Cours d'Intégration de Lebesgue

Vincent Perrollaz

Contents

1 Tribus

Définition 1. *Soit X un ensemble et $\mathcal{T}$ une collection de sous ensembles de X. On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu lorsque*

1. *l'ensemble X est un élément de $\mathcal{T}$:*
$$X \in \mathcal{T}.$$
2. *il y a stabilité par passage au complémentaire :*
$$\forall E \subset X, \qquad E \in \mathcal{T} \Rightarrow {}^{C}E \in \mathcal{T}.$$
3. *il y a stabilité par réunion dénombrable :*
$$\forall (E_n)_{n\geq 0} \text{ suite de sous-ensembles de } X \ , \qquad (\forall n \geq 0,\ E_n \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcup_{n\geq 0} E_n \in \mathcal{T}.$$

On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un espace mesurable.

Exemples 1. 1. *Les collections $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ (la collection de tous les sous-ensembles de X) sont toujours des tribus de X. (Respectivement la plus petite et la plus grosse au sens de l'inclusion)*

2. *La collection des sous-ensembles de X étant au plus dénombrable ou de complémentaire au plus dénombrable est une tribu.*

Proposition 1. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace mesurable on a alors*

1. *L'ensemble vide est un élément de la tribu :*
$$\emptyset \in \mathcal{T}.$$
2. *La tribu est stable par intersection dénombrable*
$$\forall (E_n)_{n\geq 0} \text{ suite de sous-ensembles de } X \ , \qquad (\forall n \geq 0,\ E_n \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcap_{n\geq 0} E_n \in \mathcal{T}.$$

Corollaire 1. *Une tribu est stable par réunions et intersections finies.*

Définition 2. *Soit X un ensemble et $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous ensembles de X. On appelle limite supérieure et inférieure les sous ensembles de X suivants*
$$\limsup E_n := \bigcap_{n\geq 0} \left(\bigcup_{k\geq n} E_k \right), \qquad \liminf E_n := \bigcup_{n\geq 0} \left(\bigcap_{k\geq n} E_k \right).$$

Proposition 2. *Soit X un ensemble et $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-ensembles de X. On a les caractérisations suivantes des limites supérieures et inférieures.*
$$\limsup E_n = \{x \in X \ :\ \{k \geq 0\ :\ x \in E_k\} \text{ est infini}\},$$
c'est à dire l'ensemble des éléments de X appartenant à une infinité de E_n.
$$\liminf E_n = \{x \in X \ :\ \exists p \geq 0,\ \forall k \geq p,\ x \in E_k\},$$
c'est à dire l'ensemble des éléments de X appartenant à tous les E_n sauf à un nombre fini.

Proposition 3. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace mesurable et* $(E_n)_{n \geq 0}$ *une suite de sous ensembles de* X*. Si ces sous ensembles sont dans la tribu leurs limites supérieure et inférieure aussi :*

$$(\forall n \geq 0 \ E_n \in \mathcal{T}) \Rightarrow \limsup E_n \in \mathcal{T} \ \text{ et } \ \liminf E_n \in \mathcal{T}.$$

Proposition 4. *Soit* X *un ensemble. On se donne* $(\mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *une collection quelconque de tribus de* X *on a alors que leur intersection est encore une tribu :*

$$\{E \subset X \ : \ \forall \lambda \in \Lambda \ E \in \mathcal{T}_\lambda\} \text{ est une tribu.}$$

Définition 3. *Soit* X *un ensemble et* $\mathcal{C}$ *une collection de sous ensembles de* X*. On appelle tribu engendrée par* $\mathcal{C}$ *l'intersection de toutes les tribus contenant* $\mathcal{C}$ *et on la note* $\sigma(\mathcal{C})$*. Il s'agit de la plus petite tribu (au sens de l'inclusion ensembliste) contenant les ensembles de* $\mathcal{C}$*.*

Définition 4. *On rappelle qu'un sous ensemble* O *de* $\mathbb{R}^d$ *est un ouvert lorsque*

$$\forall x \in O, \ \exists r > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^d \ : \ ||y - x|| < r \Rightarrow y \in O.$$

On appelle alors tribu borélienne que l'on notera $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *la tribu engendrée par la collection composée de tous les ouverts de* $\mathbb{R}^d$*.*

