Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Stabilisation frontière du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver-Müller

Kim Dang PHUNG

Résumé – On étend l'étude asymptotique du système de Maxwell avec les conditions aux limites absorbantes faite par Barucq et Hanouzet dans [3] et [4]. On démontre par analyse microlocale, suivant le programme développé par Bardos-Lebeau-Rauch dans [1] et [2], la décroissance exponentielle de l'énergie.

Boundary stabilization of Maxwell's equations

Abstract – *We complete the asymptotic study of the Maxwell's system with the Silver-Müller's absorbing boundary condition done by Barucq and Hanouzet* ([3]-[4]). *We prove, by microlocal analysis techniques and Bardos-Lebeau-Rauch's results for the wave equation* ([1]-[2]), *the exponential decay of the energy.*

Abridged English Version – The results proved by Bardos-Lebeau-Rauch about boundary control and stabilization of waves' equation are closely related to a theorem of propagation of singularities and a microlocal lifting lemma recall in [5]. It's the same for boundary stabilization of Maxwell's equations. In particular, we will use results of Nalin [6]. Reflections of singularities of electromagnetic waves are detailed by Yamamoto [8]. By a coordinate transformation to the half-plane, we see that the Maxwell's system with the Silver-Müller's absorbing boundary condition becomes six hyperbolic equations with boundary conditions to which we can apply the theorem of propagation of singularities of Melrose and Sjöstrand.

The second point of interest observed by Bardos-Lebeau-Rauch is a uniqueness theorem. In our case, the work on the asymptotic behavior of the Maxwell's system with the Silver-Müller absorbing boundary done by Barucq and Hanouzet in [3]-[4] allows us to conclude.

In this note, we first treat the Maxwell's equations in a three-dimensional space:

$$(\mathrm{P}_1)\qquad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{curl} B = 0, \qquad \partial_t B + \operatorname{curl} E = 0 \quad \text{in } \Omega\times]0;\infty[\\ \operatorname{div} E = 0, \qquad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{in } \Omega\times]0;\infty[\\ E(\cdot,0) = E_0, \qquad B(\cdot,0) = B_0 \quad \text{in } \Omega \\ E\wedge n = 0, \qquad B\cdot n = 0 \quad \text{on } \Gamma_0\times]0;\infty[\\ (E\wedge n)\wedge n + B\wedge n = 0 \quad \text{on } \Gamma\times]0;\infty[\end{cases}$$

Ω is a connected domain in R^3, with smooth boundary $\partial\Omega = \Gamma_0\cup\Gamma$, $\Gamma_0\cap\Gamma=\varnothing$, Γ is the fictitious boundary. The exponential decay of such a solution depends on the initial data and geometrical conditions. We prove this result:

THEOREM. – *Suppose that there exists $T>0$ such that (Γ, T) geometrically control Ω* (see [5]), *if $\Gamma_0\neq\varnothing$ and the initial data belongs to the orthogonal to steady state solutions, then every solution (E, B) of problem* (P_1) *decays exponentially to zero.*

Also, we have the following result, with the same prove thanks to the "global" Poincaré's lemma:

THEOREM. – *Suppose that there exists $T>0$ such that (Γ, T) geometrically control Ω* (see [5]), *and $\Gamma_0=\varnothing$, then every solution (E, B) of problem* (P_1) *decays exponentially to zero.*

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/95/03200187 $ 2.00 © Académie des Sciences

Then, we consider the Maxwell's system in a two-dimensional space, with the second order Silver-Müller's condition in a magnetic polarization field:

$$(\mathrm{P}_2)\quad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{Curl} H = 0, \quad \partial_t H + \operatorname{curl} E = 0 \quad \text{in } \Omega\times]0;\infty[\\ \operatorname{div} E = 0 \quad \text{in } \Omega\times]0;\infty[\\ E(\cdot,0) = E_0, \quad H(\cdot,0) = H_0 \quad \text{in } \Omega \\ E \wedge n = 0 \quad \text{on } \Gamma_0\times]0;\infty[\\ \partial_t E\wedge n - \lambda d(x) E\wedge n + \partial_t H + (1-\lambda) d(x) H = 0 \quad \text{on } \Gamma\times]0;\infty[\end{cases}$$

