C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 169-174, 1996
Contrôle optimal/*Optimal Control*

Contrôlabilité exacte et stabilisation interne des équations de Maxwell

Kim Dang PHUNG

CMLA, ENS Cachan,
61, avenue du Président-Wilson, 94235 Cachan, France.

Résumé. On établit, par des méthodes d'analyse microlocale, la contrôlabilité exacte et la stabilisation interne des équations de Maxwell, suivant le programme développé par Bardos-Lebeau-Rauch.

Exact controllability and stabilization of Maxwell's equations

Abstract. *We prove, by microlocal analysis techniques and Bardos-Lebeau-Rauch's results for the wave equation, the interior controllability and stabilization for the system of Maxwell's equations.*

Abridged English Version

The exact controllability of Maxwell's equations is studied using the HUM method of Lions [3]. Many techniques allow now to achieve an observability result. We propose to apply the results, proved by Bardos-Lebeau-Rauch about control and stabilization of wave equation, which are closely linked to a theorem of propagation of singularities recall in [4].

Let Ω be an open bounded connected domain in $\mathbb{R}^3$, with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, and $\omega \subset \Omega$. We have the following exact controllability theorem:

THEOREM. – *Suppose that there exists $T > 0$ such that every ray passes through a point of $\omega\times]0; T[$. Then for all (E_0, B_0) in a suitable space, there is an optimal control J such that the solution (E, B) of the problem* (P1):

$$\text{(P1)} \quad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{curl} B = J_{|\omega\times]0,T[}, & \partial_t B + \operatorname{curl} E = 0 \quad \text{in } \Omega\times]0; T[\\ E(\cdot, 0) = E_0, & B(\cdot, 0) = B_0 \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} B = 0 \quad \text{on } \Omega\times]0; T[& \\ E \wedge n = 0, & B.n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\times]0; T[\end{cases}$$

verifies $E(T) = 0,\ B(T) = 0$.

The next question is to study stabilization's problems for the system of Maxwell's equations.

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

Let $\sigma(x)$ be a positive function in $C^\infty(\omega)$; we introduce the operator $G = (-\Delta)^{-1}$. The hyperbolic type of these model allows us to prove these two results:

THEOREM. – *Suppose that there exists $T > 0$ such that every ray passes through a point of $\omega\times\,]0;\,T[$. Then for all (E_0, B_0) in a suitable space, the solution (E, B) of the problem* (P2):

$$\text{(P2)}\quad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{curl} B + \sigma E - \operatorname{grad} \mathrm{G} \operatorname{div} E = 0, \qquad \partial_t B + \operatorname{curl} E = 0 \quad \mathit{in}\ \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ E(\cdot, 0) = E_0, \qquad B(\cdot, 0) = B_0 \quad \mathit{in}\ \Omega \\ \operatorname{div} B = 0 \quad \mathit{on}\ \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ E\wedge n = 0, \qquad B.n = 0 \quad \mathit{on}\ \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[\end{cases}$$

decays exponentially to zero.

THEOREM. – *Suppose that there exists $T > 0$ such that every ray passes through a point of $\omega\times\,]0;\,T[$. Then there exist $C > 0$ and $\beta > 0$ such that for all (E_0, B_0) in a suitable space, the function $\mathcal{K}(E, B)(t)$, where (E, B) is the solution of the problem* (P3):

$$\text{(P3)}\quad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{curl} B + \sigma(E + \operatorname{grad} \mathrm{G} \operatorname{div} E) = 0, \qquad \partial_t B + \operatorname{curl} E = 0 \quad \mathit{in}\ \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ E(\cdot, 0) = E_0, \qquad B(\cdot, 0) = B_0 \quad \mathit{in}\ \Omega \\ \operatorname{div} B = 0 \quad \mathit{on}\ \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ E\wedge n = 0, \qquad B.n = 0 \quad \mathit{on}\ \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[\end{cases}$$

and $\mathcal{K}(E, B) = \frac{1}{2}\cdot(|\|E\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div} E\|^2_{L^2(\Omega)}| + \|B\|^2_{L^2(\Omega)})$, *verifies,* $\forall t \geq 0$,

$$\mathcal{K}(E, B) \leq \mathrm{C}e^{-\beta t}\cdot\mathcal{K}(E_0, B_0).$$

---

1. Présentation du problème

On considère le problème suivant, où Ω est un domaine borné connexe de $\mathbb{R}^3$, situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière et $\omega\subset\Omega$ est un ouvert non vide.