2 Mesures

Définition 5. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace mesurable. Une mesure sur cet espace est une fonction* $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ *telle que l'ensemble vide est de mesure nulle (c'est à dire* $\mu(\emptyset) = 0$*) et qu'on ait la propriété d'additivité dénombrable pour des ensembles deux à deux disjoints :*

$$\forall (E_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \qquad (n \neq m \Rightarrow E_n \cap E_m = \emptyset) \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\geq 0} E_n) = \sum_{n\geq 0} \mu(E_n).$$

On notera que la somme du terme de droite est toujours bien définie (mais potentiellement $+\infty$*) car il s'agit d'une série à termes positifs.*
Le triplet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *est alors un espace mesuré.*

Exemples 2.

1. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *est un espace mesurable la fonction* μ *définie par*

$$\forall E \in \mathcal{T}, \qquad \mu(E) := \begin{cases} 0 & si\ E = \emptyset, \\ \infty & sinon, \end{cases}$$

est une mesure.

2. *Pour l'espace mesurable* $(X, \mathcal{P}(X))$ *la fonction cardinal (qui renvoit le nombre d'éléments d'un ensemble) est une mesure.*

Définition 6. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace mesurable et* a *un élément de* X*. On appelle masse de Dirac en* a *la fonction* δ_a *définie par*

$$\forall E \in \mathcal{T}, \qquad \delta_a(E) := \begin{cases} 1 & si\ a \in E, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

est une mesure.

Proposition 5. *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré. On a les propriétés suivantes.*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2, \qquad (A \subset B \ et\ \mu(B) < +\infty) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

$$\forall (E_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \qquad \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(E_n).$$

$$\forall (E_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \qquad (\forall n \geq 0,\ E_n \subset E_{n+1}) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} E_n\right) = \lim_{p\to+\infty} \mu(E_p).$$

$$\forall (E_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \qquad (\forall n \geq 0,\ E_{n+1} \subset E_n \quad et \quad \exists k \geq 0,\ \mu(E_k) < +\infty) \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} E_n\right) = \lim_{p\to+\infty} \mu(E_p).$$

Proposition 6. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace mesurable. Si* μ *et* ν *sont deux mesures sur* X *et si* $r \in \mathbb{R}_+$ *alors l'application*

$$E \in X \to \mu(E) + r\nu(E) \in [0, +\infty],$$

est encore une mesure.

Définition 7. *Si* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *est un espace mesuré tel que* $\mu(X) = 1$ *on dit que* μ *est une probabilité et* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace probabilisé.*

Définition 8. *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré, un ensemble* $E \subset X$ *est dit négligeable lorsqu'il existe un ensemble* $F \in \mathcal{T}$ *tel que*

$$E \subset F, \qquad \mu(F) = 0.$$

On notera que E *n'est pas forcément dans* $\mathcal{T}$*.*

3 Pi-systèmes et unicité

Définition 9. *Soit X un ensemble et $\mathcal{C}$ une collection de sous ensembles de X.*

1. *On dit que $\mathcal{C}$ est un π-système lorsqu'elle est stable par intersection finie :*

$$\forall E, F \in \mathcal{C}, \qquad E \cap F \in \mathcal{C}.$$

2. *On dit que $\mathcal{C}$ est un λ-système (ou également une classe monotone) lorsqu'elle contient X, qu'elle stable par différence et réunion croissante dénombrable :*

$$\forall (E, F) \in \mathcal{C}^2, \qquad E \subset F \Rightarrow F \setminus E \in \mathcal{C}$$
$$\forall (E_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}, \qquad (\forall n \geq 0,\ E_n \subset E_{n+1}) \Rightarrow \bigcup_{n \geq 0} E_n \in \mathcal{C}.$$

Théorème 1 (Dynkin)**.** *Soit X un ensemble et $\mathcal{C}$ un π-système alors le plus petit (au sens de l'inclusion) λ-système contenant $\mathcal{C}$ est $\sigma(\mathcal{C})$.*

Définition 10. *soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *On dit que la mesure μ est finie lorsque $\mu(X) < +\infty$. On dit*
2. *On dit que la mesure μ est σ-finie lorsqu'il existe une suite croissante d'ensemble $(Y_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{T}$ telle que*

$$\forall n \geq 0, \qquad \mu(Y_n) < +\infty, \qquad \textit{et} \qquad \bigcup_{n \geq 0} Y_n = X.$$

