*
- *Finalement pour* $x_0 = 0$*, dès que* $a \leq t_0 \leq b$ *la fonction* $x_{a,b}$ *est solution de* (8)*.*

Dans tous les cas, l'EDO (8) *admet donc une infinité de solutions. Le pouvoir prédictif du modèle est donc extrêmement limité.*

4 Équation différentielles linéaires d'ordre 1

Proposition 1 (Problème homogène)**.** *Soient*

- t_0 *et* x_0 *des réels,*
- I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0*,*
- a *une fonction continue définie sur* I *à valeurs réelles.*

Alors une fonction x *est solution de*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t), & \forall t \in I, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

Remarque 3. *Notez que la proposition précédente montre, en particulier, que l'ensemble des solutions de*

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t),$$

est un espace vectoriel de dimension 1 *dont une base est la fonction* $t \mapsto \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right)$*.*

Proposition 2 (Problème non homogène)**.** *Soient*

- t_0 *et* x_0 *des réels,*
- I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0*,*
- a *et* b *des fonctions continues, définies sur* I *et à valeurs réelles.*

Alors une fonction x *est solution de*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), & \forall t \in I, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} a(r)\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}s.$$

Remarque 4. *On peut constater que la solution générale du problème non homogène est la somme de n'importe quelle solution particulière du problème non homogène et de la solution générale du problème homogène.*

Remarque 5. *Pour trouver le résultat précédent, on peut utiliser la méthode du « facteur* *intégrant » qui correspond aux calculs suivant. Dans le cas homogène, on a*

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = a(t)x(t) && \forall t \in I\\
&\Longrightarrow \dot{x}(t) - a(t)x(t) = 0 && \forall t \in I\\
&\Longrightarrow \ (\dot{x}(t) - a(t)x(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) = 0 && \forall t \in I\\
&\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right)\right) = 0 && \forall t \in I\\
&\Longrightarrow x(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) = x(t_0) && \forall t \in I\\
&\Longrightarrow x(t) = x(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) && \forall t \in I.
\end{aligned} \tag{13}$$

Puis dans le cas non homogène

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)\\
&\Longrightarrow \dot{x}(t) - a(t)x(t) = b(t)\\
&\Longrightarrow \ (\dot{x}(t) - a(t)x(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) = b(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right)\\
&\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right)\right) = b(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right)\\
&\Longrightarrow x(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\\
&\Longrightarrow x(t) = x(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(\int_{s}^{t} a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{14}$$

Remarque 6. *On peut, aussi, trouver la formule du cas non homogène par la méthode dite « de variation de la constante ».*

Comme la formule générale de résolution de l'équation homogène est

$$x(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right),$$

on va chercher la solution de l'équation non homogène sous la forme

$$x(t) = \lambda(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

En injectant la nouvelle inconnue λ dans l'EDO, on obtient

$$\dot{\lambda}(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) = b(t).$$

Et comme on sait $\lambda(t_0) = x_0$, on peut finir le calcul en effectuant une intégration.

5 Solution maximale

Définition 3. *Soient*

- I *un intervalle ouvert non vide de* $\mathbb{R}$*,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel de dimension finie,*
- U *un ouvert non vide de* E*,*
- F *une application continue, définie sur* $I \times U$ *et à valeurs dans* E*.*

Une solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \tag{15}$$

est la donnée

- *d'un intervalle ouvert non vide* J *inclus dans* I*,*
- *d'une application* x*, définie sur* J*, à valeurs dans* U*, de classe* $\mathcal{C}^1$ *et vérifiant* (15) *pour tout* t *dans* J*.*

Définition 4. *Soient*

- I *un intervalle ouvert non vide de* $\mathbb{R}$*,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel de dimension finie,*
- U *un ouvert non vide de* E*,*
- F *une application continue, définie sur* $I \times U$ *et à valeurs dans* E*.*

Une solution $x : J_1 \to U$ *de*

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \tag{16}$$

est dite maximale lorsque si $y : J_2 \to U$ *est une autre solution vérifiant*

$$\forall t \in J_1 \cap J_2, \quad x(t) = y(t), \tag{17}$$

on peut en déduire $J_2 \subset J_1$*.*

Remarque 7. *Une solution est donc maximale au sens où elle définie sur le plus grand intervalle de temps possible.*

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soient*

- t_0 *un réel,*
- I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0*,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,*
- x_0 *un point de* E*,*
- U *un ouvert de* E *contenant* x_0*,*
- F *une fonction définie sur* $I \times U$*, à valeurs dans* E *et de classe* $\mathcal{C}^1$

Alors, il existe une unique solution maximale du problème — dit de Cauchy —

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{18}$$

Théorème 2 (Condition nécessaire de maximalité). *Soient*

- t_0 *un réel,*
- I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0*,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,*
- x_0 *un point de* E*,*
- F *une fonction continue, définie sur* $]\alpha, \beta[\times E$*, à valeurs dans* E*.*

Soit $]a, b[$ *l'intervalle de définition de la solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{19}$$

On a alors

$$\begin{cases} \|x(t)\|_E \to +\infty & \text{si } t \to a^+ \text{ et } a > \alpha, \\ \|x(t)\|_E \to +\infty & \text{si } t \to b^- \text{ et } b < \beta. \end{cases} \tag{20}$$

Exercice 1. *On peut revisiter les exemples 1, 2 et 3 pour déterminer si les théorèmes précédents s'appliquent ou pas et identifier les solutions maximales.*

Exemple 4. *Étant donnés deux réels* x_0 *et* t_0 *on veut déterminer les solutions maximales de*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (x(t))^3, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

On voit tout d'abord que par rapport au Théorème précédent on a le flux $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *défini par* $F(t, x) = x^3$*. Il est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par les théorèmes usuels donc on sait déjà qu'il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy considéré.*

Si $x_0 = 0$ *il est facile de constater que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et valant partout* 0 *est justement cette solution maximale.*

Si x_0 *est non nul, la méthode de séparation des variables suggère de considérer la fonction* x *définie par*

$$\forall t \in \left]-\infty, t_1\right[, \qquad x(t) := \frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2(t - t_0)}},$$

où on a définit $t_1 := t_0 + 1/x_0^2$*.*

Un simple calcul montre bien qu'elle satisfait le problème de Cauchy voulu et comme on a

$$x(t) \underset{t \to t_1}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } x_0 > 0, \\ -\infty & \text{si } x_0 < 0. \end{cases}$$

on en déduit qu'elle maximale.