Ω is a connected domain in R^2, with smooth boundary $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$, $\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$, Γ is the fictitious boundary, $\lambda \leqq 0$, $d(x)$ is a smooth function, strictly positive on Γ. Let

$$cl(E,H) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\operatorname{curl} E|^2 + |\operatorname{Curl} H|^2) + \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{|-\lambda d(x) E\wedge n + (1-\lambda) d(x) H|^2}{(1-2\lambda) d(x)}.$$

We prove the following estimate:

THEOREM. – *Suppose that there exists $T > 0$ such that (Γ, T) geometrically control Ω* (see [5]), *then there exist $C > 0$ and $\beta > 0$ such that $\forall t \geqq 0$, $cl(E,H) \leqq Ce^{-\beta t}\cdot cl(E_0,H_0)$.*

---

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME 3 D. – On considère le problème frontière suivant, où Ω est un ouvert connexe de R^3, situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière, avec $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ et $\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$.

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{rot} B = 0, \quad \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0;\infty[\\ \operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0;\infty[\\ E(\cdot,0) = E_0, \quad B(\cdot,0) = B_0 \quad \text{dans } \Omega \\ E\wedge n = 0, \quad B\cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0\times]0;\infty[\\ (E\wedge n)\wedge n + B\wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma\times]0;\infty[\end{cases}$$

On rappelle les principaux résultats de Barucq et Hanouzet ([3]-[4]):

Le problème (1) est bien posé, soit

$$V = \{f \in (L^2(\Omega))^3/\operatorname{div} f = 0\} \times \{g \in (L^2(\Omega))^3/\operatorname{div} g = 0,\ g\cdot n_{|\Gamma_0} = 0\}$$
$$W = \{(f,g) \in (H^1(\Omega))^3 \times (H^1(\Omega))^3/\operatorname{div} f = 0,$$
$$f\wedge n_{|\Gamma_0} = 0,\ \operatorname{div} g = 0,\ g\cdot n_{|\Gamma_0} = 0,\ (f\wedge n)\wedge n + g\cdot n_{|\Gamma} = 0\}$$

$\forall (E_0, B_0) \in W, \exists!(E,B) \in C^0(]0;\infty[, W) \cap C^1(]0;\infty[, V)$ solution du problème (1).

D'autre part, l'énergie $\mathcal{F}(E,B) = (1/2)\cdot\int_\Omega (|E|^2 + |B|^2)$ est décroissante et vérifie :

$$\forall (E_0,B_0) \in W, \quad \frac{d}{dt}\mathcal{F}(E,B) = -\int_\Gamma |E\wedge n|^2.$$

De plus, on a : $\forall (E_0,B_0) \in W\cap M$, $\lim_{t\to\infty}(E,B) = (0,0)$ dans V, où M est l'orthogonal des solutions stationnaires pour la norme V. On rappelle que M est invariant pour le problème (1) ([3]-[4]).

On se propose de montrer, par analyse microlocale, les résultats suivants :

THÉORÈME 1. – *On suppose qu'il existe un temps* $T > 0$ *tel que dans* $\Omega\times]0;\, T[$ *tout rayon rencontre* $\Gamma\times]0;\, T[$ *en un point non diffractif. Alors il existe* $C > 0$ *et* $\beta > 0$ *tel que l'on ait :* $\forall (E_0,\, B_0) \in W \cap M$ *donnée de Cauchy du problème* (1)

$$\forall t \geqq 0, \quad \mathcal{F}(E,\, B) \leqq C\, e^{-\beta t} \cdot \mathcal{F}(E_0,\, B_0).$$

THÉORÈME 2. – *On suppose que pour tout* $T > 0$ *il existe au moins un rayon ne rencontrant pas* $\Gamma\times]0;\, T[$. *Alors* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (E_\varepsilon,\, B_\varepsilon)$ *solution du problème* (1) *tel que*

$$\mathcal{F}(E_\varepsilon,\, B_\varepsilon)(0) = 1 \qquad \text{et} \quad \mathcal{F}(E_\varepsilon,\, B_\varepsilon)(t) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall\, 0 \leqq t \leqq T.$$

2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME 2 D. – Le second problème étudié est le système de Maxwell en dimension deux d'espace avec la condition aux limites de Silver-Müller pour un champ de polarisation magnétique :

Soit Ω un ouvert borné connexe de R^2, de frontière régulière, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ et $\Gamma_0 \cap \Gamma = \varnothing$, $\lambda \leqq 0$, $d(x)$ une fonction régulière strictement positive définie sur Γ.