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_t E - \operatorname{rot} B = J_{|\omega\times]0,\,T[}, \qquad \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}_t \\ E(\cdot, 0) = E_0, \qquad B(\cdot, 0) = B_0 \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} B = 0 \quad \text{sur } \Omega\times\mathbb{R}_t \\ E\wedge n = 0, \qquad B.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}_t \end{cases}$$

On rappelle les principaux résulats de régularité : le problème (1) est bien posé, soit

$$\begin{aligned} V &= \{f \in (L^2(\Omega))^3\} \times \{g \in (L^2(\Omega))^3/\operatorname{div} g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0\} \\ W &= \{(f, g) \in (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3/\operatorname{rot} f \in (L^2(\Omega))^3,\ f\wedge n_{|\partial\Omega} = 0, \\ &\qquad \operatorname{div} g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0,\ \operatorname{rot} g \in (L^2(\Omega))^3\} \end{aligned}$$

$\forall(E_0, B_0, J) \in W \times (L^2(\Omega))^3$, $\exists!(E, B) \in C^0([0;\,\infty[, W) \cap C^1([0;\,\infty[, V)$ solution du problème (1).

On définit M_B l'orthogonal de $\{g \in (L^2(\Omega))^3/\operatorname{div} g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0,\ \operatorname{rot} g = 0\}$ pour la norme $(L^2(\Omega))^3$. Ainsi, on retrouve $M_B = (L^2(\Omega))^3$, si les hypothèses du lemme de Poincaré sont vérifiées.

Soient $W_{\mathrm{rot}} = \{f \in (L^2(\Omega))^3/\operatorname{div} f = 0,\ \operatorname{rot} f \in (L^2(\Omega))^3,\ f\wedge n_{|\partial\Omega} = 0\}$, et $M = (L^2(\Omega))^3 \times M_B$. On remarque que M est invariant pour le problème (1).

On rappelle que les rayons sont définis comme les projections sur les variables espace-temps des bicaractéristiques de l'opérateur des ondes. On se propose de montrer, en s'appuyant sur les travaux de Bardos-Lebeau-Rauch ([1]-[2]), le théorème de contrôlabilité exact suivant :

THÉORÈME 1. – *On suppose qu'il existe un temps $T > 0$ tel que dans $\Omega\times\,]0;\,T[$ tout rayon rencontre $\omega\times\,]0;\,T[$. Alors pour toute donnée de Cauchy $(E_0,\,B_0) \in W \cap M$ du problème* (1), *il existe $J \in W_{\text{rot}}$ tel que la solution du système* (1) *vérifie : $E(T) = 0,\ B(T) = 0$.*

2. Présentation des problèmes de stabilisation interne

On considère le problème suivant, où Ω est un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^3$, situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière. On introduit l'opérateur $G = (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ et on se donne $\omega \in \Omega$ un ouvert non vide et une fonction $\sigma(x) \in C^\infty(\omega)$ positive non nulle.

$$
(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\partial_t E - \operatorname{rot} B + \sigma E - \operatorname{grad} \mathrm{G} \operatorname{div} E = 0, \qquad \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\
\qquad E(\cdot,\,0) = E_0, \qquad B(\cdot,\,0) = B_0 \quad \text{dans } \Omega \\
\qquad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{sur } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\
\qquad E \wedge n = 0, \qquad B.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[
\end{array}\right.
$$

Le problème (2) est bien posé, soit

$$
\begin{aligned}
V &= \{f \in (L^2(\Omega))^3\} \times \{g \in (L^2(\Omega))^3/\operatorname{div} g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0\} \\
W &= \{(f,\,g) \in (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3/\operatorname{rot} f \in (L^2(\Omega))^3,\ f \wedge n_{|\partial\Omega} = 0, \\
&\qquad \operatorname{div} g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0,\ \operatorname{rot} g \in (L^2(\Omega))^3\}
\end{aligned}
$$

$\forall (E_0,\,B_0) \in W,\ \exists!\,(E,\,B) \in C^0(]0;\,\infty[,\,W) \cap C^1(]0;\,\infty[,\,V)$ solution du problème (2).
D'autre part, l'énergie $\mathcal{H}(E,\,B) = \frac{1}{2} \cdot \int_\Omega (|E|^2 + |B|^2)$ est décroissante et vérifie :

$$
\forall (E_0,\,B_0) \in W, \quad \frac{d}{\mathrm{dt}} \mathcal{H}(E,\,B) + \int_\Omega \sigma |E|^2 + \|\operatorname{div} E\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq 0.
$$

De plus, on a : $\forall (E_0,\,B_0) \in W \cap M,\ \lim_{t\to\infty} (E,\,B) = (0,\,0)$ dans V.