6 Formulation intégrale, Lemme de Gronwall, Unicité

On commence par une reformulation des EDO, plus maniable du point de vue théorique.

Théorème 3. *Soient*

- t_0 *un réel,*
- I *un intervalle ouvert contenant* t_0*,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,*
- x_0 *un point de* E*,*
- U *un ouvert de* E *contenant* x_0*,*
- F *une fonction continue, définie sur* $I \times U$ *et à valeurs dans* E*,*
- x *une fonction définie sur* I *et à valeurs dans* U*.*

Alors il y a équivalence entre

(i) la fonction x *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et vérifie*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \forall t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{21}$$

(ii) la fonction x *est continue et vérifie*

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s)) \mathrm{d}s. \tag{22}$$

On fournit maintenant un résultat classique très pratique pour obtenir des estimations sur des solutions d'EDO.

Théorème 4 (Lemme de Gronwall)**.** *Soient*

- t_0 *un réel,*
- I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0*,*
- a *un réel,*
- b *une fonction continue, définie sur* I *et à valeurs positives,*
- x *une fonction continue, définie sur* I *et à valeurs réelles.*

On suppose que

$$\forall t \in I, \quad x(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} b(s) x(s) \mathrm{d}s. \tag{23}$$

Alors on en déduit

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \implies x(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} b(s) \mathrm{d}s \right). \tag{24}$$

Définition 5. *Soient*

- I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension fini,*
- U *un ouvert non vide de* E*.*

Une fonction F définie sur $I \times U$ à valeurs dans E est dite localement lipschitzienne en la seconde variable lorsque

$$\begin{aligned}&\forall(\bar{t},\bar{x}) \in I \times U, \quad \exists \epsilon > 0, \quad \exists K > 0, \quad \forall(t,a,b) \in I \times U^2,\\ &\qquad |t-\bar{t}| + \|a-\bar{x}\|_E + \|b-\bar{x}\|_E \leq \epsilon \implies \|F(t,a)-F(t,b)\|_E \leq K\|a-b\|_E, \end{aligned} \tag{25}$$

En appliquant le Lemme de Gronwall, on obtient le résultat d'unicité suivant pour les équations différentielles.

Théorème 5 (Cauchy-Lipschitz : Unicité)**.** *Soient*

- t_0 *un réel,*
- I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0*,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,*
- U *un ouvert non vide de* E*,*
- F *une fonction continue, définie sur* $I \times U$*, à valeurs dans* E *et localement lipschitzienne en la seconde variable,*
- x_1 *et* x_2 *des fonctions définies sur* I *à valeurs dans* U *de classe* $\mathcal{C}^1$*.*

Alors si on a

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = F(t, x_1(x)) & \forall t \in I,\\ \dot{x}_2(t) = F(t, x_2(x)) & \forall t \in I,\\ x_1(t_0) = x_2(t_0)\end{cases} \tag{26}$$

on en déduit

$$\forall t \in I, \quad x_1(t) = x_2(t). \tag{27}$$

Remarque 8. *Notons que l'hypothèse sur F est une conséquence directe de $F \in \mathcal{C}^1(I \times U; E)$ qui est plus « contraignante » mais* beaucoup *plus facile à vérifier* lorsqu'elle *est vraie.*

7 Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Théorème 6 (Cas de l'équation homogène)**.** *Soient*

- t_0 *un réel,*
- a, b *des réels,*
- x_0 *et* x_1 *deux réels.*

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0 \qquad \textit{pour } t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = x_1. \end{cases} \tag{28}$$

Pour ce faire on définit le polynôme $P = X^2 + aX + b$*. On a alors trois situations distinctes.*

1. *Lorsque* P *a deux racines réels distinctes* r_1, r_2, x *est une solution de* (28) *si et seulement si*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{x_1 - r_2 x_0}{r_1 - r_2} e^{r_1(t-t_0)} + \frac{r_1 x_0 - x_1}{r_1 - r_2} e^{r_2(t-t_0)}. \tag{29}$$
2. *Lorsque* P *a une racine double* $r \in \mathbb{R}$, x *est solution de* (28) *si et seulement si*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \left((x_1 - r x_0)(t - t_0) + x_0\right) e^{r(t-t_0)}. \tag{30}$$
3. *Lorsque* P *a deux racines complexes (conjuguées car* P *est à coefficients réels)* $r - i\theta$, $r + i\theta$ *(*$\theta \neq 0$ *car on a exclu le cas précédent),* x *est solution de* (28) *si et seulement si*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^{r(t-t_0)} \left(x_0 \cos(\theta(t-t_0)) + \frac{x_1 - r x_0}{\theta} \sin(\theta(t-t_0)) \right) \tag{31}$$

Remarque 9. *On ne cherchera* ***EN AUCUN CAS*** *à mémoriser les formules exactes. On commencera plutôt par rechercher des solutions sous l'une des formes voulues par la situation*

$$t \mapsto \alpha e^{r_1(t-t_0)} + \beta e^{r_2(t-t_0)}, \tag{32}$$
$$t \mapsto (\alpha(t-t_0) + \beta) e^{r(t-t_0)}, \tag{33}$$
$$t \mapsto e^{r(t-t_0)} \left(\alpha \cos(\theta(t-t_0)) + \beta \sin(\theta(t-t_0))\right), \tag{34}$$

puis on utilisera les conditions en t_0 *pour déterminer* α *et* β.