Théorème 2. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré telle que μ est finie. Soit $\mathcal{P}$ un π-système tel que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{T}$ et soit ν une mesure telle que*

$$\forall E \in \mathcal{P} \cup \{X\}, \qquad \nu(E) = \mu(E).$$

Alors on a en fait

$$\forall E \in \mathcal{T}, \qquad \nu(E) = \mu(E).$$

Corollaire 2. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathcal{P}$ un π-système tel que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{T}$ et soit ν une mesure telle que*

$$\forall E \in \mathcal{P} \cup \{X\}, \qquad \nu(E) = \mu(E).$$

On supposera également que μ est σ-finie via des ensembles de $\mathcal{P}$. C'est à dire qu'il existe une famille croissante $(K_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ tels que

$$\forall n \geq 0, \quad K_n \subset K_{n+1}, \quad \mu(K_n) < +\infty, \qquad \textit{et} \qquad X = \bigcup_{p \geq 0} K_p.$$

Alors on a en fait

$$\forall E \in \mathcal{T}, \qquad \nu(E) = \mu(E).$$

Proposition 7. *La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est également engendrée par les collections $\{[a, b] \ : \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, $\{]-\infty, x] \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ et $\{]-\infty, r] \ : \ r \in \mathbb{Q}\}$.*

4 Fonctions mesurables

On rappelle que pour $f : X \to Y$ et $F \subset Y$ on définit

$$f^{-1}(F) := \{x \in X \ : \ f(x) \in F\}.$$

Définition 11. *Soient $(X, \mathcal{T}_1)$ et $(Y, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est mesurable lorsque*

$$\forall F \in \mathcal{T}_2, \qquad f^{-1}(F) \in \mathcal{T}_1.$$

Proposition 8. *Soient $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ et $(Z, \mathcal{T}_3)$ trois ensembles mesurables. On se donne également $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions mesurables. Alors $g \circ f : X \to Z$ est également mesurable.*

Remarque 1. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace mesurable et $E \in \mathcal{T}$, alors on a équivalence entre*

- *l'ensemble E est mesurable,*
- *la fonction $1_E : X \to \mathbb{R}$ est mesurable où l'on rappelle que*

$$\forall x \in X, \qquad 1_E(x) := \begin{cases} 1 & si\ x \in E, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Proposition 9. *Soit $(Y, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On se donne un ensemble X et une application $f : X \to Y$ alors la collection*

$$\{E \subset X \ : \ \exists F \in \mathcal{T},\ E = f^{-1}(F)\},$$

est une tribu. C'est la plus petite tribu sur X telle que f soit mesurable.

Proposition 10. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On se donne un ensemble Y et une application $f : X \to Y$ alors la collection*

$$\{F \subset Y \ : \ f^{-1}(F) \in \mathcal{T}\},$$

est une tribu. C'est la plus grande tribu sur Y telle que f soit mesurable.

Proposition 11. *Soient $(X, \mathcal{T}_1)$ et $(Y, \mathcal{T}_2)$ deux ensembles mesurables et $f : X \to Y$ une application mesurable. On se donne également μ une mesure sur X. On définit alors la fonction $f\#\mu$ par*

$$\forall F \in \mathcal{T}_2, \qquad f\#\mu(F) := \mu\left(f^{-1}(F)\right).$$

Il s'agit d'une mesure sur $(Y, \mathcal{T}_2)$, on l'appelle la mesure image de μ par f.

Proposition 12. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ alors f est mesurable si et seulement si on a*

$$\forall c \in \mathbb{R}, \qquad \{x \in X \ : \ f(x) > c\} \in \mathcal{T}.$$

Le résultat reste valable pour $f(x) \geq c$, $f(x) < c$ ou $f(x) \leq c$.

Proposition 13. *Toute application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable.*

Proposition 14. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Si f et g sont des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ alors quelque soit le réel λ la fonction*

$$x \in X \mapsto f(x) + \lambda g(x) \in \mathbb{R},$$

est mesurable.

Proposition 15. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables de X dans R alors*

$$x \in X \mapsto \sup_{n\geq 0} f_n(x) \qquad et \qquad x \in X \mapsto \inf_{n\geq 0} f_n(x),$$

sont mesurables.