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{Rot} H = 0, \qquad \partial_t H + \operatorname{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0;\, \infty[\\ \qquad \operatorname{div} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0;\, \infty[\\ E(\cdot,\, 0) = E_0, \qquad H(\cdot,\, 0) = H_0 \quad \text{dans } \Omega \\ \qquad E \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0\times]0;\, \infty[\\ \partial_t E \wedge n - \lambda\, d(x)\, E \wedge n + \partial_t H + (1-\lambda)\, d(x)\, H = 0 \quad \text{sur } \Gamma\times]0;\, \infty[\end{cases}$$

On rappelle les principaux résultats de Barucq et Hanouzet [3]:

Le problème (2) est bien posé, soit

$$X = \{f \in (L^2(\Omega))^2 / \operatorname{div} f = 0,\ \operatorname{rot} f \in L^2(\Omega),$$
$$f \wedge n_{|\Gamma_0} = 0,\ f \wedge n_{|\Gamma} \in L^2(\Gamma)\} \times \{g \in H^1(\Omega)\}$$

$$Y = \{(f,\, g) \in X / \operatorname{rot} f \in H^1(\Omega),\ \Delta g \in L^2(\Omega),\ \partial_n\, g_{|\Gamma_0} = 0,$$
$$\partial_n\, g_{|\Gamma} \in L^2(\Gamma),\ -\operatorname{rot} f + \partial_n\, g - \lambda\, d(x) \cdot f \wedge n + (1-\lambda)\, d(x) \cdot g_{|\Gamma} = 0\}$$

$\forall (E_0,\, H_0) \in Y, \exists ! (E,\, H) \in C^0(]0;\, \infty[,\, Y) \cap C^1(]0;\, \infty[,\, X)$ solution du problème (2).

D'autre part, les inégalités d'énergie sont :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega (|E|^2 + |H|^2) + \int_\Gamma \frac{|H + E \wedge n|^2}{(1 - 2\lambda)\, d(x)} \right)$$
$$+ \int_\Gamma \frac{-\lambda\, d(x)\, |E \wedge n|^2 + (1-\lambda)\, d(x)\, |H|^2}{(1-2\lambda)\, d(x)} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega (|\operatorname{rot} E|^2 + |\operatorname{Rot} H|^2) + \int_\Gamma \frac{|-\lambda\, d(x)\, E \wedge n + (1-\lambda)\, d(x)\, H|^2}{(1-2\lambda)\, d(x)} \right) + \cdots$$
$$+ \int_\Gamma \frac{-\lambda\, d(x)\, |\partial_t E \wedge n|^2 + (1-\lambda)\, d(x)\, |\partial_t H|^2}{(1-2\lambda)\, d(x)} = 0.$$

on pose

$$cl(E,\, H) = \frac{1}{2} \cdot \int_\Omega (|\operatorname{rot} E|^2 + |\operatorname{Rot} H|^2)$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \int_\Gamma \frac{|-\lambda\, d(x)\, E \wedge n + (1-\lambda)\, d(x)\, H|^2}{(1-2\lambda)\, d(x)}.$$

De plus, on a : $\forall (E_0,\, H_0) \in Y,\ \lim\limits_{t \to \infty} cl(E,\, H) = 0.$

On se propose de montrer, par analyse microlocale, les résultats suivants :

THÉORÈME 3. – *On suppose qu'il existe un temps* $T > 0$ *tel que dans* $\Omega\times]0;T[$ *tout rayon rencontre* $\Gamma\times]0;T[$ *en un point non diffractif. Alors il existe* $C > 0$ *et* $\beta > 0$ *tel que l'on ait :* $\forall (E_0, H_0) \in Y$ *donnée de Cauchy du problème* (2)

$$\forall t \geqq 0, \quad cl\,(E, H) \leqq C\, e^{-\beta t} \cdot cl\,(E_0, H_0).$$

