Méthode HUM.

Vincent Perrollaz

1 Position du problème

On se donne deux entiers positifs n et m puis deux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On considère alors le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle.

On essayera de préciser au fur et à mesure ce qui se passe en dimension infinie.

Problème 1. *on cherche pour un temps $T > 0$ et un état x_1 à déterminer une fonction de contrôle $u \in L^2(0, T)$ telle que la solution de* (1) *satisfait*

$$x(T) = x_1.$$

Remarque. *Si une fonction de contrôle existe, un argument de dimension rend plausible la non unicité de celle-ci, on va donc raffiner le problème et chercher un relèvement. Plus précisément on va rajouter un critère d'optimalité qui permettra d'isoler une fonction de contrôle parmi toutes.*

On va pour un temps $T > 0$ donné associer à un état $x_1 \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble :

$$Adm(x_1) := \{u \in L^2(0, T) \ : \ x(T) = x_1 \ x \text{ solution de } (1)\}.$$

Problème 2. *On cherche alors à déterminer si il existe u^* dans $Adm(x_1)$ telle que :*

$$||u^*||_{L^2(0,T)} = \min_{u \in Adm(x_1)} (||u||_{L^2(0,T)}).$$

On peut d'ors et déjà noté que la solution du problème si elle existe est unique et donc fourni bien un relèvement.

Proposition 1. *Si u_1 et u_2 sont des solutions du problème 2 alors $u_1 = u_2$.*

Démonstration. On note y et z les solutions de (1) associées aux contrôles u_1 et u_2. On voit alors que pour $\theta \in (0, 1)$ si on pose :

$$\forall t \in [0, T], \qquad u(t) := \theta u_2(t) + (1 - \theta) u_2(t), \qquad x(t) := \theta z(t) + (1 - \theta) y(t),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \theta \dot{z}(t) + (1 - \theta) \dot{y}(t) = \theta (Az(t) + Bu_2(t)) + (1 - \theta)(Ay(t) + Bu_1(t)) \\ &= A(\theta z(t) + (1 - \theta) y(t)) + B(\theta u_2(t) + (1 - \theta) u_1(t)) \\ &= Ax(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

et la nouvelle fonction est toujours solution de 1. De plus :

$$x(0) = \theta z(0) + (1 - \theta) y(0) = x_0, \qquad x(T) = x_1,$$

la fonction u est donc encore solution du problème 1. Or la fonction cout :

$$u \mapsto J(u) := \int_0^T u(t)^2 dt,$$

est strictement convexe donc si $u_1 \neq u_2$ on a :

$$J(u) < \min(J(u_1), J(u_2)),$$

ce qui est absurde car u_1 et u_2 sont des fonctions de contrôle minimisant le cout. □

2 Analyse

On suppose dans un premier temps que $Adm(x_1)$ est non vide, on notera dans la suite $\bar{u}$ une fonction de contrôle dans $Adm(x_1)$ et $\bar{x}$ la solution associée par (1). On peut tout de suite vérifier que $x \in H^1(0,T)$.

Définition 1. *On appelle H l'espace affine :*

$$\{(u,x) \in L^2(0,T) \times H^1(0,T) \ : \ x(T) = x_1, \quad x(0) = x_0\}.$$

Afin de trouver une solution du problème qui nous intéresse on va relaxer une des conditions pour garantir l'existence d'une solution du problème.

Définition 2. *Soit ϵ un réel strictement positif on définit la fonctionnelle J_ϵ par :*

$$\forall (u,x) \in H, \qquad J_\epsilon(u,x) := \int_0^T ||u(t)||^2 dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T ||\dot{x} - Ax - Bu||^2 dt,$$

où $||.||$ est la norme euclidienne classique de $\mathbb{R}^n$ (on notera le produit scalaire $\langle .|. \rangle$).

Proposition 2. *La fonctionnelle J_ϵ est à la fois strictement convexe, coercive et continue.*

Démonstration. La convexité et la continuité sont évidentes. La coercivité provient du fait que si u_n et f_n sont des suites de fonctions bornées dans L^2 alors la solution x de

$$\dot{x_n} = Ax_n + Bu_n + f_n, \qquad x(0) = x_0,$$

est clairement bornée dans H^1 (il s'agit simplement d'utiliser la continuité de la solution d'une équation différentielle par rapport aux données du problèmes). □

La proposition précédente assure alors de manière classique l'existence d'un unique minimum dans H de J_ϵ.

