Observation et stabilisation d'ondes : géométrie et coût du contrôle

Mémoire présenté pour
l'habilitation à diriger des recherches,
spécialité mathématiques.

Kim Dang PHUNG

17 décembre 2007

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce mémoire consiste à décrire mes activités de recherche depuis l'obtention de la thèse jusqu'à mes récents travaux. Mes centres de recherche sont les propriétés qualitatives des équations aux dérivées partielles (EDP) dans le cadre de la théorie du contrôle des EDP dans des domaines bornés. Les équations qui rentrent en jeu sont celles de la physique mathématique : les équations de Schrödinger (mécanique quantique), les équations de Maxwell (électromagnétisme) et les équations hyperboliques, les équations d'Euler (mécanique des fluides) et les équations paraboliques. Mes travaux englobent des résultats sur la contrôlabilité exacte, le contrôle approché et optimal, et aussi des résultats de stabilisation (contrôle en boucle fermée).

2 Travaux directement liés à la thèse

Dans cette section sont rappelées les définitions et les notations classiques présentes dans ce mémoire. Aussi, nous allons commencer par rappeler les notions de base de la théorie du contrôle des EDP.

Ensuite, nous décrivons deux résultats directement liés à la thèse : la stabilisation des équations d'Euler 2D incompressible par la force de Lorentz générée par les équations de Maxwell avec loi d'Ohm; le coût du contrôle approché de l'équation de la chaleur avec potentiel.

Contrôler un système consiste à être capable de modifier le comportement de la solution d'une EDP selon notre désir. Dans le cadre de système gouverné par des EDP d'évolution en temps et se propageant dans un domaine en espace Ω borné, le problème modèle de la contrôlabilité exacte (respectivement, approchée) revient à amener en un temps $T > 0$ fixé, la solution d'une EDP depuis une donnée initiale vers une cible donnée (respectivement, vers un voisinage de taille $\varepsilon > 0$ de la cible) en construisant un contrôle adéquat supporté dans un sous-domaine $\omega \times]0,T[$ de $\overline{\Omega} \times]0,T[$ (dans ce paragraphe, ω est soit une partie de $\partial\Omega$, soit un ouvert de Ω). Pour des systèmes linéaires, la contrôlabilité exacte est équivalente par dualité à l'obtention d'une inégalité d'observabilité qui consiste à majorer la donnée initiale de la solution $u(x,t)$ d'une EDP linéaire définie dans un domaine borné $\Omega \times]0,T[$ par sa restriction sur un sous-domaine $\omega \times]0,T[$ de $\overline{\Omega} \times]0,T[$, dans des normes adéquates:

$$\left\| u(x,0)_{|x\in\Omega} \right\| \leq C \left|\left|\left| u(x,t)_{|x\in\omega,t\in]0,T[} \right|\right|\right| , \tag{2.1}$$

et la constante C ne dépend que de (Ω,ω,T). C sera alors appelée constante d'observabilité. Par ailleurs, la constante C détermine le coût du contrôle. Le sous-domaine $\omega \times]0,T[$ correspond à la taille du support du contrôle.

Si l'on s'intéresse à des systèmes ayant des effets régularisant sur la donnée initiale, alors le choix des normes $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ joue un rôle prédominant. Si l'on s'intéresse à des systèmes où les ondes (ou les singularités) se propagent à vitesse finie, en agissant dans la région $\omega \times]0,T[\subset \overline{\Omega} \times]0,T[$, il faudra se donner un temps de contrôlabilité T suffisamment grand pour que l'état de la solution puisse être modifié sur tout le domaine Ω à l'instant T. De plus, pour réaliser la contrôlabilité exacte, le sous-domaine ω devra être suffisamment grand à cause des rayons captifs. Maintenant, si la constante C devait dépendre de la fréquence liée à la donnée initiale $u(x,0)$, alors on ne pourrait qu'en déduire un résultat de contrôlabilité approchée avec un coût approprié (ce coût sera d'autant plus élevé si la taille ε du voisinage est petite). L'obtention de telles inégalités s'apparente aux problèmes d'observabilité et quantifie la propriété de continuation unique de l'EDP.

Une étude approfondie des propriétés qualitatives de l'EDP est donc nécessaire pour pouvoir résoudre de manière fine les problèmes d'observabilité et de contrôlabilité. En parallèle, le problème de la stabilisation se rapporte à une étude du comportement asymptotique en temps de la solution d'une EDP. On s'intéresse à des systèmes dissipatifs où l'amortissement n'agit que dans la région $\omega \times]0,+\infty[\subset \overline{\Omega} \times]0,+\infty[$. On vise alors une décroissance exponentielle en temps de la solution du système amorti dans une norme adéquate. Par une technique de perturbation, la décroissance exponentielle peut être équivalente à l'obtention d'une inégalité d'observabilité où la constante C d'observabilité ne dépend que de (Ω, ω, T). Si la constante C devait dépendre de la fréquence liée à la donnée initiale $u(x,0)$, alors on ne pourrait qu'en déduire un taux de décroissance non uniforme en la donnée initiale du système amorti.