THÉORÈME 4. – *On suppose que pour tout* $T > 0$ *il existe au moins un rayon ne rencontrant pas* $\Gamma\times]0;T[$. *Alors* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (E_\varepsilon, H_\varepsilon)$ *solution du problème* (2) *tel que*

$$cl\,(E_\varepsilon, H_\varepsilon)(0) = 1 \qquad et \qquad cl\,(E_\varepsilon, H_\varepsilon)(t) \geqq 1 - \varepsilon, \quad \forall\, 0 \leqq t \leqq T.$$

3. SCHÉMA DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1. – La démonstration du théorème 1 découle, par la propriété du semi-groupe, du lemme suivant :

LEMME 1. – *Sous les hypothèses du théorème* 1, *si* (E, B) *est solution du problème* (1) *avec des données de Cauchy dans* $W \cap M$, *alors on a :*

$$\exists\, C > 0, \quad \int_0^T \int_\Omega (|\,E\,|^2 + |\,B\,|^2) \leqq C \cdot \int_0^T \int_\Gamma |\,E \wedge n\,|^2.$$

Preuve. – Elle se décompose en quatre étapes :

Étape 1. – On se ramène à l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2 E - \Delta E = 0, \quad \operatorname{div} E = 0 \\ E \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0\times]0;T[\\ (\partial_t E \wedge n) \wedge n - \operatorname{rot} E \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma\times]0;T[\end{cases}$$

Par application du théorème de propagation des singularités ([6]-[8]), de l'hypothèse géométrique et du lemme de relèvement ([1]-[2]-[5]), on a :

$$\exists\, c,\, d > 0,$$
$$\|\,E\,\|^2_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \leqq c\cdot(\|\,\partial_n E\,\|^2_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|\,E\,\|^2_{L^2(\Gamma\times]0,T[)}) + d\cdot \|\,E\,\|^2_{H^{-1}(\Omega\times]0,T[)}.$$

Étape 2. – Par un raisonnement microlocal, on a :

$$\exists\, c,\, d > 0,$$
$$\|\,\partial_n E\,\|^2_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|\,E\,\|^2_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \leqq c\cdot \|\,E\wedge n\,\|^2_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} + d\cdot \|\,E\,\|^2_{H^{-1/2}(\Omega\times]0,T[)}.$$

Démonstration. – Grâce à la condition de Silver-Müller, $E \wedge n \in L^2 \Rightarrow B \wedge n \in L^2$. Les relations $(\partial_t E \wedge n) \wedge n - \operatorname{rot} E \wedge n = 0$ et $\operatorname{div} E = 0$ sur le bord assurent que $\partial_n (E \wedge n) \in H^{-1}$ si $E \in L^2$ sur le bord. On a de plus les égalités suivantes : $\partial_t E \cdot n = \operatorname{rot} B \cdot n = \operatorname{div}_\Gamma (B \wedge n) = -\operatorname{div}_\Gamma ((E \wedge n) \wedge n) = -\operatorname{rot}(E \wedge n) \cdot n$, où $\operatorname{div}_\Gamma$ est la divergence surfacique, donc $\partial_t E \cdot n \in H^{-1}$ car $B \wedge n \in L^2$ sur le bord.

D'autre part, sachant que $\operatorname{div} E = 0$ sur le bord, on prouve l'égalité :

$$\partial_t E \cdot n + \partial_n (E \cdot n) = \operatorname{rot} n \cdot (n \wedge E) - \operatorname{div} n \cdot (E \cdot n) + 2 \cdot ((E \cdot \nabla)\, n) \cdot n,$$

et par conséquent on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \exists\, c,\, d > 0, \quad & \|\,\partial_n (E \cdot n)\,\|^2_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|\,\partial_t E \cdot n\,\|^2_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} \\ & \leqq c \cdot \|\,E \wedge n\,\|^2_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} + d \cdot \|\,E\,\|^2_{H^{-1/2}(\Omega\times]0,T[)}. \end{aligned}$$