Corollaire 3. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace mesurable. On considère une suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *alors les fonctions*

$$x \in X \mapsto \limsup f_n(x), \qquad x \in X \mapsto \liminf f_n(x),$$

sont mesurables et l'ensemble

$$\{x \in X \ : \ (f_n(x))_{n\geq 0} \text{ est convergente } \},$$

est dans $\mathcal{T}$.

Théorème 3 (Régularité de la mesure de Lebesgue)**.** *Soit* B *un borélien de* $\mathbb{R}$ *on a alors*

$$\lambda(B) = \inf_{B\subset O \text{ ouvert}} \lambda(O) = \sup_{K \text{ compact } \subset B} \lambda(K).$$

Théorème 4 (Lusin)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Alors pour tout segment* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *et tout réel* $\epsilon > 0$ *on peut trouver un compact* $K \subset [a, b]$ *tel que* $f_{|K}$ *est continue et* $\lambda([a, b] \setminus K) \leq \epsilon$.

Corollaire 4. *Soit* $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. alors pour tout segment* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *et tout réel* $\epsilon > 0$ *il existe un compact* $K_\epsilon \subset [a, b]$ *et une fonction continue* $f_\epsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\lambda([a, b] \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon,$$

$$\forall x \in K_\epsilon, \qquad f(x) = f_\epsilon(x),$$
$$\forall x \in [a, b], \qquad \inf_{K_\epsilon} f \leq f_\epsilon(x) \leq \sup_{K_\epsilon} f.$$

5 Fonctions étagées

Dans cette partie on se donnera $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 12. *Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite étagée s'il s'agit d'une fonction mesurable ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, que celles-ci sont positives ou nulles.*

Définition 13. *On considère $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée. On note alors*

$$V(f) := \{\gamma \in]0, +\infty[\ : \ \exists x \in X, \ f(x) = \gamma\}$$

qui est un ensemble fini par définition d'une fonction étagée. On peut alors définir

$$\int_X f d\mu := \sum_{\gamma \in V(f)} \gamma \mu(\{x \in X \ : \ f(x) = \gamma\}).$$

où on utilise la convention $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Proposition 16. *On considère f et g deux fonctions étagées et θ un réel strictement positif. Alors les fonctions*

$$x \in X \mapsto f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad x \in X \mapsto \theta f(x)$$

sont également des fonctions étagées. De plus

$$\int_X (\theta f) d\mu = \theta \int_X f d\mu \qquad \text{et} \qquad \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Proposition 17. *Si f et g sont des fonctions étagées et que*

$$\forall x \in X, \qquad f(x) \leq g(x),$$

alors on a

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

6 Fonctions positives et convergence monotone

Dans cette partie encore on se donne $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 14. *Soit $f : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. On note E l'ensemble des fonctions étagées inférieures à f. On pose alors*

$$\int_X f d\mu := \sup_{\xi \in E} \int_X \xi d\mu.$$

On remarquera que la proposition 17 garantit que cette définition coincide avec la précédente pour les fonctions étagées.

Proposition 18. *Soient f et g deux fonctions positives telles que*

$$\forall x \in X, \qquad f(x) \leq g(x),$$

alors on a

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Proposition 19 (Inégalité de Markov)**.** *Soit f une fonction mesurable positive d'intégrale finie. Alors pour tout réel positif c on a*

$$\mu(\{x \in X \ : \ f(x) \geq c\}) \leq \frac{\int_X f d\mu}{c}.$$

Remarque 2. *On constatera facilement que pour qu'une fonction positive f soit d'intégrale finie il suffit qu'il existe une fonction g telle que*

$$\forall x \in X, \quad f(x) \leq g(x), \qquad \int_X g d\mu < +\infty.$$

Lemme 1. *Soit f une fonction mesurable positive d'intégrale finie. Il existe $(\chi_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de fonctions étagées telle que*

$$\forall x \in X, \qquad \chi_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} f(x),$$

$$\int_X \chi_n d\mu \underset{n \to +\infty}{\to} \int_X f d\mu.$$

Lemme 2. *Si $(\chi_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de fonctions étagées telles que*

$$\int_X \chi_0 d\mu < +\infty$$

et

$$\forall x \in X, \qquad \chi_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

alors

$$\int_X \chi_n d\mu \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Lemme 3. *Soit f une fonction positive mesurable, alors si $(\chi_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de fonctions étagées telle que*

$$\forall x \in X, \qquad \chi_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} f(x),$$

on a

$$\int_X \chi_n d\mu \underset{n \to +\infty}{\to} \int_X f d\mu.$$

Théorème 5 (de Convergence Monotone)**.** *Soit f et $(f_n)_{n\geq 0}$ des fonctions mesurables positives telle que*