Notations .- La fonction caratéristique sur un ensemble X sera notée 1_X. L'énergie à l'instant t d'une fonction $f = f(x,t) \in C^1\left(\mathbb{R}; L^2(\Omega)\right) \cap C\left(\mathbb{R}; H^1(\Omega)\right)$ est définie par

$$E(f,t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\partial_t f(x,t)|^2 + |\nabla f(x,t)|^2 \right) dx \ .$$

2.1 Un aperçu de l'état de l'art pour l'équation des ondes

Dans le cadre de la problématique de la contrôlabilité d'un système linéaire réversible modèle comme l'équation des ondes dans un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, à bord $\partial\Omega$ régulier, les questions suivantes ont fait l'objet de nombreux travaux.
Fixons $T > 0$ et Γ une partie non vide de $\partial\Omega$. Soit $\mathcal{F}$ l'application de $L^2(\partial\Omega \times]0,T[)$ dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ définie par la résolution du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 v - \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \times]0,T[\ , \\ v = g 1_{\Gamma \times]0,T[} & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\ , \\ (v, \partial_t v)(\cdot, T) = (0,0) & \text{dans } \Omega \ , \end{array} \right. \qquad \text{et} \quad \mathcal{F}(g) = (v, \partial_t v)(\cdot, 0) \qquad \text{dans } \Omega \ .$$

Étant donné $C_{ad} \subseteq L^2(\Gamma \times]0,T[)$ et $D_{ad} \subseteq L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, choisissons $(v_0, v_1) \in D_{ad}$. On considère la fonctionnelle $J_{(v_0,v_1)}$ sur C_{ad} définie par

$$J_{(v_0,v_1)}(g) = \|\mathcal{F}(g) - (v_0, v_1)\|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \ .$$

La contrôlabilité exacte frontière de l'équation des ondes est équivalente à la surjectivité de l'application $\mathcal{F}$. La question naturelle, compte tenu des propriétés physiques des ondes est : quelle situation géométrique, et notamment quelles hypothèses sur (Ω, Γ, T) doit-on imposer pour que la surjectivité de $\mathcal{F}$ soit vérifiée ?
Dans la mesure où les hypothèses géométriques ne sont pas satisfaites pour que $\mathcal{F}$ soit surjective, nous allons rechercher un espace fonctionnel D_{ad} dans lequel $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ soit dense. La question de la contrôlabilité approchée se réécrit ainsi : pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $(v_0, v_1) \in D_{ad}$, existe-t-il un contrôle approché $g \in L^2(\Gamma \times]0,T[)$ tel que $J_{(v_0,v_1)}(g) \leq \varepsilon$? Au quel cas, peut-on estimer le coût de ce contrôle approché en fonction de ε ?
Eventuellement (et ceci correspond à la notion de contrôle optimal), nous essayons de minimiser sur tous les contrôles admissibles g, la fonctionnelle $J_{(v_0,v_1)}(g)$. Ceci se ramène à la question suivante : pour tout $(v_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, existe-t-il un contrôle optimal $g \in C_{ad}$ tel que $J_{(v_0,v_1)}(g) = \inf_{h \in C_{ad}} J_{(v_0,v_1)}(h)$?
Quand le contrôle dépend de la solution v (contrôle en boucle fermée) et quand le système devient dissipatif (par exemple, en remplaçant le contrôle par une condition aux limites absorbante), l'énergie est une fonction positive et décroissante en temps. Aussi, nous étudions le comportement en temps long de l'énergie. En particulier, le choix de différentes conditions de Cauchy et/ou d'hypothèses géométriques entraîne différentes estimations sur le taux de décroissance de l'énergie. La stabilisation forte consiste à établir un taux de décroissance uniforme et exponentiel en temps.

La méthode H.U.M. de J.-L. Lions [Lio] caractérise le contrôle exact en résolvant le problème dual d'observabilité. Dans notre cas modèle, la contrôlabilité exacte frontière est équivalente à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour toute solution des ondes

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\ , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\ , \\ (u, \partial_t u)(\cdot, 0) = (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \ , & \end{cases} \tag{2.2}$$

on ait

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C \ \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \ .$$

Plus généralement, le problème d'observabilité consiste à majorer la solution définie dans Ω d'une EDP par sa restriction sur une partie Γ du bord $\partial\Omega$ ou sur un ouvert ω de Ω , dans des normes adéquates. Pour une large classe d'EDP, de telles estimations sont fausses sans des contraintes sur les données de Cauchy et/ou sans des hypothèses géométriques. Aussi, F. John [J] a introduit les estimations de dépendance de type Hölder et de type logarithmique qui s'énoncent, dans notre cas modèle de la manière suivante. La dépendance de type Hölder correspond à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \neq 0$, on ait

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \left(C \frac{\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}}{\|(u_0, u_1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}} \right)^{1/\alpha} \ \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \ ,$$

où $\alpha > 1$. La dépendance de type logarithmique correspond à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \neq 0$, on ait

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq e^{\left(C \frac{\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}}{\|(u_0, u_1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}} \right)^{1/\beta}} \ \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} \ ,$$

où $\beta \in (0, 1)$. Les estimations de dépendance de type Hölder ou logarithmique peuvent être vues comme des inégalités d'observabilité à basse fréquence où la quantité

$$\frac{\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}}{\|(u_0, u_1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}}$$

est une mesure naturelle de la fréquence de l'onde. On peut ainsi noter que de telles estimations donnent une quantification de la propriété de continuation unique (voir [Pay] dans le cadre des problèmes inverses et mal-posés). Par un argument de dualité, de telles estimations de dépendance permettent d'estimer le coût du contrôle approché (voir aussi les travaux de J.-L. Lions dans le cadre du contrôle optimal à partir des techniques de minimisation). Finalement, chaque type d'inégalités d'observabilité ou de dépendance entraîne un taux de décroissance exponentiel, polynomial ou logarithmique pour des systèmes dissipatifs adéquats, par exemple

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[\ , \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times]0, +\infty[\ , \\ \partial_n w + \partial_t w = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[\ , \\ (w, \partial_t w)(\cdot, 0) = (w_0, w_1) \in H^1(\Omega) \cap \left\{ w_{0|(\partial\Omega\setminus\Gamma)} = 0 \right\} \times L^2(\Omega) \ . & \end{cases}$$

Les travaux de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [BLR] établissent des conditions géométriques, appelées condition de contrôle géométrique, presque nécessaires et suffisantes pour la stabilisation forte et la contrôlabilité exacte de problèmes hyperboliques scalaires avec les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann. À partir des techniques d'analyse microlocale, ils commencent par démontrer un résultat reliant les normes Sobolev microlocales jusqu'au bord et les traces (lemme de relèvement). Puis ils utilisent le résultat de R. Melrose et J. Sjöstrand [MS] sur la propagation des singularités (en terme de propagation du front d'onde jusqu'au bord) d'une équation hyperbolique scalaire avec les conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, voire la condition aux limites absorbante $\partial_\nu + \partial_t$. Cela aboutit à l'inégalité suivante : $\forall T \geq T_c$, $\exists c, d > 0$,

$$\|u\|_{H^1(\Omega\times]0,T[)} \leq c\ \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma\times]0,T[)} + d\ \|u\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\ .$$

Il reste à faire disparaître le terme d'ordre inférieur : $d\ \|u\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}$, et cela peut se faire par contradiction et avec un argument de compacité-unicité.