On montre aussi :

$$\exists\, c > 0,$$
$$\|\,E \cdot n\,\|^2_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \leqq c \cdot \|\,\partial_n (E \cdot n)\,\|^2_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)} + \|\,\partial_t E \cdot n\,\|^2_{H^{-1}(\Gamma\times]0,T[)}$$

de la manière suivante : par un changement de coordonnées, on se ramène à un problème dans un demi-espace. Or microlocalement, au voisinage des directions où l'opérateur ∂_t est non caractéristique, c'est évident avec $\partial_t E \cdot n \in H^{-1}(\Gamma \times]0, T[)$. Mais, le voisinage que l'on vient d'exclure est dans la région elliptique de l'opérateur hyperbolique, on conclut avec $\partial_n (E.n) \in H^{-1}(\Gamma \times]0, T[)$ par un calcul microlocal standard [1]-[2]. ceci termine l'étape 2.

Étape 3. – Il en est de même avec B en considérant les équations

$$\begin{cases} \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0, \qquad (E \wedge n) \wedge n + B \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0; T[\\ \partial_t^2 B - \Delta B = 0, \qquad \operatorname{div} B = 0 \\ (\operatorname{rot} B \wedge n) \wedge n + \partial_t B \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0; T[\end{cases}$$

Conclusion :

$$\exists\, c,\, d > 0,$$

$$\| (E, B) \|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \leqq c \cdot \| E \wedge n \|^2_{L^2(\Gamma \times]0, T[)} + d \cdot \| (E, B) \|^2_{H^{-1/2}(\Omega \times]0, T[)}.$$

Étape 4. – Il reste à montrer que $\| (E, B) \|^2_{H^{-1/2}(\Omega \times]0, T[)} \leqq c_5 \cdot \| E \wedge n \|^2_{L^2(\Gamma \times]0, T[)}$. On démontre cette inégalité par l'absurde.

Démonstration. – Supposons qu'il existe une suite (E_n, B_n) solution du problème (1) telle que : $\| (E_n, B_n) \|_{H^{-1/2}(\Omega \times]0, T[)} = 1$ et $\displaystyle\int_0^T \int_\Gamma | E_n \wedge n |^2 \underset{n \to \infty}{\to} 0.$

Alors (E_n, B_n) vérifie l'inégalité :

$$\| (E_n, B_n) \|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \leqq c \cdot \int_0^T \int_\Gamma | E_n \wedge n |^2 + d.$$

Donc (E_n, B_n) est borné dans $L^2(\Omega \times]0, T[)$. Par injection compacte de $L^2(\Omega \times]0, T[)$ dans $H^{-1/2}(\Omega \times]0, T[)$, on en extrait une sous-suite convergente. Ainsi, il existe $(E, B) = \lim (E_n, B_n)$ dans $H^{-1/2}(\Omega \times]0, T[)$ vérifiant :

$$(3) \qquad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{rot} B = 0, \qquad \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0; T[\\ \operatorname{div} E = 0 \qquad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0; T[\\ E \wedge n = 0, \qquad B.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times]0; T[\\ E \wedge n = 0, \qquad B \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0; T[\\ \| (E, B) \|_{H^{-1/2}(\Omega \times]0, T[)} = 1. \end{cases}$$

On pose N l'espace des solutions du système (3). C'est un sous espace non vide, fermé de $L^2(\Omega \times]0, T[)$ inclus dans $H^1(\Omega \times]0, T[)$ avec

$$\| (E, B) \|^2_{H^1(\Omega \times]0, T[)} \leqq d \cdot \| (E, B) \|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)},$$

donc par injection compacte de $H^1(\Omega) \times]0, T[$ dans $L^2(\Omega \times]0, T[)$, on en déduit que N est de dimension finie.

De plus, ∂_t est une application linéaire de N dans N, donc il existe $\mu \in R$ et $(E, B) \in N$ tel que $\partial_t (E, B) = \mu \cdot (E, B)$. On conclut que $(E, B) \equiv (0, 0)$, car $(E(\cdot, 0), B(\cdot, 0)) \in W \cap M$, où M est l'orthogonal des solutions stationnaires pour la norme V. Ceci contredit le fait que $\| (E, B) \| = 1$.