$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in X, \qquad f_n(x) \leq f_{n+1}(x),$$

$$\forall x \in X, \qquad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x).$$

Alors on a

$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} \int_X f d\mu.$$

Proposition 20. *Soient f et g deux fonctions positives intégrables. Alors on a les propriétés suivantes. La fonction $x \in X \mapsto f(x) + g(x)$ est intégrable et*

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Quelque soit le réel $\lambda \geq 0$ la fonction $x \in X \mapsto \lambda f(x)$ est intégrable et

$$\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

Théorème 6. *Soit f une fonction mesurable positive alors l'application ν définie sur $\mathcal{T}$ par*

$$\forall E \in \mathcal{T}, \qquad \nu(E) := \int_X 1_E f d\mu,$$

est une mesure.

7 Intégrale abstraite

Dans cette partie encore on se donne $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 15. *Soit f une fonction mesurable de X vers $\mathbb{R}$ alors on définit*

$$f^+ : x \in X \mapsto \max(0, f(x)) \qquad et \qquad f^-(x) : x \in X \mapsto \max(0, -f(x)).$$

Et comme les fonctions constantes sont mesurables quelque soit le choix des tribus on a f^+ et f^- qui sont également mesurables.

Définition 16. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable lorsqu'on a*

$$\int_X f^+ d\mu < +\infty \qquad et \qquad \int_X f^- d\mu < +\infty,$$

et on pose alors

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Remarque 3. *On pourra rencontrer les notations suivantes toutes équivalentes*

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f(x) \mu(dx).$$

Remarque 4. *On peut constater que comme $f^+ + f^- = |f|$ la fonction f est intégrable si et seulement si*

$$\int_X |f| d\mu < +\infty.$$

Proposition 21. *Soient f et g deux fonctions intégrables. Alors on a les propriétés suivantes.*
La fonction $x \in X \mapsto f(x) + g(x)$ est intégrable et

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Quelque soit le réel λ la fonction $x \in X \mapsto \lambda f(x)$ est intégrable et

$$\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

Proposition 22. *Soient f et g deux fonctions intégrables. Alors*

$$\forall x \in X, \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

8 Théorème de Convergence Dominée

Théorème 7. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On se donne $(f_n)_{n\geq 0}$ des fonctions mesurables à valeurs réelles. On se donne $f, : X \to \mathbb{R}$ telles que*

- *on a la convergence simple*
$$\forall x \in X, \qquad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x),$$
- *on a la domination*
$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in X, \qquad |f_n(x)| \leq g(x),$$
- *la fonction g est intégrable*
$$\int_X g d\mu < +\infty.$$

Alors on a
$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} \int_X f d\mu.$$
En fait on a même
$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Lemme 4 (Fatou)**.** *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables positives on a alors*
$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

9 Égalité presque partout

Dans cette partie $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désignera un espace mesuré.

Définition 17. *On dit qu'une propriété est vraie presque partout si l'ensemble sur lequel elle n'est pas vérifiée est de mesure nulle. En particulier on a les deux définitions suivantes.*

- *On dit que deux fonctions mesurables f et g sont égales presque partout (noté $f = g$ $d\mu$ p.p.) lorsque*
$$\mu\left(\{x \in X \ : \ f(x) \neq g(x)\}\right) = 0.$$
- *Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions mesurables. On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge presque partout vers f, ce que l'on note*
$$f_n \to f, \ d\mu \text{ p.p.}$$
lorsque l'ensemble
$$\{x \in X \ : \ (f_n(x))_{n\geq 0} \text{ ne converge par vers } f(x)\},$$
est de mesure nulle.

On notera que la propriété est spécifique à la mesure μ.

Proposition 23. *Soit f et g deux fonctions mesurables. On suppose que*
$$f = g \qquad d\mu \text{ p.p.},$$
alors f est intégrable si et seulement si g l'est et alors
$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

On peut maintenant étendre les théorèmes de convergence monotone et convergence dominée de la façon suivante.