L'inégalité ci-dessus s'obtient grâce à la condition de contrôle géométrique (CCG avec (Ω, Γ, T_c)) suivante :

- $\partial\Omega \in C^\infty$, n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes (ce qui entraîne que pour tout point (x, t) de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, il existe une unique courbe vivant dans l'espace des phases, appelée bicaractéristique généralisée, qui est limite de bicaractéristiques brisées de $\partial_t^2 - \Delta$ n'ayant que des contacts hyperboliques avec le bord, et dont la projection sur les variables espace-temps passe par (x, t)) ;
- Tout rayon généralisé (i.e., la projection sur les variables espace-temps de la bicaractéristique généralisée), $(x(\rho), t(\rho))$ partant avec $t(0) = 0$ rencontre $\Gamma \times (0, T_c)$ en un point non diffractif.

De manière imagée, un point diffractif est un point du bord qui est rasé par le rayon en y laissant une empreinte insuffisante. Aussi, un contact hyperbolique avec le bord correspond à la loi de l'optique géométrique "angle de réflexion=angle d'incidence" au bord dans la métrique euclidienne.

Dans le cadre de l'observabilité interne la condition de contrôle géométrique (CCG avec (Ω, ω, T_c)), ω étant un ouvert non vide de Ω, devient :

- $\partial\Omega \in C^\infty$, n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes ;
- Tout rayon généralisé $(x(\rho), t(\rho))$ partant avec $t(0) = 0$ rencontre $\omega \times (0, T_c)$.

Sous cette CCG, on a l'inégalité suivante : $\forall T \geq T_c$, $\exists c, d > 0$,

$$\|u\|_{H^1(\Omega\times]0,T[)} \leq c\ \|\partial_t u\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} + d\ \|u\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\ ,$$

où le terme d'ordre inférieur : $d\ \|u\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}$, disparait à partir d'un argument de compacité-unicité (toute solution de $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ avec la condition de Dirichlet homogène au bord et vérifiant $u = 0$ dans $\omega \times (0, T)$ pour $T \geq T_c$ doit valoir $u = 0$ dans $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$).

La CCG peut aussi se formuler en terme de géodésique associé au Laplacien qui est la projection sur la variable espace des bicaractéristiques généralisées associées à $\partial_t^2 - \Delta$ (voir [Mi]).

Dans le cas particulier d'un domaine strictement convexe (donc, il n'y a que des contacts hyperboliques au bord), la construction de solutions de l'équation des ondes, qui asymptotiquement quand la fréquence de l'onde tend vers l'infini, sont localisées et se propagent le long d'un rayon de l'optique géométrique (i.e., le long d'arcs de géodésique se réfléchissant sur le bord selon les lois de l'optique géométrique) est réalisée par J. Ralston [Ra]. L'existence de telles solutions à haute fréquence (appelées rayons gaussiens) implique la nécessité de conditions géométriques pour la contrôlabilité exacte ou la stabilisation forte de système hyperbolique (voir [BLR]).

Le caractère "nécessaire et suffisant de la CCG" a été établi par N. Burq et P. Gérard [BG] à partir des mesures de défaut et se formule comme suit. Soit $\varphi \in C_0(\partial\Omega \times]0, T[)$, on suppose que $\partial\Omega \in C^\infty$, n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes. Alors, la condition géométrique stipulant que tout rayon généralisé rencontre l'ensemble $\varphi \neq 0$ en un point non diffractif, est équivalente à l'inégalité d'observation suivante : $\exists c > 0$,

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq c\ \|\varphi \partial_\nu u\|_{L^2(\partial\Omega\times]0,T[)}\ .$$

À partir de techniques plus simples appelées méthode des multiplicateurs, J.-L. Lions [Lio] (voir aussi [Ko]) avait auparavant établi une inégalité d'observabilité. En particulier, il obtient sous des hypothèses géométriques non optimales, une bonne connaissance de la constante d'observabilité vis-à-vis du temps de contrôlabilité.

Sans des hypothèses géométriques particulières, sauf Ω connexe de classe C^3 et $T > 0$ assez grand, les travaux de L. Robbiano [Ro2] sur les inégalités de Carleman elliptiques locales permettent d'obtenir une estimation de dépendance de type logarithmique avec $\beta = 1/2$ pour les équations hyperboliques à coefficients indépendants du temps dans $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et un résultat de contrôlabilité approchée pour des problèmes hyperboliques avec une estimation de la forme e^{c/ε^2} du coût du contrôle. Par ailleurs, à partir du calcul h-pseudodifférentiel, L. Robbiano obtient des inégalités locales de Carleman dans un domaine borné pour des opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients réguliers avec la condition au bord de Dirichlet. Le calcul h-pseudodifférentiel est utilisé via l'inégalité de Garding et permet d'absorber les termes d'ordre "inférieur" pour h suffisamment petit. Ainsi, une estimation de dépendance de type Hölder pour les solutions de l'équation elliptique suivante

$$\partial_t^2 y + \Delta y = 0 \quad \text{dans } M \times]0, T[\ , \qquad y = 0 \quad \text{sur } \partial M \times]0, T[\ ,$$

est démontrée où Δ est le laplacien sur la variété M riemannienne C^∞, compacte, de dimension n et connexe à bord. Une transformation gaussienne est ensuite utilisée pour se ramener à des résultats de contrôle pour les équations hyperboliques. Une généralisation de la transformation gaussienne qui s'appelle transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) définie comme suit

