La propriété de doubling

Kim Dang Phung

1 Introduction

On considère un problème elliptique dans un domaine connexe borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, muni d'un bord $\partial\Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = h \quad \text{sur } \partial\Omega \ . \end{array} \right. \tag{E}$$

On se donnera $h \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ de sorte que $u \in H^2(\Omega)$. On notera $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \ |x| < R\}$, où $R > 0$. Nous supposerons que $B_1 \subseteq \Omega$.

Nous allons introduire les quantités suivantes, soit $r > 0$:

$$\begin{array}{rl} H(r) = & \int_{\partial B_r} |u(x)|^2 \, dx \\ D(r) = & \int_{B_r} |\nabla u(x)|^2 \, dx \end{array}$$

et

$$N(r) = \frac{rD(r)}{H(r)} \tag{1.1}$$

Le but est de montrer que sous les hypothèses précédentes, la fonction N est croissante pour $0 < r \leq 1$. Le résultat de Garofalo et Lin s'écrit

2 Principal résultat

Théorème .- Pour tout $0 < M \leq 1/2$, pour tout $u \in H^2(\Omega)$ solution de (E), on a l'inégalité suivante :

$$\int_{B_{2M}} |u(x)|^2 \, dx \leq 2^n \exp\left((\ln 4) \frac{\int_{B_1} |\nabla u(x)|^2 \, dx}{\int_{\partial B_1} |u(x)|^2 \, dx} \right) \int_{B_M} |u(x)|^2 \, dx$$

3 Changement de variables en coordonnées sphériques

Posons $|x| = \sqrt{x_1^2 + .. + x_n^2}$. Notons $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \ |x| = 1\}$ la sphère unité. On rappelle les résultats classiques suivants :

Soit f une fonction mesurable positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \int_{S^{n-1}} f(rs)\, r^{n-1} dr d\sigma_n(s) \ .$$

Si $n = 2$, $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$.
Si $n = 3$, $\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \ f(r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\phi)\, r^2\cos\phi$.

Le résultat de Garofalo et Lin repose sur les deux égalités suivantes, soit $R > 0$:

$$\int_{B_R} f(x)\, dx = \int_0^R \int_{S^{n-1}} f(rs)\, r^{n-1} dr d\sigma(s) \ , \tag{F1}$$

$$\int_{B_R} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{S^{n-1}} f(Rs)\, s_i \ R^{n-1} d\sigma(s) \ . \tag{F2}$$

L'égalité (F2), valable si ∇f est intégrable, traduit la formule de Green, en effet :

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx &= \int_{\partial B_R} f(x)\, n_i(x)\, dx \\ &= \int_{S^{n-1}} f(Rs)\, s_i \ R^{n-1} d\sigma(s) \quad \text{car sur } \partial B_R,\ n(x) = \tfrac{x}{|x|} \end{aligned}$$

4 Calcul de variation

Calcul de la dérivée de $H(r) = \int_{S^{n-1}} |u(rs)|^2 r^{n-1} d\sigma(s)$:

$$\begin{aligned} H'(r) &= (n-1)\, r^{n-2} \int_{S^{n-1}} |u(rs)|^2 d\sigma(s) + \int_{S^{n-1}} 2u(rs)\, (\nabla u)_{|rs} \cdot sr^{n-1} d\sigma(s) \\ &= \tfrac{n-1}{r} H(r) + \int_{S^{n-1}} \left(\nabla u^2\right)_{|rs} \cdot sr^{n-1} d\sigma(s) \\ &= \tfrac{n-1}{r} H(r) + \int_0^r \int_{S^{n-1}} div\left(\nabla u^2\right) r^{n-1} dr d\sigma(s) \\ &= \tfrac{n-1}{r} H(r) + \int_{B_r} \Delta\left(u^2\right) dx \end{aligned}$$

Or $\Delta\left(u^2\right) = 2u\Delta u + 2|\nabla u|^2$. Comme $\Delta u = 0$, on a :

$$\frac{H'(r)}{H(r)} = (n-1)\frac{1}{r} + 2\frac{\int_{B_r} |\nabla u|^2 dx}{H(r)} \tag{4.1}$$

Il faut remarquer que

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial B_r} u\nabla u \cdot \frac{x}{|x|} dx \tag{4.2}$$

en effet,

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx &= \int_{B_r} \partial_{x_i} u \partial_{x_i} u dx \\ &= \int_{B_r} \partial_{x_i}\left[u\partial_{x_i} u\right] dx - \int_{B_r} \partial_{x_i}^2 u dx \\ &= \int_{\partial B_r} \left[u\partial_{x_i} u\right] \tfrac{x_i}{|x|} dx \quad \text{car } \Delta u = 0 \text{ et sur } \partial B_R,\ n(x) = \tfrac{x}{|x|} \end{aligned}$$

Par conséquent, (4.1) se réécrit, à partir de (4.2) :

$$\frac{H'(r)}{H(r)} = (n-1)\frac{1}{r} + 2\frac{\int_{\partial B_r} u\nabla u \cdot \frac{x}{|x|}dx}{H(r)}$$