Théorème 8 (de Convergence Monotone)**.** *Soit f et $(f_n)_{n\geq 0}$ des fonctions mesurables telles que*
$$\forall n \geq 0, \qquad f_n \geq 0 \qquad d\mu \text{ p.p.}$$
$$\forall n \geq 0, \qquad f_n \leq f_{n+1}, \qquad d\mu \text{ p.p.}$$
$$f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f \qquad d\mu \text{ p.p.}$$
Alors on a
$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} \int_X f d\mu.$$

Théorème 9 (de Convergence Dominée)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On se donne $(f_n)_{n\geq 0}$ des fonctions mesurables à valeurs réelles. On se donne $f, : X \to \mathbb{R}$ telles que*

- *on a la convergence $f_n \to f$ $d\mu$ p.p.,*
- *on a la domination*
$$\forall n \geq 0, \qquad |f_n| \leq g, \qquad d\mu \text{ p.p.}$$
- *la fonction g est intégrable*
$$\int_X g d\mu < +\infty.$$

Alors on a
$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} \int_X f d\mu.$$
En fait on a même
$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Proposition 24. *Toute fonction Riemann intégrable sur un segment $[a, b]$ est également Lebesgue intégrable est les intégrales ont même valeur.*

10 Intégrales à paramètres

Dans cette partie on se donne $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 10. *Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. On considère une fonction $f : O \times X \to \mathbb{R}$ telle que*

- *Pour tout t de O*
$$x \mapsto f(t,x) \text{ est mesurable },$$
- *pour presque tout x de X la fonction*
$$t \mapsto f(t,x) \text{ est continue},$$
- *il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}^+$ telle que $\int_X g d\mu < +\infty$ et*
$$\forall t \in O, \quad \forall x \in X, \qquad |f(t,x)| \leq g(x),$$

alors la fonction
$$F : t \mapsto \int_X f(t,x) d\mu(x),$$
est définie et continue sur O.

Théorème 11. *Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. On considère une fonction $f : O \times X \to \mathbb{R}$ telle que*

- *Pour tout t dans O,*
$$x \mapsto f(t,x) \text{ est mesurable },$$
- *pour presque tout x de X on a*
$$t \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}^1(O),$$
- *il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}^+$ telle que $\int_X g d\mu < +\infty$ et*
$$\forall t \in O, \quad \forall i \in [\![1,d]\!], \qquad |\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x)| \leq g(x), \text{ pour presque tout } x$$
- *la fonction*
$$F : t \mapsto \int_X f(t,x) d\mu(x),$$
est définie sur O.

Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur O et
$$\forall i \in [\![1,d]\!], \quad \forall t \in O, \qquad \frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x) d\mu(x).$$

11 Modes de convergence

Dans cette partie on considèrera $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 18. *On dit qu'une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplement vers une fonction f lorsque*

$$\forall x \in X, \qquad f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} f(x).$$

Définition 19. *On dit qu'une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge presque partout vers une fonction f lorsque*

$$\mu\left({}^C\{x \in X \ : \ f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} f(x)\}\right) = 0$$

(La mesurabilité de l'ensemble en question fait partie des hypothèses à vérifier.)

On notera ceci

$$f_n \to f \quad p.p..$$

Définition 20. *On dit qu'une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction f lorsque la suite*

$$\left(\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \right)_{n \geq 0}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 12 (Rappel). *Lorsque X est un espace vectoriel normé (typiquement $\mathbb{R}^d$) que les $(f_n)_{n \geq 0}$ sont des fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f alors la fonction f est également continue.*

Remarque 5. *Par contre la convergence simple et la convergence presque partout ne conserve par la continuité par passage à la limite.*

Proposition 25. *Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ des fonctions mesurables on introduit l'ensemble*

$$C = \{x \in X \ : \ (f_n(x)) \ converge\}.$$

Alors l'ensemble C est mesurable. Si on suppose que

$$\mu({}^C C) = 0$$

la fonction

$$\forall x \in X, \qquad f(x) := \begin{cases} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) & si\ x \in C \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est mesurable et $f_n \to f$ p.p.

Théorème 13 (Egoroff). *Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ et f des fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_n \to f$ p.p. Alors pour tout segment $[a, b]$ et tout réel $\epsilon > 0$ on peut trouver un compact $K \subset [a, b]$ tel que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur K et*

$$\lambda([a, b] \setminus K) \leq \epsilon.$$

Théorème 14. *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver une fonction continue à support compact g telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| d\lambda \leq \epsilon.$$

12 Construction de la mesure de Lebesgue

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ on notera $|I|$ sa longueur.