Remarque 10. *On constate que le théorème précédent assure en particulier que l'espace des solutions d'une EDO* $\ddot{x} + a\dot{x} + b = 0$ *est un espace vectoriel de dimension 2. Et dans chacun des cas on a fourni une base.*

Remarque 11. *On pourrait obtenir une forme identique dans le premier et le troisième cas, à condition d'utiliser les cosinus et sinus hyperboliques :*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Exercice 2. *Déterminer les solutions générales des équations :*

(i) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$,

(ii) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0,$

(iii) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0,$

Théorème 7 (Cas de l'équation non homogène)**.** *Soient*

- t_0 *un réel,*
- a*,* b *des réels,*
- x_0 *et* x_1 *deux réels.*
- f *une application continue définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles.*

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = f(t) & \textit{pour } t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = x_1. \end{cases} \tag{35}$$

Pour ce faire on se donne

1. y_1 *la solution du problème homogène satisfaisant* $y_1(t_0) = 1$ *et* $\dot{y_1}(t_0) = 0,$
2. y_2 *la solution du problème homogène satisfaisant* $y_2(t_0) = 0$ *et* $\dot{y_2}(t_0) = 1.$

La solution de (35) *est alors donnée par la formule*

$$y(t) := x_0 y_1(t) + x_2 y_2(t) + \int_{t_0}^{t} e^{a(s-t_0)}(y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s))f(s)\mathrm{d}s. \tag{36}$$

Remarque 12. *Une nouvelle fois, on ne cherchera* ***PAS*** *à retenir la formule. On utilisera plutôt la méthode de la variation de la constante. En utilisant la remarque 10, on cherche donc la solution de* (35) *sous la forme :*

$$x(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t).$$

En dérivant une première fois, on obtient

$$\dot{x}(t) = \dot{\alpha}(t)y_1(t) + \dot{\beta}(t)y_2(t) + \alpha(t)\dot{y}_1(t) + \beta(t)\dot{y}_2(t).$$

Mais comme on a remplacé une fonction inconnue x, par deux fonctions inconnues α et β, on a gagné un degré de liberté. On a donc la possibilité d'introduire une équation supplémentaire.

Pour que la résolution en α, β soit plus simple que celle en x, l'idée est de la réduire d'une dérivée. A cette fin il est donc naturel de tuer les termes différentiels en α, β apparaissant dans $\dot{x}$.

On requiert donc, de manière artificielle,

$$\forall t \in I, \quad \dot{\alpha}(t)y_1(t) + \dot{\beta}(t)y_2(t) = 0,$$

dont on déduit qu'en fait

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = \alpha(t)\dot{y}_1(t) + \beta(t)\dot{y}_2(t).$$

Puis

$$\forall t \in I, \quad \ddot{x}(t) = \dot{\alpha}(t)\dot{y}_1(t) + \dot{\beta}(t)\dot{y}_2(t) + \alpha(t)\ddot{y}_1(t) + \beta(t)\ddot{y}_2(t).$$

On a ensuite

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = \dot{\alpha}(t)\dot{y}_1(t) + \dot{\beta}(t)\dot{y}_2(t).$$

On a, de fait, l'équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Et on sait résoudre explicitement ce système. En effet, on vérifie facilement que le déterminant de la matrice $d(t) := y_1(t)\dot{y_2}(t) - \dot{y_1}(t)y_2(t)$ *est solution de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} \dot{d}(t) = -ad(t) \\ d(t_0) = 1, \end{cases}$$

on peut donc le calculer explicitement.

Exercice 3. *Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = \cos(t), \\ x(0) = 1, \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

Remarque 13. *Comme dans le cas de l'ordre 1, on constate que la solution générale de l'équation non homogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène. Dans le cas où il y a une solution évidente à cette dernière on ne passera donc* ***PAS*** *par la méthode de la variation de la constante.*

Exercice 4. *Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = t, \\ x(0) = 1, \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

8 Systèmes d'équations différentielles

Remarque 14. *Une équation donnée sous la forme* (1) *peut en fait toujours être mise sous la forme d'une équation d'ordre 1 vectorielle. L'idée si l'on part de*

$$\forall t \in I, \quad F(t, y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0,$$

est de rajouter des équations et des inconnues pour les dérivées intermédiaires pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y_1(t), \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-2}(t) = y_{n-1}(t), \\ F(t, y(t), y_1(t), \ldots, \dot{y}_{n-1}(t)) = 0. \end{cases}$$

Exemple 5. *En utilisant la méthodes précédente on peut réécrire*

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0,$$

en

$$\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -c\, y - b\, z. \end{cases}$$

Si $X = (y, z)$ on a donc en fait l'équation différentielle vectorielle

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} X$$

On notera au passage que la matrice intervenant dans l'équation a pour polynôme caractéristique (au sens de l'algèbre linéaire) le polynôme caractéristique (au sens des EDO.) de l'équation différéntielle.

Exercice 5. *Appliquer la méthodologie à l'équation*

$$\dddot{y} + b\ddot{y} + c\dot{y} + dy = 0.$$

Théorème 8. *Soient*

- *t_0 un réel,*
- *d un entier strictement positif,*
- *A une matrice $d \times d$ à coefficients réels,*
- *x_0 un point de $\mathbb{R}^d$.*

Une fonction x est solution maximale de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si et seulement si on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x_0 \frac{(t - t_0)^k}{k!} = e^{A(t-t_0)} x_0.$$

Remarque 15. *La résolution d'équations linéaires à coefficients constants se ramène donc à un calcul d'exponentiel. On s'appuiera sur le cours d'algèbre pour diagonaliser quand c'est possible ou alors on effectuera une décomposition de Dunford.*

Exemple 6. *On va chercher la solution générale de l'équation*

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

Si on appelle A la matrice du problème on est donc ramené à calculer e^{tA} pour un réel t quelconque.