Calcul de la dérivée de $D(r) = \int_0^r \int_{S^{n-1}} \left|(\nabla u)_{|\rho s}\right|^2 \rho^{n-1} d\rho d\sigma(s)$:

$$\begin{aligned} D'(r) &= \int_{S^{n-1}} \left|(\nabla u)_{|rs}\right|^2 r^{n-1} d\sigma(s) \\ &= \frac{1}{r}\int_{S^{n-1}} \left|(\nabla u)_{|rs}\right|^2 rs \cdot s r^{n-1} d\sigma(s) \\ &= \frac{1}{r}\int_0^r \int_{S^{n-1}} div\left(\left|(\nabla u)_{|rs}\right|^2 rs\right) r^{n-1} dr d\sigma(s) \\ &= \frac{1}{r}\int_{B_r} div\left(|\nabla u|^2 x\right) dx \end{aligned}$$

Or $div\left(|\nabla u|^2 x\right) = |\nabla u|^2 divx + \nabla\left(|\nabla u|^2\right)\cdot x$, avec $divx = n$. Il reste à calculer $\int_{B_r} \nabla\left(|\nabla u|^2\right)\cdot xdx$, si $u \in H^2(\Omega)$ solution de (E) :

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \partial_{x_i}\left((\partial_{x_j}u)^2\right)\cdot x_i dx &= 2\int_{B_r} \partial_{x_j}u\partial^2_{x_ix_j}ux_idx \\ &= 2\int_{B_r} \partial_{x_j}\left[\partial_{x_j}u\partial_{x_i}ux_i\right]dx - 2\int_{B_r}\partial^2_{x_j}u\partial_{x_i}ux_idx - 2\int_{B_r}\partial_{x_j}u\partial_{x_i}u\partial_{x_j}x_idx \\ &= 2\int_{\partial B_r}\left[\partial_{x_j}u\partial_{x_i}ux_i\right]\frac{x_j}{|x|}dx - 2\int_{B_r}\left|\partial_{x_i}u\right|^2 dx \\ &= 2r\int_{\partial B_r}\left|\nabla u\cdot\frac{x}{|x|}\right|^2 dx - 2\int_{B_r}|\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

Par conséquent, $D'(r) = \frac{n-2}{r}D(r) + 2\int_{\partial B_r}\left|\nabla u\cdot\frac{x}{|x|}\right|^2 dx$. Ce qui se réécrit :

$$\frac{D'(r)}{D(r)} = (n-2)\frac{1}{r} + 2\frac{\int_{\partial B_r}\left|\nabla u\cdot\frac{x}{|x|}\right|^2 dx}{D(r)} \tag{4.3}$$

Calcul de la dérivée de $N(r) = \frac{rD(r)}{H(r)}$:

$$N'(r) = N(r)\left[\frac{1}{r} + \frac{D'(r)}{D(r)} - \frac{H'(r)}{H(r)}\right] \tag{4.4}$$

On conclut, à partir de (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) que

$$N'(r) = N(r)\left[2\frac{\left(\int_{\partial B_r}\left|\nabla u\cdot\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\right)\left(\int_{\partial B_r}|u(x)|^2 dx\right) - \left(\int_{\partial B_r} u\nabla u\cdot\frac{x}{|x|}dx\right)^2}{D(r)H(r)}\right] \tag{4.5}$$

Par Cauchy-Schwartz, on en déduit que $N'(r) \geq 0$ i-e N est croissante sur $]0,1]$. Si $r \leq 1$, alors $N(r) \leq N(1)$ autremant dit $\frac{2D(r)}{H(r)} \leq \frac{1}{r}2N(1)$. Donc à partir de (1.1) et (4.1), on a :

$$\frac{H'(r)}{H(r)} - (n-1)\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r}2N(1)$$

Ce qui se réécrit : $\forall r \leq 1$,

$$\frac{d}{dr}\left(\ln\left(\frac{H(r)}{r^{n-1}}\right)\right) \leq 2N(1)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{4.6}$$

En intégrant (4.6) entre $R > 0$ et $2R \geq 1$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{H(2R)}{H(R)}\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq 2N(1)(\ln 2)$$

Ce qui se réécrit : $\forall 0 < R \leq 1/2$,

$$\int_{S^{n-1}} |u(2Rs)|^2 (2R)^{n-1} d\sigma(s) \leq 2^{n-1} e^{N(1)\ln 4} \int_{S^{n-1}} |u(Rs)|^2 R^{n-1} d\sigma(s)$$

Par conséquent, pour tout $M \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} \int_{B_{2M}} |u(x)|^2 dx &= \int_0^{2M}\int_{S^{n-1}} |u(rs)|^2 r^{n-1} dr d\sigma(s) \\ &= 2\int_0^M \int_{S^{n-1}} |u(2Rs)|^2 (2R)^{n-1} dR d\sigma(s) \\ &\leq 2^n e^{N(1)\ln 4} \int_0^M \int_{S^{n-1}} |u(Rs)|^2 R^{n-1} dR d\sigma(s) \\ &\leq 2^n e^{N(1)\ln 4} \int_{B_M} |u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

References

[GL] N. Garofalo and F. Lin, Monotonicity properties of variational integrals, Ap weights and unique continuation, Indiana Univ. Math. J.,35, 2, 1986,p.245-268.

[GL2] N. Garofalo and F. Lin, Unique continuation for elliptic operators: a geometric approach, Comm. Pure Appl. Math.,40, 3,1987,p.347-366.

[FGL] E. Fabes, N. Garofalo and F. Lin, A partial answer to a conjecture of B. Simon concerning unique continuation, J. Funct. Anal,88, 1,1990,p.194-210.