$$Y_{\ell_o,\lambda}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} F_\lambda(\ell_o + it - \ell)\,\varphi(\ell)\,u(x,\ell)\,d\ell$$

où $\ell_o \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $F_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{iz\tau} e^{-\left(\frac{\tau}{\lambda^\gamma}\right)^{2N}} d\tau$ avec $\lambda \geq 1$, $\gamma = 1 - \frac{1}{2N}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \beta + \frac{1}{2N} < 1$, est privilégiée par G. Lebeau et L. Robbiano [LeR2] et permet d'avoir une estimation de dépendance de type logarithmique avec $\beta \in]0,1[$ pour les équations hyperboliques avec condition de Dirichlet au bord. On remarquera que si u est solution de $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ avec la condition de Dirichlet homogène au bord, alors $Y_{\ell_o,\lambda}(x,t)$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t^2 Y_{\ell_o,\lambda}(x,t) + \Delta Y_{\ell_o,\lambda}(x,t) = 0 & , \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \ , \\ Y_{\ell_o,\lambda}(x,t) = 0 & , \ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \ , \\ Y_{\ell_o,\lambda}(x,0) = \left(F_\lambda * \varphi u(x,\cdot)\right)(\ell_o) & , \ x \in \Omega \ , \end{array}\right.$$

où $*$ dénote l'opérateur de convolution.

Sans des hypothèses géométriques particulières sauf Ω connexe de classe C^∞, dans le cadre de la stabilisation frontière avec la condition absorbante dissipative au bord: $\partial_\nu w + \alpha(x)\partial_t w = 0$ avec $\alpha \in C^\infty(\partial\Omega, [0,+\infty[)$ et $\{x \in \partial\Omega; \alpha > 0\} \neq \emptyset$, en utilisant la transformation FBI appliquée à $u = w$, G. Lebeau et L. Robbiano [LeR2] obtiennent une estimation de dépendance de type logarithmique avec $\beta \in]0,1[$ pour le système des ondes dissipatif ce qui entraîne la décroissance logarithmique suivante: $\forall \beta \in]0,1[$, $\exists c > 0$, $\forall (w_0, w_1) \in \left(H^1(\Omega)\right)^2 \cap \left\{\Delta w_0 \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_\nu w_0 + \alpha w_{1|\partial\Omega} = 0\right\}$, la solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \times]0,+\infty[\ , \\ \partial_\nu w + \alpha \partial_t w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,+\infty[\ , \\ (w, \partial_t w)(\cdot, 0) = (w_0, w_1) & \text{dans } \Omega \ , \end{array}\right.$$

vérifie

$$E(w,t) \leq \frac{c}{\ln^{2\beta}(2+t)} \left(E(w,0) + E(\partial_t w, 0)\right) \ .$$

Par ailleurs, à partir d'estimations de résolvante (et des calculs dans le plan complexe), N. Burq [Bu] a réussi à démontrer que l'inégalité ci-dessus est valable pour $\beta = 1$ ($\beta = 1$ étant optimal). Auparavant, G. Lebeau [Le] avait étudié la stabilisation interne de l'équation des ondes et obtenu un taux de décroissance logarithmique à partir d'estimations de résolvante.

Enfin, remarquons que la transformation ci-dessus est inopérante pour l'équation des ondes avec un potentiel en espace-temps. Cependant, le travail de X. Zhang [Z] sur les inégalités globales de Carleman permet d'avoir, sous les hypothèses géométriques générées par la méthode des multiplicateurs, une inégalité d'observabilité pour l'opérateur $\partial_t^2 - \Delta + q\,(x,t)$.

2.2 Stabilisation des équations d'Euler 2D incompressible par la force de Lorentz

Mes deux premiers papiers, durant mes années de thèse au Centre de Mathématiques et de Leurs Applications sous la direction de C. Bardos, sont des notes CRAS ([P01] , [P02]) et annoncent la contrôlabilité exacte interne et la stabilisation frontière du système de Maxwell sous les hypothèses de contrôle géométrique. Leurs preuves sont détaillées dans [P03] (cité par [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] entre autres). Les résultats de contrôlabilité exacte et de stabilisation frontière découlent naturellement des méthodes éprouvées des travaux de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, en se ramenant à six équations des ondes couplées au bord. Par contre, l'étude de la stabilisation interne et plus précisément l'étude du système de Maxwell avec loi d'Ohm a nécessité une approche plus pertinente car la densité de charge y est non nulle.

Différents travaux numériques sur le contrôle de couches limites par une force de Lorentz générée par un champ électromagnétique ont attiré mon attention. Aussi, dans [P09], nous nous sommes intéressés aux comportements en temps de la vitesse et du tourbillon d'un fluide parfait incompressible piloté par la force de Lorentz crée par un champ électromagnétique solution du système de Maxwell avec loi d'Ohm.

L'étude du comportement asymptotique d'un fluide soumis à un champ électromagnétique est un sujet très motivant. En particulier, deux problèmes sont ouverts et extrêmement intéressants d'un point de vue des applications physiques : la stabilisation de l'énergie de la vitesse du fluide ; le comportement du fluide concentré dans la couche limite. Ici, on s'intéressera à des fluides incompressibles modélisés par les équations de Navier-Stokes ou les équations d'Euler. La fonction contrôle est donnée par la force de Lorentz générée par les équations de Maxwell avec Loi d'Ohm où la permittivité, la perméabilité et la conductivité sont des paramètres, voire des fonctions rapidement oscillantes.

[1] Nicaise, S. (2000) *SIAM J. Control Optim. 38, 1145-1170.*

[2] Lagnese, J. (2001) *ESAIM, Control Optim. Calc. Var. 6, 275-289.* "These results (i.e. those established by multiplier methods) were greatly extended by Phung, who used results on the propagation of singularities of electromagnetic fields"

[3] Eller, M., Master, J. (2002) *Appl. Math. Optim. 45, 99-123.* "we mention the work by Phung. He uses the method of geometric optics to study the controllability and stabilization of Maxwell's system."