Méthode 1. *On peut vérifier que le polynôme caractéristique a pour racines i et $-i$, la matrice étant 2×2 elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Un rapide calcul montre qu'en fait :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Méthode 2. *Un rapide calcul montre que $A^2 = -\mathrm{Id}$, $A^3 = -A$ et $A^4 = \mathrm{Id}$. Cela permet d'obtenir*

$$A^k = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si } 4 \mid k \\ A & \text{si } 4 \mid k-1 \\ -\mathrm{Id} & \text{si } 4 \mid k-2 \\ -A & \text{si } 4 \mid k-3. \end{cases}$$

On peut alors conclure via

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k} A^{4k}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+1} A^{4k+1}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+2} A^{4k+2}}{(4k+2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+3} A^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k} (\mathrm{Id})}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+1} (A)}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+2} (-\mathrm{Id})}{(4k+2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k+3} (-A)}{(4k+3)!} \\ &= \mathrm{Id} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(t)\mathrm{Id} + \sin(t) A \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Méthode 3. *On peut juste constater que le système est équivalent à chercher la solution générale de* $\ddot{y} + y = 0$ *via* $X = (y \quad \dot{y})^T$ *et on utilise alors les idées du chapitre précédent.*

Exemple 7. *On veut déterminer la solution générale du système*

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X.$$

On rappelle au passage que $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$ *lorsque* $A\,B = B\,A$ *grâce à la formule du binôme de Newton ! Ici on note*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

avec D *diagonalisable (en fait ici carrément diagonale),* N *nilpotente (car* $N^2 = 0$*) et* $D\,N = N\,D$*. C'est à dire qu'on a obtenu la décomposition de Dunford de* A*, notez bien que* A *n'est pas diagonalisable.*

Cela nous permet alors d'effectuer le calcul suivant.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \mathrm{e}^{t(D+N)} \\ &= \mathrm{e}^{tD} \mathrm{e}^{tN} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} (\mathrm{Id} + tN + 0 + 0 + \cdots) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & t\,e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 8. *On va montrer une autre méthode ici ne reposant pas sur la diagonalisation et le calcul de* e^{tA}*.*

On cherche la solution générale de

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 4y + 8z \\ \dot{y} = -2x - 5y + 14z \\ \dot{z} = -x - 4y + 10z \end{cases} \tag{37}$$

On voit que si l'on considère le vecteur $X := (x\,y\,z)^T$ *on obtient*

$$\dot{X} = AX, \quad \textit{où} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -2 & -5 & 14 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Un calcul classique montre que l'on a $A\,f_1 = f_1$*,* $A\,f_2 = 2f_2$ *et* $A\,f_3 = 3f_3$ *en posant*

$$f_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{et} \quad f_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

L'idée pour résoudre le système (38) *est alors de chercher la solution sous la forme*

$$X(t) = a(t)f_1 + b(t)f_2 + c(t)f_3, \tag{40}$$

ce qui est possible car f_1, f_2, f_3 est une base grâce aux théorèmes usuels d'algèbre linéaire.

On vérifie alors facilement que a, b et c vérifie les équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{a} = a, \\ \dot{b} = 2b, \\ \dot{c} = 3c. \end{cases} \tag{41}$$

On conclut alors que la solution générale de (38) *est donnée par*

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & -2e^{3t} \\ 2e^t & 2e^{2t} & -3e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & -2e^{3t} \end{pmatrix} X_0. \tag{42}$$

Théorème 9. *Soient*

- t_0 *un réel,*
- I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0*,*
- b *une application continue, définie sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*,*
- d *un entier strictement positif,*
- A *une matrice* $d \times d$ *à coefficients réels,*
- x_0 *un point de* $\mathbb{R}^d$*.*

Une fonction x est solution maximale de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

si et seulement si on a

$$\forall t \in I, \quad x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} b(s) \mathrm{d}s.$$

Exemple 9. *On cherche ici la solution générale de*

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + b(t). \tag{43}$$

En utilisant l'exemple 6, on sait que la solution du problème homogène s'écrit

$$t \mapsto R(t)X_0 \quad \textit{où} \quad R(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \tag{44}$$

On cherche donc la solution du problème homogène sous la forme $X(t) = R(t)Y(t)$ *où* Y *est à valeurs dans* $\mathbb{R}^3$*. En injectant dans* (43) *on voit que* Y *doit satisfaire*

$$R(t)\dot{Y}(t) = b(t). \tag{45}$$

Cela permet de déterminer Y *et finalement d'obtenir*

$$X(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)b(x) \mathrm{d}s. \tag{46}$$

On a été amené dans les calculs à utiliser la relation fondamentale sur R

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, \quad R(t)R(s) = R(t+s). \tag{47}$$

Exercice 6. *Déterminer la solution générale de*

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) + b(t). \tag{48}$$

Remarque 16. *On fera le lien, grâce à la remark 14, entre la méthode de la variation de la constante pour les systèmes linéaires que l'on vient de voir dans le Théorème 9 et la méthode de la variation de la constante pour les équations scalaires vu dans le chapitre précédent au Théorème 8.*

Exercice 7. *Soit* $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$*, déterminer la solution maximale de*

$$\left\{ \dddot{x}(t) - 2\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) + 2x(t) = \sin(t). \right. \tag{49}$$

On pourra comparer les différentes méthodes disponibles pour trouver la plus efficace.

9 Diagramme de phase et courbes intégrales

Définition 6. *Une équation différentielle est dite autonome si une fois mise sous la forme* $\dot{X}(t) = F(t, X(t))$*, la fonction* F *ne dépend en fait pas explicitement de* t*.*

Exemple 10. *Ainsi on voit que*

— $\dot{x}(t) = ax(t)$ *est autonome*

— $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$ *n'est pas autonome (sauf si la fonction* a *est constante)*

Théorème 10. *On considère*

1. t_0 *et* t_1 *deux réel,*
2. $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,*
3. U *un ouvert non vide de* E*,*
4. F *une application définie sur* U *à valeurs dans* E *et qui est localement lipschitzienne,*
5. X_0 *un point de* U*.*

On se donne $X :]a, b[\to U$ *la solution maximale de*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{50}$$