4. Schéma de la preuve des théorèmes 3, 4 et 2. – La démonstration du théorème 3 découle du lemme 2.

Lemme 2. – *Sous les hypothèses du théorème* 3,

$$\exists\, C > 0, \quad \int_0^T \int_\Omega (| \partial_t H |^2 + | \nabla H |^2) \leqq C \cdot \int_0^T \int_\Gamma (| \partial_t H |^2 + | \partial_n H |^2).$$

Démonstration du lemme 2. – Elle se décompose en trois étapes :

Étape 1. – On se ramène à l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2 H - \Delta H = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0; T[\\ \partial_n H = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times]0; T[\\ \partial_n H + \partial_t H - \lambda\, d(x)\, E \wedge n + (1 - \lambda)\, d(x)\, H = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0; T[\end{cases}$$

Par application du théorème de propagation des singularités, de l'hypothèse géométrique et du lemme de relèvement ([1]-[2]-[5]), on a :

$$\exists\, c,\ d > 0, \quad \int_0^T \int_\Omega (|\partial_t H|^2 + |\partial_n H|^2)$$
$$\leqq c \cdot (\| H \|^2_{H^1(\Gamma \times]0, T[)} + \| \partial_n H \|^2_{L^2(\Gamma \times]0, T[)}) + \cdot d \| H \|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)}.$$

Étape 2. – Par un raisonnement microlocal standard [1]-[2], on a : $\exists\, c,\ d > 0$

$$\| H \|^2_{H^1(\Gamma \times]0, T[)} \leqq c \cdot (\| \partial_t H \|_{L^2(\Gamma \times]0, T[)} + \| \partial_n H \|^2_{L^2(\Gamma \times]0, T[)}) + d \cdot \| H \|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)}.$$

Conclusion :

$$\exists\, c,\ d > 0, \quad \int_0^T \int_\Omega (|\partial_t H|^2 + |\partial_n H|^2)$$
$$\leqq c \cdot (\| \partial_t H \|^2_{L^2(\Gamma \times]0, T[)} + \| \partial_n H \|^2_{L^2(\Gamma \times]0, T[)}) + d \cdot \| H \|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)}.$$

Étape 3. – On montre

$$\| H \|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \leqq c. (\| \partial_t H \|^2_{L^2(\Gamma \times]0, T[)} + \| \partial_n H \|^2_{L^2(\Gamma \times]0, T[)}).$$

suivant des arguments de compacité-unicité standard.

Ceci achève la démonstration du lemme 2.

La démonstration des théorèmes 2 et 4 repose sur l'existence d'une solution de Maxwell localisée autour du rayon qui ne rencontre pas $\Gamma \times]0; T[$. Il suffit de construire une solution de l'équation des ondes à divergence nulle d'énergie localisée, en adaptant la construction de rayon gaussien par Ralston [7].

Note remise le 12 octobre 1994, acceptée le 7 décembre 1994.

Références bibliographiques

[1] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, dans *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribués*, 1, J.-L. Lions éd., Rech. Math. Appl., Masson, Paris, 1988.

[2] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control Optim.*, 30, n° 5, 1992, p. 1024-1065.

[3] H. Barucq, Étude asymptotique du système de Maxwell avec conditions aux limites absorbantes, *Thèse*, Bordeaux.

[4] H. Barucq et B. Hanouzet, Étude asymptotique du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver-Müller II, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 316, série I, 1993, p. 1019-1024.

[5] G. Lebeau, Contrôle et stabilisation hyperboliques, *Séminaire EDP*, École Polytechnique, 1990.

[6] O. Nalin, Contrôlabilité exacte sur une partie du bord des équations de Maxwell, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 309, série I, 1989, p. 811-815.

[7] J. Ralston, Solution of the wave equation with localized energy, *Comm. Pure Appl. Math.*, 22, 1969, p. 807-823.

[8] K. Yamamoto, Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations, *Japan J. Math.*, 14, 1988, p. 119-163.

17, rue Léonard-Mafrand, 92320 Châtillon, France.