Définition 21. *Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$ on introduit la collection des suites d'intervalles dont l'union recouvre E*

$$\mathcal{R} := \{(I_n)_{n\geq 0} \ : \ E \subset \bigcup_{n\geq 0} I_n\}.$$

On définit alors la quantité

$$\lambda(E) := \inf_{(I_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{R}} \sum_{n\geq 0} |I_n|.$$

Remarque 6. *On remarquera que la fonction λ est définie pour tout sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dit qu'il s'agit d'une mesure extérieure.*

Proposition 26. *On a les propriétés suivantes.*

- *L'ensemble vide vérifie $\lambda(\emptyset) = 0$.*
- *Si $E \subset F$ alors $\lambda(E) \leq \lambda(F)$.*
- *Si $(E_n)_{n\geq 0}$ est une suite de sous ensembles de $\mathbb{R}$ on a*

$$\lambda(\bigcup_{n\geq 0} E_n) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(E_n).$$

Proposition 27. *Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ on a*

$$\lambda(I) = |I|.$$

Définition 22 (Caratheodory)**.** *On dit qu'un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ est mesurable lorsque*

$$\forall F \subset \mathbb{R}, \qquad \lambda(F) = \lambda(E \cap F) + \lambda({}^C E \cap F).$$

Remarque 7. *On notera que dans l'égalité ci-dessus la partie $\leq$ est toujours vérifiée.*

Proposition 28. *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont mesurables.*

Théorème 15 (Caratheodory)**.** *On notera $\mathcal{L}$ la collection de tous les sous ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ alors $\mathcal{L}$ est une tribu et la fonction λ restreinte à $\mathcal{L}$ est une mesure.*

Remarque 8. *La mesure λ est la mesure de Lebesgue mais la collection $\mathcal{L}$ est une tribu strictement plus grand que la tribu des boréliens. On l'appelle la tribu de Lebesgue.*

On peut maintenant prouver le théorème annoncé précédemment.

Théorème 16 (Régularité de la mesure de Lebesgue)**.** *Soit B un borélien de $\mathbb{R}$ on a alors*

$$\lambda(B) = \inf_{B \subset O \text{ ouvert}} \lambda(O) = \sup_{K \text{ compact } \subset B} \lambda(K).$$

13 Rapports entre l'intégration et la différentiation

Théorème 17 (Rappel)**.** *Si f est continue sur $[a,b]$ alors la fonction*

$$\forall x \in [a,b], \qquad F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

est $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in [a,b], \qquad F'(x) = f(x).$$

Théorème 18 (Rappel)**.** *Si F est une fonction $\mathcal{C}^1$ alors on a*

$$\forall x \in [a,b], \qquad F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt.$$

Définition 23. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument continue lorsque*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \nu > 0, \quad \forall n \geq 0, \forall x_1 < x_2 < ... < x_{2n} \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=1}^n |x_{2i} - x_{2i-1}| \leq \nu \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(x_{2i}) - f(x_{2i-1})| \leq \epsilon.$$

Théorème 19. *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ alors si on pose*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) := \int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty,x]} f d\lambda,$$

la fonction F est absolument continue. De plus, F est dérivable presque partout et on a $F' = f, \qquad d\lambda$ p.p.

Remarque 9. *On notera que si $f = g$, $d\lambda$ p.p., la fonction F n'est pas modifiée, donc l'ensemble de ses points de dérivabilité non plus, alors que l'ensemble des points où la dérivée est égale à f (ou g) lui l'est.*

Théorème 20. *Soit F un fonction absolument continue. On suppose que F est dérivable presque partout. On note alors f la fonction égale à F' là où F est dérivable et 0 ailleurs on a alors f intégrable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty,x]} f d\lambda.$$

14 Références

- Rudin, Analyse réelle et complexe.
- Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.
- Kaczor Nowak, Problèmes d'analyse vol. 3.
- Willem, Analyse Harmonique Réelle.
- Bressoud, A radical approach to Lebesgue's theory of integration.
- Evans Gariepy, Measure theory and fine properties of functions.
- Burke, A garden of integrals.