La solution maximale de

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = F(Y(t)) \\ Y(t_1) = X_0, \end{cases}$$

est la fonction définie sur $]a + t_1 - t_0, b + t_1 - t_0$ *et qui à* s *associe* $Y(s) := X(t_0 + s - t_1)$*.*

Définition 7. *Dans le cadre du théorème précédent, l'espace des phases est l'ouvert* U*. Le diagramme/portrait de phases est la donnée des courbes de* U *paramétrées par les solutions maximale de* (50)*. On appelle ces courbes les courbes intégrales et le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que par tout point de l'espace des phases passe une et une seule courbe intégrale. On pourra aussi visualiser le champs de vecteurs* F *par la donnée en chaque point de* p *de* U *du vecteur* $F(p)$*.*

Exercice 8. *Décrire l'espace des phases de* $\dot{x} = x^3 - x$*.*

On va visualiser différents portraits de phases correspondant au système

$$\dot{x} = Ax,$$

avec différent choix pour $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ suivant les propriétés spectrales voulues qui se refléteront en diverses propriétés géométriques du portrait de phases.

Exercice 9. *Esquisser l'espace des phases du système correspondant à* $E = \mathbb{R}^2$*,* $U :=]0, +\infty[^2$ *et* $F(x, y) = (x(1-x)(1-2y), -y(1-y)(1-2x))$*.*