Définition 3. *Soit (u_ϵ, x_ϵ) l'unique point de H où le minimum de J_ϵ est atteint.*

Proposition 3. *Quelque soit le réel positif ϵ il existe une fonction p_ϵ solution de l'équation différentielle*

$$\dot{p} + A^* p = 0$$

telle que la fonction u_ϵ vérifie :

$$u_\epsilon = B^* p_\epsilon.$$

Démonstration. La fonctionnelle étant régulière et (u_ϵ, x_ϵ) étant un minimum, la différentielle y est nulle. Or quelques soient $(\delta u, \delta x) \in L^2 \times H^1_0$ on a :

$$DJ_\epsilon(u_\epsilon, x_\epsilon)(\delta u, \delta x) = 2\int_0^T \langle u_\epsilon(t) | \delta u(t) \rangle dt + \frac{2}{\epsilon}\int_0^T \langle \dot{x}_\epsilon - Ax_\epsilon - Bu_\epsilon | \dot{\delta x} - A\delta x - B\delta u \rangle dt.$$

Si on note $p_\epsilon := \frac{\dot{x}_\epsilon - Ax_\epsilon - Bu_\epsilon}{\epsilon}$, et qu'on regroupe les termes on obtient après intégration par parties en temps :

$$DJ_\epsilon(u_\epsilon, x_\epsilon)(\delta u, \delta x) = 2\int_0^T \langle \delta x | \dot{p}_\epsilon + A^* p_\epsilon \rangle dt + 2\int_0^T \langle \delta u | u_\epsilon - B^* p_\epsilon \rangle dt.$$

On a donc bien comme annoncé :

$$\dot{p}_\epsilon + A^* p_\epsilon = 0, \qquad u_\epsilon = B^* p_\epsilon.$$

□

Proposition 4. *On peut supposer quitte à extraire des sous suites que :*

$$u_\epsilon \rightharpoonup u^*, \quad \text{dans } L^2(0,T), \tag{2}$$

$$x_\epsilon \rightharpoonup x^* \quad \text{dans } H^1(0,1), \tag{3}$$

avec $(u^*, x^*) \in H$.

Démonstration. On a facilement par définition de u_ϵ que

$$\forall \epsilon > 0, \qquad ||u_\epsilon||_{L^2}^2 \leq J_\epsilon(u_\epsilon, x_\epsilon) \leq J_\epsilon(\bar{u}, \bar{x}) = ||\bar{u}||_{L^2}^2.$$

Par compacité faible (L^2 est un hilbert) on peut donc extraire de (u_ϵ) et obtenir (2).

Si on note $f_\epsilon = \dot{x}_\epsilon - Ax_\epsilon - Bu_\epsilon$ on a de la même façon que

$$||f_\epsilon||_{L^2}^2 \leq \epsilon ||\bar{u}||_{L^2}^2,$$

et donc $f_\epsilon \to 0$ dans L^2. Mais alors comme

$$\dot{x}_\epsilon - Ax_\epsilon = Bu_\epsilon + f_\epsilon,$$

on a par linéarité et continuité de l'opérateur associant la solution x_ϵ au second membre de l'équation différentielle que

$$x_\epsilon \rightharpoonup x^*, \quad \text{dans } L^2,$$

puis en réinjectant cette convergence dans l'équation différentielle on obtient bien (3). Au passage, la convergence faible dans $H^1(0,T)$ permet de passer à la limite dans les traces (qui sont des opérateurs linéaires continues pour cette norme en dimension 1) en $t = 0$ et $t = T$ ce qui montre que u^*, x^* est bien une solution au problème de contrôle. □

Hypothèse

On aimerait maintenant passer à la limite dans la forme de u_ϵ fournie par la proposition 3. Pour ce faire on est amené à faire une hypothèse naturelle :

$$||p_1||_a := ||B^* p||_{L^2}, \qquad \text{définit une norme sur l'espace des états qui laisse celui-ci complet.} \tag{4}$$

En dimension finie, grâce à l'équivalence des normes, seul le caractère définie peut poser problème. En dimension infinie on peut constater grâce au théorème de l'application ouverte que cela revient à demander l'équivalence entre cette quantité et la norme hilbertienne originelle. Plus précisément si X est l'espace des états on veut

$$\exists C > 0, \qquad \forall p_1 \in X, \qquad ||p_1||_X^2 \leq C \int_0^T ||B^* p(t)||^2 dt = C||p_1||_a^2, \tag{5}$$

où p est solution de

$$\begin{cases} \dot{p}(t) + A^* p(t) = 0, \\ p(T) = p_1. \end{cases}$$

Proposition 5. *Sous l'hypothèse précédente on a l'existence d'une fonction p^* dans H^1 telle que le contrôle u^* vérifie :*

$$\begin{cases} u^* = B^* p^*, \\ \dot{p^*} = A^* p^*. \end{cases} \tag{6}$$

Démonstration. Comme on a

$$u_\epsilon = B^* p_\epsilon, \text{ pour tout } \epsilon > 0,$$

et que u_ϵ converge faiblement dans L^2 on a en utilisant l'hypothèse (4) on obtient la convergence de $p_\epsilon(T)$ dans l'espace des états, mais alors en utilisant l'équation différentielle portant sur p_ϵ on a la convergence

$$p_\epsilon \rightharpoonup p^*, \quad \text{ dans } H^1.$$

□

Proposition 6. *Le couple (u^*, x^*) est bien une solution du problème 2.*

Démonstration. On a

$$\forall \epsilon > 0, \qquad J_\epsilon(u_\epsilon, x_\epsilon) \leq J_\epsilon(\bar{u}, \bar{x}) = ||\bar{u}||^2_{L^2}.$$