L'hyperbolicité du modèle ci-dessus nous permet d'étendre aux systèmes de Maxwell les résultats de Bardos-Lebeau-Rauch ([1]-[2]). On se propose de montrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 2. – *On suppose qu'il existe un temps $T > 0$ tel que dans $\Omega\times\,]0;\,T[$ tout rayon rencontre $\omega\times\,]0;\,T[$. Alors il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ tels que l'on ait : $\forall (E_0,\,B_0) \in W \cap M$ donnée de Cauchy du problème* (2) *$\forall t \geq 0,\ \mathcal{H}(E,\,B) \leq \mathrm{C}e^{-\beta t} \cdot \mathcal{H}(E_0,\,B_0)$.*

THÉORÈME 3. – *On suppose que pour tout $T > 0$ il existe au moins un rayon ne rencontrant pas $\overline{\omega}\times\,]0;\,T[$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $(E_\varepsilon,\,B_\varepsilon)$ solution du problème* (2) *telle que $\mathcal{H}(E_\varepsilon,\,B_\varepsilon)(0) = 1$ et $\mathcal{H}(E_\varepsilon,\,B_\varepsilon)(t) \geq 1 - \varepsilon,\ \forall 0 \leq t \leq T$.*

Le second problème de stabilisation étudié est :

$$
(3)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\partial_t E - \operatorname{rot} B + \sigma (E + \operatorname{grad} \mathrm{G} \operatorname{div} E) = 0, \qquad \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0 \quad \text{dans } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\
\qquad E(\cdot,\,0) = E_0, \qquad B(\cdot,\,0) = B_0 \quad \text{dans } \Omega \\
\qquad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{sur } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\
\qquad E \wedge n = 0, \qquad B.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[
\end{array}\right.
$$

Le problème (3) est bien posé, $\forall (E_0,\,B_0) \in W,\ \exists!\,(E,\,B) \in C^0(]0;\,\infty[,\,W) \cap C^1(]0;\,\infty[,\,V)$ solution du problème (3).

De plus, la fonctionnelle $\mathcal{K}(E, B) = \frac{1}{2} \cdot (|\|E\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}\, E\|^2_{L^2(\Omega)}| + \|B\|^2_{L^2(\Omega)})$ est décroissante, positive et vérifie :

$$\forall (E_0, B_0) \in W, \quad \frac{d}{\mathrm{dt}}\mathcal{K}(E, B) + \int_\Omega \sigma |E - \mathrm{grad}\, \Delta^{-1}\mathrm{div}\, E|^2 = 0.$$

On se propose de montrer, par propagation des singularités, le résultat suivant :

THÉORÈME 4. – *On suppose qu'il existe un temps $T > 0$ tel que dans $\Omega \times]0; T[$ tout rayon rencontre $\omega \times]0; T[$. Alors il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ tel que l'on ait : $\forall (E_0, B_0) \in W \cap M$ donnée de Cauchy du problème* (3) $\forall t \geq 0$, $\mathcal{K}(E, B) \leq Ce^{-\beta t} \cdot \mathcal{K}(E_0, B_0)$.

3. Schéma de la preuve du théorème 1

On construit suivant la méthode HUM de Lions [3], une application linéaire L qui déterminera le contrôle J adéquat pour ramener le système (1) à l'état d'équilibre à l'instant T. Aussi, on s'intéresse au problème homogène suivant :

$$(4) \qquad \begin{cases} \partial_t U - \mathrm{rot}\, V = 0, & \partial_t V + \mathrm{rot}\, U = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0; T[\\ U(\cdot, 0) = U_0, & V(\cdot, 0) = V_0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathrm{div}\, U = 0, & \mathrm{div}\, V = 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0; T[\\ U \wedge n = 0, & V.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0; T[\end{cases}$$