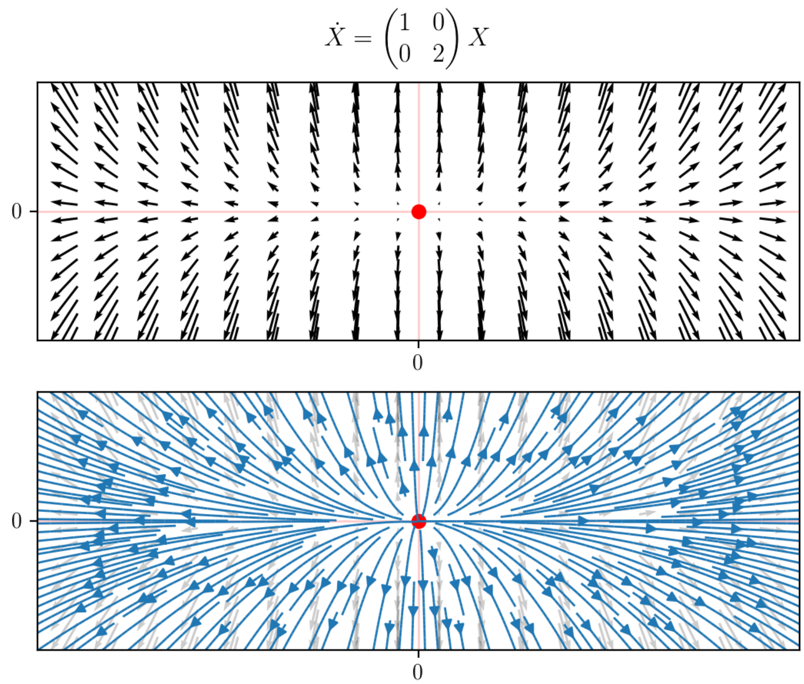

FIGURE 2 – $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

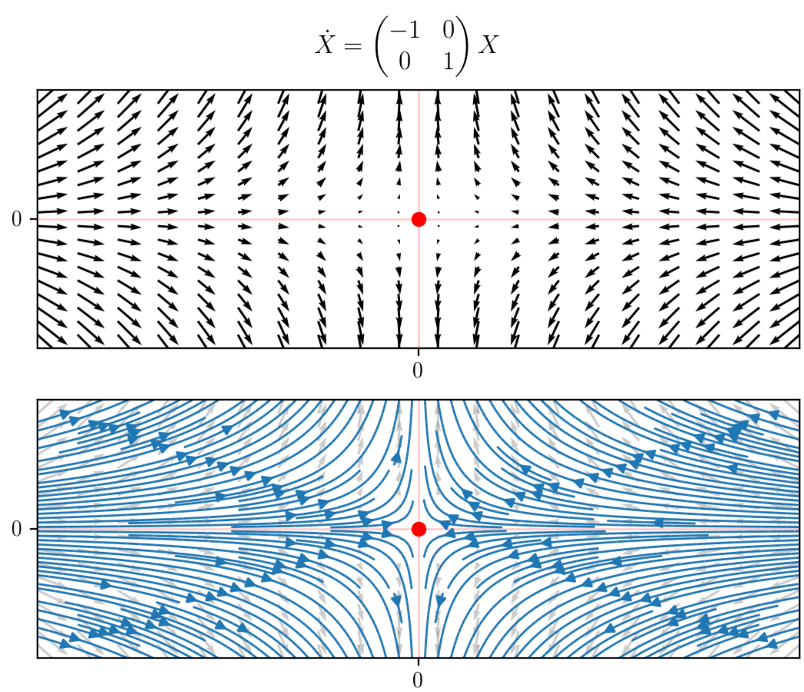

FIGURE 3 – $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

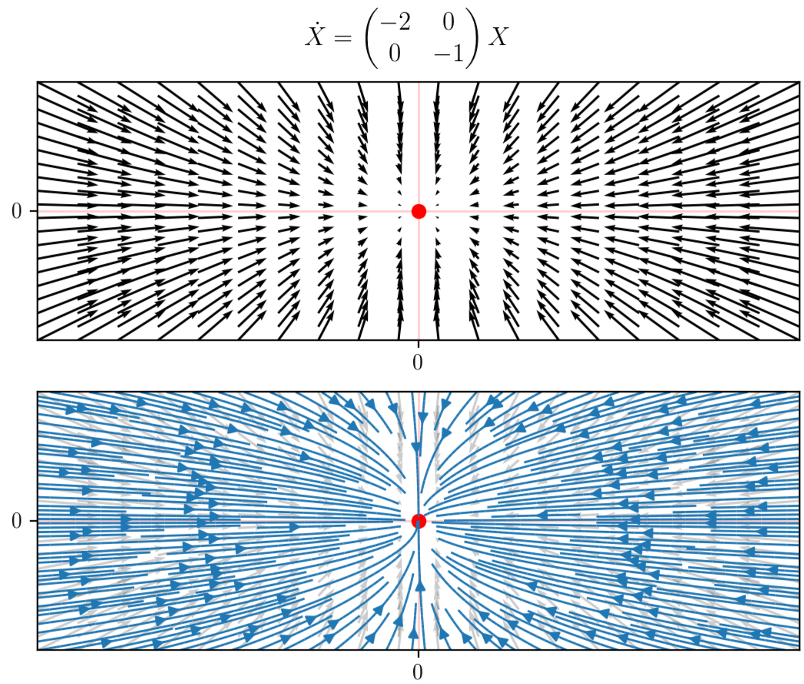

FIGURE 4 – $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

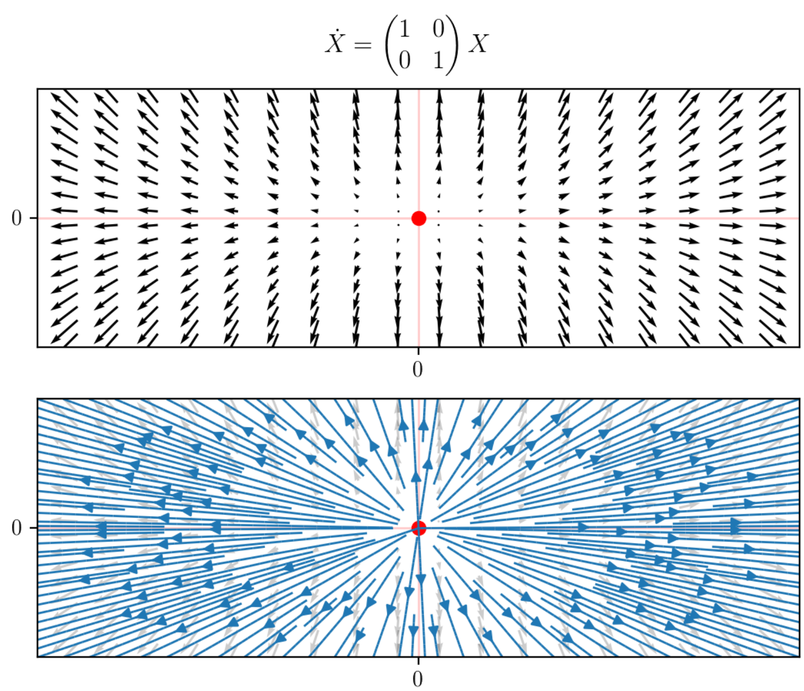

FIGURE 5 – $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ et A diagonalisable

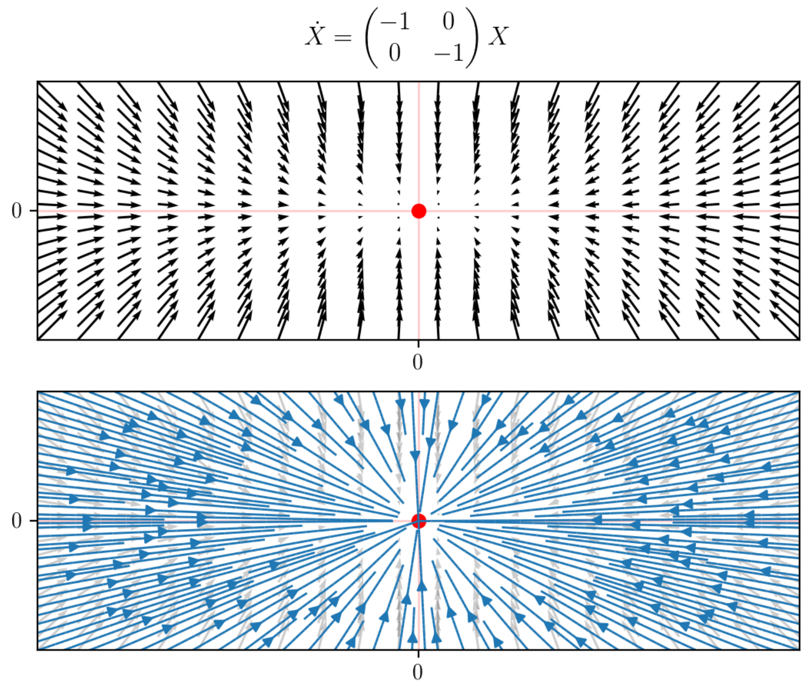

Figure 6 – $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ et A diagonalisable

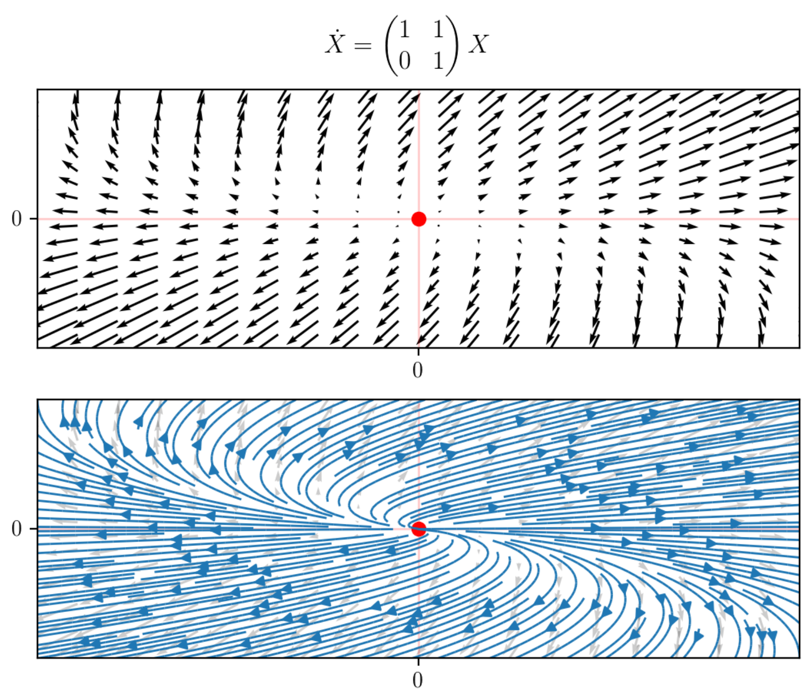

Figure 7 – $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ et A non diagonalisable