[4] Lagnese, J., Leugering, G. (2002) *ESAIM, Control Optim. Calc. Var. 8, 775-799.*

[5] Ammari, H. (2003) *J. Math. Anal. Appl. 282, 479-494.*

[6] Nicaise, S., Pignotti, C. (2003) *ESAIM, Control Optim. Calc. Var. 9, 563-578.*

[7] Nicaise, S., Pignotti, C. (2005) *Abstr. Appl. Anal. 7, 791-811.* "Our method actually combines arguments used in the stabilization of scalar wave equation ... with the use of an internal observability estimate for the standard Maxwell equations obtained for constant coefficients by Phung by microlocal analysis ...".

[8] Nicaise, S., Pignotti, C. (2006) *Appl. Math. Optim. 54, 47-70.*

[9] Barucq, H., Fontes, M. (2007) *J. Math. Pures Appl. 87, 253-273.*

2.3 Coût du contrôle approché de l'équation de la chaleur avec un potentiel

Le second axe de mes activités de recherche durant mes années de thèse est lié aux problèmes de diffusion d'ondes monochromatiques décrites par l'équation de Helmholtz et les équations de Maxwell réduites à fréquence fixée. Une condition aux limites absorbante simule la condition de radiation à l'infini. On se ramène alors à un système elliptique dans un domaine borné. Dans le cadre électromagnétique, il convient de traiter la condition aux limites de Silver-Müller et celle des conducteurs parfaits. La problématique consistait à contrôler, avec une estimation du coût, le champ électromagnétique lointain diffusé par une cible illuminée par une onde incidente monochromatique en agissant sur une partie de la surface de l'obstacle. Nous montrons que ce problème de contrôlabilité approchée se déduit d'un résultat d'unicité du système de Maxwell réduit. Aussi, nous quantifions le théorème d'Holmgren à partir des inégalités de Hardy et de Carleman. Nous nous sommes inspirés des travaux de L. Robbiano sur les inégalités de Carleman elliptiques locales obtenues à partir du calcul h-pseudodifférentiel et de l'inégalité de Garding dans des domaines bornés. Et plus précisément, nous établissons une dépendance logarithmique des traces par rapport à la solution, définie dans tout le domaine, d'un système elliptique du second ordre sans connaissance de la condition aux limites [P07] (cité par [10] dans le cadre des problèmes inverses). Les résultats désirés de contrôle approché en terme de coût s'en déduisent.

Ici, le point clé vient du fait que l'on travaille avec des systèmes où la contrôlabilité exacte est irréalisable. Prenons le cas de l'équation de la chaleur. Une inégalité d'observabilité peut s'obtenir avec un choix adéquat des normes $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ dans (2.1) sous la forme suivante. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $T > 0$, la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \left]0, T\right[\ , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \left]0, T\right[\ , \\ u\left(\cdot, 0\right) = u_o \in L^2\left(\Omega\right) \ , & \end{array} \right. \tag{2.3}$$

vérifie

$$\|u_o\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(1 + \frac{1}{\sqrt{T}}\right) \|u\|_{L^2(0,T;H_o^1(\Omega))} \ ,$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, à frontière de classe C^2. Cela implique le résultat de contrôlabilité exacte pour l'équation de la chaleur avec un contrôle g agissant sur tout $\Omega \times \left]0, T\right[$, $g \in L^2\left(0, T; H^{-1}\left(\Omega\right)\right)$ permettant d'atteindre au temps T un état arbitraire dans $L^2\left(\Omega\right)$ à partir d'un état initial dans $L^2\left(\Omega\right)$. Maintenant, si l'on désire un contrôle vivant dans $L^2\left(\omega \times \left]0, T\right[\right)$, alors cela nécessite l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|u_o\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times]0,T[)} \ .$$

Cette constante C va devoir dépendre de la donnée initiale, et plus précisément de $\frac{\|u_o\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_o\|_{H^{-1}(\Omega)}}$, car les effets régularisant sur la donnée initiale de l'équation de la chaleur entraîne que

$$\|u\|_{L^2(\omega \times]0,T[)} \leq \|u_o\|_{H^{-1}(\Omega)} \ .$$

En conclusion, avec un contrôle vivant dans $L^2\left(\omega \times \left]0, T\right[\right)$, la contrôlabilité exacte pour l'équation de la chaleur est irréalisable et on se contentera d'un résultat de contrôle approché. Notre objectif sera alors de déterminer le coût du contrôle approché.

Comme il a été notifié au paragraphe 2.1, la technique des inégalités globales de Carleman est un outil précieux pour traiter le problème d'observation quand intervient un potentiel en espace-temps.

[10] Bourgeois, L. (2006) *Inverse Problems 22, 413-430.*

Dans le cadre des problèmes de contrôle, les inégalités globales de Carleman peuvent être vues comme des inégalités d'observation dans des espaces à poids exponentiel : $\exists C, h_o > 0$, $\forall h \in]0, h_o[$,

$$\left\| e^{\varphi(x,t)/h} u(x,t)_{|x\in\Omega, t\in]0,T[} \right\| \leq C \left\| e^{\varphi(x,t)/h} u(x,t)_{|x\in\omega, t\in]0,T[} \right\| \ ,$$

où la fonction $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ doit être judicieusement choisie. Cette technique a été développée par A. Fursikov et O. Imanuvilov [FI] pour résoudre la contrôlabilité des équations paraboliques. Une étude complète des différents problèmes de contrôlabilité exacte et approchée des équations paraboliques linéaires et semilinéaires a finalement été réalisée par E. Fernandez-Cara et E. Zuazua [FCZ] à partir des techniques de A. Fursikov and O. Imanuvilov, valable pour Ω domaine (i.e., ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$) borné de classe C^2. Ils démontrent l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $T > 0$ et tout potentiel $q = q(x,t) \in L^\infty(\Omega \times]0,T[)$, la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + qu = 0 & \text{dans } \Omega \times]0,T[\ , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\ , \\ u(\cdot,0) \in L^2(\Omega) \ , & \end{cases} \tag{2.4}$$

vérifie

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \exp\left(C\left(1 + \frac{1}{T} + T\|q\|_\infty + \|q\|_\infty^{2/3}\right)\right) \|u\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} \ ,$$

où ω est un ouvert non vide contenu dans le domaine borné $\Omega \in C^2$.