On pose

$$V_1 = \{f \in (L^2(\Omega))^3 / \mathrm{div}\, f = 0\} \times \{g \in (L^2(\Omega))^3 / \mathrm{div}\, g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0\}$$
$$W_1 = \{(f, g) \in (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3 / \mathrm{div}\, f = 0,\ \mathrm{rot}\, f \in (L^2(\Omega))^3,\ f \wedge n_{|\partial\Omega} = 0,$$
$$\mathrm{div}\, g = 0,\ g.n_{|\partial\Omega} = 0,\ \mathrm{rot}\, g \in (L^2(\Omega))^3\},$$

alors $\forall (U_0, V_0) \in W_1$, $\exists! (U, V) \in C^0(]0; \infty[, W_1) \cap C^1(]0; \infty[, V_1)$ solution du problème (4) et l'énergie du système $\mathcal{F}(U, V) = \frac{1}{2} \cdot \int_\Omega (|U|^2 + |V|^2)$ est finie et constante.

Par la méthode HUM, l'application L reliant les données initiales du problème homogène ci-dessus à celles du problème rétrograde de contrôlabilité définit un isomorphisme de $W_1 \cap M$ dans $W \cap M$, si le lemme suivant s'applique :

LEMME. *Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide. On suppose qu'il existe un temps $T > 0$ tel que dans $\Omega \times]0; T[$ tout rayon rencontre $\omega \times]0; T[$. Alors il existe $C > 0$ tel que l'on ait : $\forall (U_0, V_0) \in W_1 \cap M$ donnée de Cauchy du problème* (4),

$$\|(U, V)\|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \leq C \cdot \|U\|^2_{L^2(\omega \times]0, T[)}$$

La démonstration de ce lemme se décompose en trois étapes :

Étape 1. – On se ramène à l'équation des ondes. Par application du théorème de propagation des singularités [4], de l'hypothèse géométrique ([1]-[2]), on a : $\exists \tilde{\omega} \subset \omega$, $\exists c, d > 0$,

$$\|(U, V)\|^2_{L^2(\Omega \times]0, T[)} \leq c \cdot \|(U, V)\|^2_{L^2(\tilde{\omega} \times]0, T[)} + d \cdot \|(U, V)\|^2_{H^{-1}(\Omega \times]0, T[)}.$$

Étape 2. – Par un raisonnement local, on a

$$\exists c, d > 0, \quad \|V\|^2_{L^2(\tilde{\omega} \times]0, T[)} \leq c \cdot \|U\|^2_{L^2(\omega \times]0, T[)} + d \cdot \|(U, V)\|^2_{H^{-1}(\Omega \times]0, T[)}.$$

Démonstration. – Soit ϑ un voisinage de $\omega\times\,]0,\,T[$ dans $\mathbb{R}^4$ et $\varphi\in C_0^\infty(\vartheta)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\varphi V) = -\mathrm{rot}\,(\varphi U) + \nabla\varphi\wedge U + \partial_t\varphi \in H^{-1}\\
&\mathrm{div}\,(\varphi V) = \nabla\varphi\cdot V \in H^{-1}\\
&\mathrm{rot}\,(\varphi V) = \partial_t(\varphi U) - \partial_t\varphi U + \nabla\varphi\wedge V \in H^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc $(\partial_t^2+\Delta)(\varphi V) = (\partial_t^2 - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot} + \mathrm{grad}\mathrm{div})(\varphi V)\in H^{-2}$, d'où $(\varphi V)\in L^2$.

Ceci termine l'étape 2.

Conclusion :

$$\exists\, c,\, d>0,\quad \|(U,\,V)\|^2_{L^2(\Omega\times\,]0,\,T[)} \le c\cdot\|U\|^2_{L^2(\omega\times\,]0,\,T[)} + d\cdot\|(U,\,V)\|^2_{H^{-1}(\Omega\times\,]0,\,T[)}$$

Étape 3. – Il reste à montrer que $\|(U,\,V)\|^2_{H^{-1}(\Omega\times\,]0,\,T[)}\le c\cdot\|U\|^2_{L^2(\omega\times\,]0,\,T[)}$. On démontre cette inégalité par l'absurde, en suivant des arguments de compacité-unicité standard.

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

La démonstration du théorème 3 repose sur l'existence d'une solution des ondes localisée autour du rayon qui ne rencontre pas $\overline{\omega}\times\,]0;\,T[$.