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

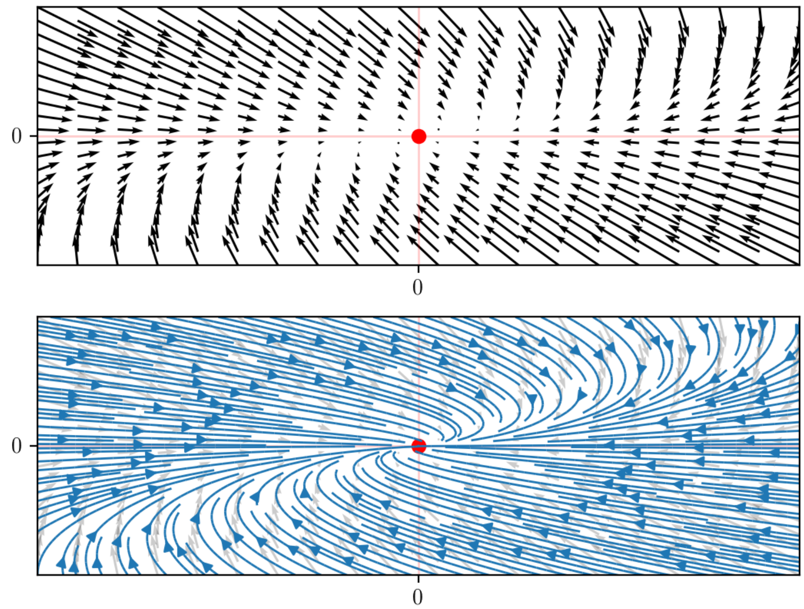

Figure 8 – $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ et A non diagonalisable