Dans [P08], j'analyse le coût du contrôle approché de l'équation de la chaleur avec un potentiel $q \in L^\infty(\Omega \times]0,T[)$. Ce coût est de l'ordre de $e^{c/\varepsilon}$ quand la cible vit dans $H_0^1(\Omega)$ avec une précision ε en norme $L^2(\Omega)$. Aussi, la quantification de la propriété de continuation unique pour la solution u de (2.4) est établie comme suit

$$\|u(x,0)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{\left(C\frac{\|u(x,0)\|_{L^2(\Omega)}}{\|u(x,0)\|_{H^{-1}(\Omega)}}\right)} \|u\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} \ .$$

Notre résultat complète le travail de E. Fernandez-Cara et E. Zuazua [FCZ] sur la contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur avec un potentiel.

3 Principaux thèmes de recherche depuis la thèse

Il est naturel de chercher à relier la géométrie du contrôle et le coût du contrôle. Dans l'inégalité (2.1) le sous-domaine $\omega \times]0,T[$ correspond à la taille du support du contrôle. La constante C qui intervient dans cette inégalité (2.1) détermine le coût du contrôle. Par conséquent, nous voulons mieux comprendre comment interagissent certains paramètres par exemple le temps et la géométrie dans le coût du contrôle.

Nous avons tout d'abord commencé à mieux connaître la constante d'observabilité vis-à-vis de certains paramètres quand la condition de contrôle géométrique CCG est satisfaite ([P04], [P06]). Dans une seconde partie, nous nous sommes intéressés à des géométries où la condition de contrôle géométrique CCG n'est pas satisfaite, mais quand le taux de décroissance du système des ondes amorties est meilleur que logarithmique ([P11], [P13]).

3.1 La constante d'observabilité sous CCG

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à des systèmes exactement contrôlables sous la condition de contrôle géométrique CCG. Nous développons une stratégie pour obtenir la constante d'observabilité de façon explicite vis-à-vis de certains paramètres.

Description de la méthode .- Tout d'abord, on rappelle que l'inégalité d'observabilité désirée est équivalente à la résolution d'un problème de contrôlabilité exacte. Cette inégalité d'observabilité va donc pouvoir s'obtenir à partir d'un résultat de contrôlabilité exacte. Ensuite, la CCG avec (Ω, ω, T_c) entraîne l'existence d'une fonction contrôle $g \in L^2(\omega \times]-T_c, T_c[)$, dépendante de la donnée initiale $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ de la façon suivante

$$\|g\|_{L^2(\omega\times]-T_c,T_c[)} \leq C_{(\Omega,\omega,T_c)} \ \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \ ,$$

avec $C_{(\Omega,\omega,T_c)} > 0$ (ne dépendant que de (Ω, ω, T_c)) et telle que la solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = g 1_{\omega\times]-T_c,T_c[} & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \ , \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \ , \\ (v, \partial_t v)(\cdot, 0) = (v_0, 0) & \text{dans } \Omega \ , \end{cases}$$

vérifie $v(x,t) = 0$ pour tout $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (\mathbb{R} \backslash]-T_c, T_c[)$. Soient T un réel strictement positif et P_ε un opérateur différentiel du premier ou du second ordre, éventuellement dépendant d'un paramètre ε, par exemple $P_\varepsilon(t, \partial_t) = r_\varepsilon(t)\partial_t^2 + z_\varepsilon(t)\partial_t$ où $r_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $z_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tels que $|\partial_t r_\varepsilon(0) - \overline{z_\varepsilon}(0)| \neq 0$. Nous allons chercher une solution contrôlée sous la forme intégrale suivante

$$y(x,t) = \int_{\mathbb{R}} F(\ell, t)\, v(x, \ell)\, d\ell \ ,$$

où F, solution d'une EDP monodimensionnelle, est à construire de sorte que

$$\begin{cases} P_\varepsilon(t, \partial_t)\, y(x,t) - \Delta y(x,t) = \int_{-T_c}^{T_c} F(\ell, t)\, g(x, \ell)\, d\ell 1_\omega & , \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \ , \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \ , \\ (y, r_\varepsilon(0)\partial_t y)(\cdot, 0) = (v_0, 0) & \text{dans } \Omega \ , \\ (y, r_\varepsilon(T)\partial_t y)(\cdot, T) \equiv 0 & \text{dans } \Omega \ . \end{cases}$$

Nous apercevons en calculant $\int_{\mathbb{R}} F(\ell, t)\, \Delta v(x, \ell)\, d\ell$, qu'un candidat possible est une solution 1D contrôlée comme suit

$$\begin{cases} P_\varepsilon(t, \partial_t)\, F(\ell, t) - \partial_\ell^2 F(\ell, t) = f(\ell, t)\, 1_{\ell \in (\mathbb{R}\backslash]-T_c,T_c[)} & , \ (\ell, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \\ F(\ell, 0) = \delta(\ell) & , \ \ell \in \mathbb{R} \ , \\ r_\varepsilon(0)\, \partial_t F(\ell, 0) = 0 & , \ \ell \in [-T_c, T_c] \ , \\ F(\ell, t) = 0 & , \ (\ell, t) \in [-T_c, T_c] \times [T, +\infty[\ . \end{cases}$$

où f est une fonction contrôle et δ est la fonction Dirac. Bien évidemment, l'éventail des techniques pour résoudre ce dernier problème de contrôle monodimensionnel est large. Dans notre cas, puisque nous désirons la constante d'observabilité de façon explicite vis-à-vis de certain paramètre, il faudra aussi établir une inégalité explicite en (ε, T) pour le système monodimensionnel, par exemple et si possible

$$\|F\|_{L^2(]-T_c,T_c[\times]0,T[)} \leq C(\varepsilon, T) \ ,$$

où $C(\varepsilon, T)$ est une constante dépendante de (ε, T) et ce de manière explicite. Finalement, les deux dernières inégalités et Cauchy-Schwarz entraînent une estimation du coût du contrôle associé à y,

$$\left\| \int_{-T_c}^{T_c} F(\ell, t)\, g(x, t)\, d\ell 1_\omega \right\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} \leq C(\varepsilon, T)\, C_{(\Omega,\omega,T_c)} \ \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \ .$$