4. Schéma de la preuve des théorèmes 2 et 4

La démonstration des théorèmes 2 et 4 découle de la décomposition orthogonale du champ électrique sous la forme suivante :

$$(L^2(\Omega))^3 = \mathrm{grad}\,H_0^1(\Omega)\oplus\{w\in(L^2(\Omega))^3,\ \mathrm{div}\,w=0\}.$$

Ainsi, le champ E des problèmes de stabilisation étudiés se décompose en $\nabla p + w$ tels que :

$$\begin{cases}\Delta p = \mathrm{div}\,E & \text{dans } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ p=0 & \text{sur } \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[\end{cases}\quad \text{et}\quad \begin{cases}\mathrm{rot}\,w=\mathrm{rot}\,E, \quad \mathrm{div}\,w=0 & \text{dans } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ w\wedge n = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[\end{cases}.$$

La solution $(E,\,B)$ du système (2) vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases}\partial_t^2 w - \Delta w + \partial_t(\sigma E + \nabla p + \partial_t\nabla p) = 0 & \text{dans } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ \mathrm{div}\,w = 0,\qquad w\wedge n = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[\end{cases}\tag{5}$$

$$\begin{cases}\partial_t^2 B - \Delta B + \mathrm{rot}\,(\sigma E) = 0 & \text{dans } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ B.n = 0,\qquad \mathrm{rot}\,B\wedge n = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[\end{cases}\tag{6}$$

$$\begin{cases}\partial_t\Delta p + \Delta p + \mathrm{div}\,(\sigma E) = 0 & \text{dans } \Omega\times\,]0;\,\infty[\\ p=0 & \text{sur } \partial\Omega\times\,]0;\,\infty[\end{cases}\tag{7}$$

avec $E = \nabla p + w$.

En adaptant convenablement la démonstration du lemme 1, on obtient alors, à partir des systèmes hyperboliques (5) et (6), l'estimation ci-dessous:

$$\exists\, c>0.\quad \|(E,\,B)\|^2_{L^2(\Omega\times\,]0,\,T[)}\le c\cdot(\|\sigma E\|^2_{L^2(\Omega\times\,]0,\,T[)} + \|\nabla p\|^2_{L^2(\Omega\times\,]0,\,T[)} + \|\partial_t\nabla p\|^2_{L^2(\Omega\times\,]0,\,T[)}).$$

Grâce à l'ellipticité du problème (7), on a :

$$\exists\, c > 0, \quad \|\partial_t \nabla p\|^2_{L^2(\Omega\times\,]0,\,T[)} \leq c \cdot (\|\sigma E\|^2_{L^2(\Omega\times\,]0,\,T[)} + \|\nabla p\|^2_{L^2(\Omega\times\,]0,\,T[)}).$$

Ceci nous conduit au résultat suivant :

Sous les hypothèses du théorème 2,

$$\exists\, C > 0, \quad \mathcal{H}(E,\, B)(T) \leq C \cdot \int_0^T \left(\int_\Omega \sigma |E|^2 + \|\operatorname{div} E\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \right).$$

On en déduit le théorème 2 par la propriété de semi-groupe.

De même, le champ électrique de la solution du problème (3) se décompose en $E = \nabla p + w$ où p est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \Delta p + (\nabla \sigma \cdot w)_{|\omega} = 0 & \text{dans } \Omega \times\,]0;\, \infty[\\ \qquad p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times\,]0;\, \infty[\end{cases}$$

et w est à décroissance exponentielle :

Sous les hypothèses du théorème 4,

$$\exists\, C,\, \beta > 0, \quad \|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|B\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{C}e^{-\beta t} \cdot \mathcal{K}(E_0,\, B_0).$$

Note remise le 20 avril 1996, acceptée le 22 avril 1996.

Références bibliographiques

[1] **Bardos C., Lebeau G. et Rauch J., 1988**. *In* **Lions J. L.** éd., *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribués*, 1, coll. RMA, Masson, Paris.

[2] **Bardos C., Lebeau G. et Rauch J., 1992**. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control Optim.*, 30, n° 5, p. 1024-1065.

[3] **Lions J. L., 1988**. *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations des systèmes distribués*, 1, coll. RMA, Masson, Paris.

[4] **Nalin O., 1989**. Contrôlabilité exacte sur une partie du bord des équations de Maxwell, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, série I, p. 811-815.