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$$

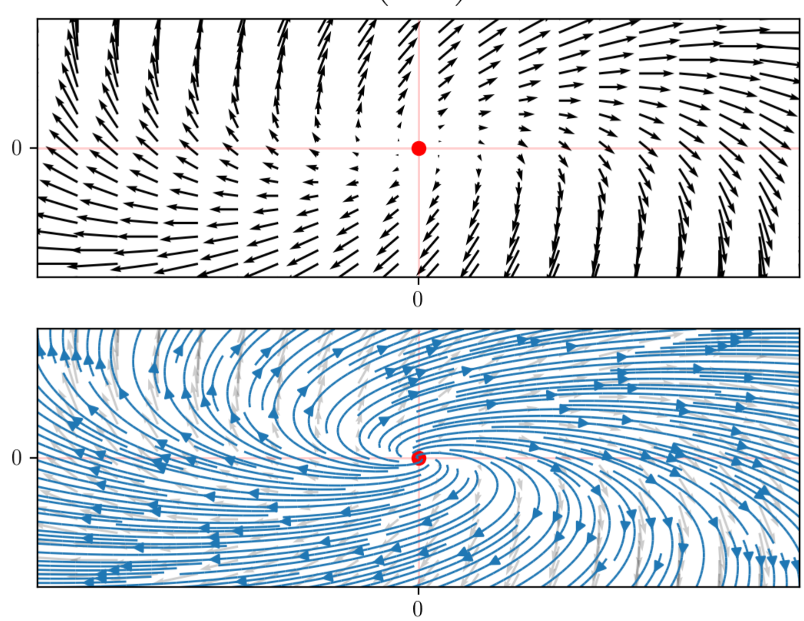

Figure 9 – $\lambda = a \pm ib$ avec $a, b > 0$

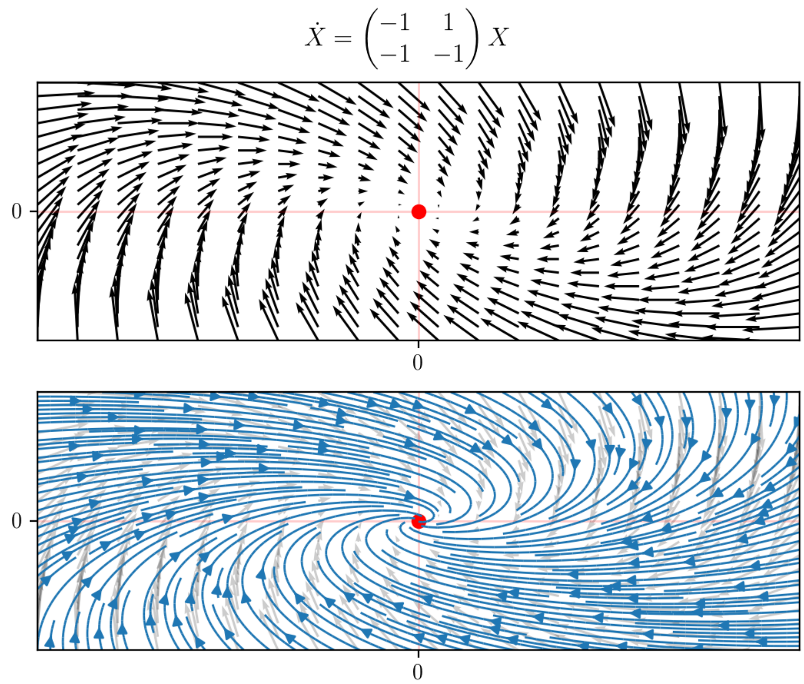

Figure 10 – $\lambda = -a \pm ib$ avec $a, b > 0$

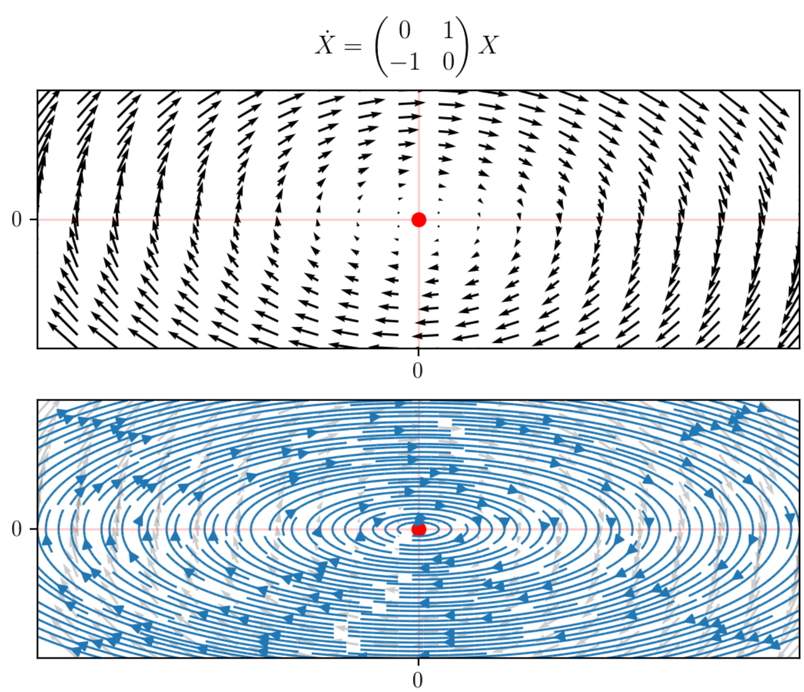

Figure 11 – $\lambda = \pm ib$ avec $b > 0$

10 Existence et maximalité

Théorème 11 (Cauchy-Lipschitz : Existence locale)**.** *Soient*

- t_0 *un réel,*
- I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* t_0*,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,*
- x_0 *un point de* E*,*
- U *un ouvert de* E *contenant* x_0*,*
- F *une fonction continue, définie sur* $I \times U$*, à valeurs dans* E *et localement lipschitzienne en la seconde variable.*

On choisit $\delta_1, \epsilon > 0$ *satisfaisant juste*

$$K := \{(t,x) \in R \times E \; : \; |t - t_0| \leq \delta_1, \quad \|x - x_0\|_E \leq \epsilon\} \subset U. \tag{51}$$

On définit alors

$$\begin{cases} M := \max\limits_{(t,x)\in K} \|F(t,x)\|_E, \\ \delta := \min\left(\delta_1, \frac{\epsilon}{M}\right). \end{cases} \tag{52}$$

Alors, il existe une fonction $x \in \mathcal{C}^1((t_0 - \delta; t_0 + \delta); U)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \forall t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta). \end{cases} \tag{53}$$

Théorème 12 (Cauchy-Lipschitz : alternative globale)**.** *Soient*

- t_0 *un réel,*
- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,*
- x_0 *un point de* E*,*
- F *une fonction continue, définie sur* $\mathbb{R} \times E$*, à valeurs dans* E *et telle qu'il existe un réel* $C > 0$ *satisfaisant*

$$\forall (t, a, b) \in \mathbb{R} \times E^2, \quad \|F(t,a) - F(t,b)\|_E \leq C\|a - b\|_E.$$

Alors, il existe une unique fonction x *définie sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* E *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{54}$$

Exemple 11. *On peut appliquer le théorème précédent à l'équation différentielle*

$$\dot{x}(t) = |x(t) - t|,$$

pour x *à valeurs réelles.*

Théorème 13 (Lemme des bouts)**.** *Soient*

- a*,* b*,* a_0 *et* b_0 *des réels tels que* $a < a_0 < b_0 < b$*,*

- $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie,*
- U *un ouvert non vide de* E,
- F *une application continue, définie sur* $(a;b) \times U$, *à valeurs dans* E *et localement lipschitzienne en la seconde variable,*
- x *une application définie sur* (a_0, b_0) *à valeurs dans* U *de classe* $\mathcal{C}^1$ *satisfaisant*

$$\forall t \in (a_0, b_0), \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t)). \tag{55}$$

Si il existe un compact K *de* E, *contenu dans* U *et tel que*

$$\forall t \in (a_0, b_0), \quad x(t) \in K,$$

on en déduit qu'il existe des réels $a_1 \in (a, a_0)$ *et* $b_1 \in (b_0, b)$ *et une fonction* $y \in \mathcal{C}^1((a_1; b_1); U)$ *tels que*

$$\begin{cases} \forall t \in (a_1; b_1), \quad \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \\ \forall t \in (a_0; b_0), \quad y(t) = x(t). \end{cases} \tag{56}$$

Remarque 17. *De manière informelle, si une solution de l'équation différentielle ne se rapproche pas du bord du domaine de définition de* F, *on peut la prolonger un peu plus longtemps.*

De manière plus précise, en prenant la contraposée du lemme des bouts, si on considère $x : (a_0, b_0) \mapsto U$ *une solution maximale de* (55) *alors on voit que quelque soient* $\delta > 0$ *et* K *un compact de* U *on a*

$$\begin{cases} \exists t_1 \in (a_0, b_0) \cap (b_0 - \delta, b_0), \quad x(t_1) \notin K, \\ \exists t_2 \in (a_0, b_0) \cap (a_0, a_0 + \delta), \quad x(t_2) \notin K, \end{cases}$$

Exemple 12. *On peut montrer en utilisant le lemme des bouts que si* α *et* t_0 *sont des réels quelconques et* $x_0 \in (0; 1)$ *alors la solution maximale de*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t)(1 - x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{57}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ *car elle vérifie* $x(t) \in (0; 1)$ *pour tout* t *dans son intervalle de définition. En effet, les fonctions*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} B_1(t) := 0, \\ B_2(t) := 1, \end{cases} \tag{58}$$

sont solutions maximale de (57), *et donc ne peuvent être « traversée » par* x *grâce au résultat d'unicité dans Cauchy-Lipschitz. Or on a sait* $B_1(t_0) < x(t_0) < B_2(t_0)$.