Par dualité, sous les conditions ci-dessus, nous en déduisons l'inégalité d'observabilité suivante

$$\|u_0\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{1}{|\partial_t r_\varepsilon(0) - \overline{z_\varepsilon}(0)|} C(\varepsilon, T)\, C_{(\Omega,\omega,T_c)} \ \|u\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} \ ,$$

pour toute donnée initiale $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$ du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t^2 (r_\varepsilon (t)\, u(x,t)) - \partial_t (\overline{z_\varepsilon}(t)\, u(x,t)) - \Delta u(x,t) = 0 & , \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \ , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \ , \\ (u, r_\varepsilon(0)\, \partial_t u)(\cdot, 0) = (u_0, 0) & \text{dans } \Omega \ . \end{cases}$$

En résumé, nous avons reporté la difficulté de trouver comment se comporte la constante d'observabilité sous CCG d'un problème multidimensionnel vis-à-vis d'un paramètre vers un problème monodimensionnel.

La description ci-dessus peut sembler naïve car nous avons peu fait attention aux espaces fonctionnels en jeu. Cependant, l'approche décrite ci-dessus reflète bien la stratégie de la méthode.

Nous avons appliqué cette méthode pour obtenir :

- la constante d'observabilité pour les équations de Schrödinger explicite par rapport au temps de contrôlabilité. On rappelle que la vitesse infinie de propagation des singularités pour l'équation de Schrödinger permet d'exclure toute restriction sur le temps de contrôlabilité ;
- la constante d'observabilité pour l'équation des ondes amorties $\partial_t^2 - \Delta + \frac{1}{\varepsilon}\partial_t$, explicite par rapport à $\varepsilon \in]0,1[$.

Plus précisément, nous avons publié les deux résultats suivants [P04] – [P06].

Théorème 3.1 .- *Sous CCG avec (Ω, ω, T_c). Alors pour tout $T > 4T_c$, il existe $C > 0$ tel que toute solution u de*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \frac{1}{\varepsilon}\partial_t u = 0 & \textit{dans } \Omega \times]0,T[\ , \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \times]0,T[\ , \\ (u, \partial_t u)(\cdot,0) = (u_0,u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) & , \end{cases}$$

vérifie

$$\|(u_0,u_1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq Ce^{C/\varepsilon} \ \|u\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} \quad \forall \varepsilon \in]0,1[\ .$$

Théorème 3.2 .- *Sous CCG avec (Ω, ω, T_c). Alors il existe $C > 0$ tel que toute solution u de*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 & \textit{dans } \Omega \times]0,T[\ , \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \times]0,T[\ , \\ u(\cdot,0) = u_0 \in L^2(\Omega) & , \end{cases}$$

vérifie

$$\|u_0\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq Ce^{C/T^2}\sqrt{T} \sup_{t\in]0,T[} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\omega)} \quad \forall T \in]0,1[\ .$$

Remarques .- Théorème 3.1 entraîne la propriété de contrôle exacte vers zéro de l'équation de la chaleur comme limite quand ε tend vers zéro, de celui des ondes dissipatives $\varepsilon\partial_t^2 - \Delta + \partial_t$ dépendant du paramètre ε. Il complète aussi le travail antérieur de A. Lopez, X. Zhang et E. Zuazua [LZZ] qui utilisent la technique des inégalités globales de Carleman.

Notre approche a été reprise et améliorée en profondeur par L. Miller [Mi2] qui l'a nommée "transmutation control method" et appliquée pour les équations de Schrödinger et de la chaleur sous CCG. En particulier, L. Miller démontre que sous CCG, l'inégalité du Théorème 3.2 devient

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{C/T} \ \|u\|_{L^2(\omega\times]0,T[)} \quad \forall T \in]0,1[\ .$$

De plus, L. Miller donne une expression de la constante dans l'exponentielle vis-à-vis de la géométrie.

3.2 L'observation vis-à-vis de la géométrie

Dans ce paragraphe, nous allons introduire une nouvelle inégalité de dépendance. Jusqu'ici, il n'est apparu, pour le problème des ondes amorties avec $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ et $\alpha \geq 0$,

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t^2 w - \Delta w + \alpha \partial_t w = 0 & \text{dans } \Omega \times]0,+\infty[\ , \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,+\infty[\ , \\ (w, \partial_t w)(\cdot, 0) = (w_0, w_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \ , & \end{array}\right. \tag{3.1}$$

que la stabilisation forte (i.e., décroissance exponentielle et uniforme de l'énergie) ou une décroissance logarithmique de l'énergie pour des données initiales régulières. D'un autre côté, la stabilisation forte est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante : $\exists C > 0$, $\forall u$ solution de (2.2),

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C \ \left\|\sqrt{\alpha}\partial_t u\right\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \ ,$$

qui s'obtient sous CCG avec (Ω, ω, T) et $1/\alpha \in L^\infty(\omega)$. Et une décroissance logarithmique de l'énergie pour des données initiales $(w_0, w_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ peut découler de l'inégalité de dépendance suivante : $\exists C > 0$, $\forall u$ solution de (2.2) avec une donnée initiale non nulle $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq e^{\left(C \frac{\|(u_0,u_1)\|_{H^2\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}}{\|(u_0,u_1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}}\right)^{1/\beta}} \ \left\|\sqrt{\alpha}\partial_t u\right\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \ .$$

Nous proposons l'inégalité de dépendance suivante motivée par la décroissance polynomiale de l'énergie pour des données régulières du système des ondes amorties (voir aussi [P13]).