Et la convergence faible de u_ϵ assure :

$$||u^*||^2_{L^2} \leq \liminf_{\epsilon \to 0} ||u_\epsilon||^2_{L^2} \leq J_\epsilon(u_\epsilon, x_\epsilon) \leq ||\bar{u}||^2_{L^2}.$$

Mais $(\bar{u}, \bar{x})$ était une solution quelconque du problème initial, donc u^* est bien le contrôle minimal en norme L^2. □

Conclusion :
Au final on a montré dans cette partie que si il existe une fonction de contrôle et si l'hypothèse (4) (ou de manière équivalente l'estimation d'observabilité (5)) est vérifiée alors il existe une unique fonction de contrôle u^* minimisant la norme $L^2(0,T)$. Et de plus il faut chercher cette fonction sous la forme (6).

3 Synthèse

On se donne $p_1 \in \mathbb{R}^n$ puis p la solution de

$$\begin{cases} \dot{p} + A^* p = 0, \\ p(T) = p_1. \end{cases}$$

On considère alors la solution x de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BB^* p, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{7}$$

et on pose alors :

$$\mathcal{L}(p_1) := x(T).$$

On va chercher à montrer que la fonction $\mathcal{L}$ est surjective, plus précisément étant donné x_1 fixé quelconque on cherche p_1 tel que $\mathcal{L}(p_1) = x_1$.

Proposition 7. *Si p_1 et q_1 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors on a*

$$\langle q_1 | \mathcal{L}(p_1) \rangle = \int_0^T \langle B^* q | B^* p \rangle dt + \langle q(0) | x_0 \rangle. \tag{8}$$

où les fonctions p et q sont les solutions de :

$$\begin{cases} \dot{p} + A^* p = 0, \\ p(T) = p_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{q} + A^* q = 0, \\ q(T) = q_1. \end{cases}$$

Démonstration. En effet, si x est solution de (7) on a

$$\forall t \in [0,T], \qquad \langle q(t)|\dot{x}(t)\rangle = \langle q(t)|Ax(t)\rangle + \langle q(t)|BB^*p(t)\rangle.$$

Or une intégration par parties donne :

$$[\langle q(t)|x(t)\rangle]_0^T = \int_0^T \langle \dot{q}(t) + A^*q(t)|x(t)\rangle dt + \int_0^T \langle B^*q(t)|B^*p(t)\rangle dt.$$

En utilisant la définition de q on a alors :

$$\langle q_1|\mathcal{L}(p_1)\rangle = \int_0^T \langle q(t)|p(t)\rangle dt + \langle q(0)|x_0\rangle.$$

□

Le point crucial est la symétrie de l'intégrale dans le second membre de (8) qui permet d'obtenir la proposition suivante.

Proposition 8. *Si on définit la fonctionnelle $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$\mathcal{A}(p_1) := \int_0^T \frac{||B^*p(t)||_2}{2} dt + \langle p(0)|x_0\rangle,$$

l'équation (8) peut se réecrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathcal{A}(p_1 + \theta q_1) = \langle q_1|\mathcal{L}(p_1)\rangle.$$

Démonstration. Calcul immédiat. □

Théorème 1. *Si on suppose qu'on a l'inégalité d'observabilité* (5) *(qui est équivalente à l'hypothèse* (4)*), le problème 2 admet une solution.*

Démonstration. Sous l'hypothèse (4), la fonctionnelle $p_1 \mapsto \mathcal{A}(p_1) - \langle p_1 | x_1 \rangle$ est coercive, or elle est clairement convexe. De manière classique on en déduit qu'elle admet un minimum et donc un point critique p^*.

On a alors que pout tout état q_1
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathcal{A}(p^* + \theta q_1) - \langle q_1 | x_1 \rangle = 0,$$
mais en utilisant la proposition 8 on en déduit
$$\forall q_1 \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle q_1 | \mathcal{L}(p^*) - x_1 \rangle = 0,$$
ce qui est bien
$$\mathcal{L}(p^*) = x_1.$$
□

4 Condition nécessaire.

Proposition 9. *Supposons que le problème 1 admette une solution en temps T pour tous les états initiaux et finaux. Alors l'inégalité d'observabilité* (5) *est satisfaite.*

Démonstration. D'après notre hypothèse l'opérateur linéaire L défini par :
$$\forall u \in L^2(0,T), \qquad L(u) = x(T),$$
où x est la solution de (1) est continu et surjectif. Si on note L' sa restriction à $\mathrm{Ker}(L)^\perp$ qui est également un espace de Hilbert, on obtient que L' est un opérateur linéaire continue bijectif. Donc d'après le théorème de l'application ouverte sa réciproque $K = L'^{-1}$ est également continue.

Mais alors on peut écrire que pour tout couple d'état $x_1,\ y_1$ on a
$$\langle x_1 | y_1 \rangle = \langle x(0) | y(0) \rangle + \int_0^T \langle \dot{x}(t) | y(t) \rangle + \langle x(t) | \dot{y}(t) \rangle dt,$$
avec x et y solutions de
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK(x_1), \\ x(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{y} + A^* y = 0, \\ y(T) = y_1. \end{cases}$$
On peut alors en déduire que
$$\langle x_1 | y_1 \rangle = \int_0^T \langle K(x_1) | B^* y \rangle dt \leq ||K(x_1)||_{L^2} ||y_1||_a,$$
l'inégalité s'obtenant par deux applications de Cauchy-Schwarz. On conclut alors par
$$||x_1|| := \sup_{y_1 \neq 0} \frac{\langle x_1 | y_1 \rangle}{||y_1||} \leq |||K||| \cdot ||x_1||_a.$$
Et cette dernière inégalité est bien (5). □

5 Théorème de Kalman

Pour ce qui concerne le problème de contrôlabilité exacte on peut donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B.

Théorème 2 (Kalman)**.** *Le système (1) est contrôlable en temps $T > 0$ si et seulement si la matrice à n lignes et mn colonnes obtenue par juxtaposition des colonnes de B, AB, ..., $A^{n-1}B$ (on la notera $(B|AB|...|A^{n-1}B)$ dans la suite) est de rang n.*

Remarque. *On remarquera que la condition sur les matrices ne dépendant pas du temps T, la contrôlabilité exacte en un certain temps assure la contrôlabilité en tout temps.*

Démonstration. D'après l'analyse qui a précédé, la contrôlabilité exacte est équivalente à l'assertion suivante.

$$\forall p_1 \in \mathbb{R}^{,} \qquad \int_0^T ||B^* p(t)||^2 dt = 0 \Rightarrow p_1 = 0,$$

avec p la solution du système

$$\begin{cases} \dot{p}(t) + A^* p(t) = 0 \\ p(T) = p_1. \end{cases}$$

Or cela est équivalent à

$$\forall p_1 \in \mathbb{R}^n, \qquad \int_0^T ||B^* e^{(T-t)A^*} p_1||^2 dt = 0 \Rightarrow p_1 = 0.$$

Mais on peut encore reformuler cette assertion de la façon suivante.

$$\forall p_1 \in \mathbb{R}^n, \qquad \Big(\forall s \in [0,T], \quad B^* e^{sA^*} p_1 = 0\Big) \Rightarrow p_1 = 0.$$

- Supposons donc maintenant que (1) soit contrôlable. Et prenons $p_1 \in \mathrm{Im}(B|AB|...|A^{n-1}B)^\perp$. Cela revient à demander que p_1 soit en fait dans les noyaux de B^*, $(AB)^* = B^*A^*$, ..., $B^*(A^*)^{n-1}$. On a donc

  $$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad B^*(A^*)^k p_1 = 0.$$

  En utilisant Cayley-Hamilton on peut alors en déduire

  $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad B^(* A^*)^k p_1 = 0.$$

  Ce qui implique que

  $$\forall s > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad B^*(sA^*)^k p_1 = 0.$$

  Et finalement on a

  $$\forall s > 0, \qquad B^* e^{sA^*} p_1 = 0,$$

  et d'après notre hypothèse de départ cela permet d'assurer que $p_1 = 0$ donc $\mathrm{Im}(B|AB|...|A^{n-1}B)^\perp = 0$ ce qui veut bien dire

  $$\mathrm{rang}(B|AB|...|A^{n-1}B) = n.$$

- Si on suppose maintenant que

  $$\mathrm{rang}(B|AB|...|A^{n-1}B) = n.$$

  On se donne alors $p_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que

  $$\forall s > 0, \qquad B^* e^{sA^*} p_1 = 0.$$

  En dérivant n fois par rapport à s en $s = 0$ on obtient alors

  $$B^* p_1 = 0, \quad B^*A^* p_1 = 0, \; ..., B^*(A^*)^{n-1} p_1 = 0.$$

  Ce qui revient à dire que $p_1 \in \mathrm{Im}(B|AB|...|A^{n-1}B)^\perp$, mais d'après notre hypothèse on conclut donc $p_1 = 0$ et (1) est donc bien contrôlable.

$\square$