Théorème 3.3 .- *Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe $C > 0$ et $\gamma > 0$ tels que pour toute solution u de (2.2) avec la donnée initiale non nulle $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on ait*

$$\|(u_0, u_1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C \int_0^{C\left(\frac{\|(u_0,u_1)\|^2_{H^2\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}}{\|(u_0,u_1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}}\right)^{1/\gamma}} \int_\Omega \alpha(x) \left|\partial_t u(x,t)\right|^2 dxdt \ .$$

(ii) *Il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que la solution w de (3.1) avec $(w_0, w_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ vérifie*

$$E(w,t) \leq \frac{C}{t^\delta} \ \|(w_0, w_1)\|^2_{H^2\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \quad \forall t > 0 \ .$$

Preuve .- La nouveauté dans la démonstration du Théorème 3.3 réside dans la preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$ que nous allons détailler. Tout d'abord, nous pouvons voir, par des techniques classiques de minimisation et de perturbation, que (i) implique en prenant $\delta = \gamma/3$, l'existence d'une constante $c > 1$ telle que la solution w de (3.1) avec la donnée initiale non nulle $(w_0, w_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ vérifie

$$E(w,0) \leq c \int_0^{c\left(\frac{E(w,0)+E(\partial_t w,0)}{E(w,0)}\right)^{1/\delta}} \int_\Omega \alpha(x) \left|\partial_t w(x,t)\right|^2 dxdt \ .$$

Ensuite, nous obtenons les inégalités suivantes par translation en la variable temps et grâce à la formule $E(w,t_1) - E(w,t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega \alpha(x) \left|\partial_t w(x,t)\right|^2 dxdt = 0$.

$$\begin{array}{ll} \frac{E(w,s)}{(E(w,0)+E(\partial_t w,0))} & \leq c \int_s^{s+c\left(\frac{(E(w,0)+E(\partial_t w,0))}{E(w,s)}\right)^{1/\delta}} \int_\Omega \frac{\sigma(x)\left|\partial_t w(x,t)\right|^2}{E(w,0)+E(\partial_t w,0)} dxdt \quad \forall s \geq 0 \\ & \leq c \left(\frac{E(w,s)}{E(w,0)+E(\partial_t w,0)} - \frac{E\left(w, s+c\left(\frac{E(w,0)+E(\partial_t w,0)}{E(w,s)}\right)^{1/\delta}\right)}{E(w,0)+E(\partial_t w,0)} \right) \ . \end{array}$$

Notons $G(s) = \frac{E(w,s)}{E(w,0)+E(\partial_t w,0)}$, ainsi en utilisant l'inégalité précédente et la décroissance de G, nous avons

$$G\left(s+c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta}\right) \leq G(s) \leq c\left[G(s) - G\left(s+c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta}\right)\right]$$

ce qui donne

$$G\left(s+c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta}\right) \leq \frac{c}{1+c}G(s) \ .$$

Soit $c_1 = \left(\frac{1+c}{c}\right)^{1/\delta} - 1 > 0$ et notons $d(s) = \left(\frac{c}{c_1}\frac{1}{s}\right)^{\delta}$. Deux cas se présentent: soit $c_1 s \leq c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta}$, soit $c_1 s > c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta}$.

Si $c_1 s \leq c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta}$, alors $G(s) \leq \left(\frac{c}{c_1}\frac{1}{s}\right)^{\delta}$ et

$$G((1+c_1)s) \leq d(s) \ .$$

Si $c_1 s > c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta}$, alors $s + c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta} < (1+c_1)s$ i.e., $G((1+c_1)s) \leq G\left(s+c\left(\frac{1}{G(s)}\right)^{1/\delta}\right)$ et

$$G((1+c_1)s) \leq \frac{c}{1+c}G(s) \ .$$

Par conséquent, nous obtenons que $\forall s>0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} G((1+c_1)s) \quad &\leq \max\left[d(s), \tfrac{c}{1+c}d\left(\tfrac{s}{(1+c_1)}\right), \cdots,\right. \\ &\qquad \left., \left(\tfrac{c}{1+c}\right)^n d\left(\tfrac{s}{(1+c_1)^n}\right), \left(\tfrac{c}{1+c}\right)^{n+1} G\left(\tfrac{s}{(1+c_1)^n}\right)\right] \ . \end{aligned}$$

Maintenant, nous remarquons qu'avec le choix de c_1, nous avons

$$\frac{c}{1+c}d\left(\frac{s}{(1+c_1)}\right) = d(s) \quad \forall s>0 \ .$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} G((1+c_1)s) \quad &\leq \max\left(d(s), \left(\tfrac{c}{1+c}\right)^{n+1} G\left(\tfrac{s}{(1+c_1)^n}\right)\right) \qquad \forall n \geq 1 \\ &\leq \max\left(d(s), \left(\tfrac{c}{1+c}\right)^{n+1}\right) \qquad \forall n \geq 1 \ . \end{aligned}$$

et concluons que

$$\frac{E(w,s)}{E(w,0)+E(\partial_t w,0)} = G(s) \leq d\left(\frac{s}{1+c_1}\right) = \left(\frac{c(1+c_1)}{c_1}\right)^{\delta}\frac{1}{s^{\delta}} \quad \forall s>0 \ .$$

Ceci termine la preuve.

Maintenant, nous proposons la géométrie associée à cette nouvelle inégalité de dépendance décrite au théorème précédent. Bien entendu, la CCG ne doit pas être satisfaite.

Description de la géométrie .- Soient $m_1, m_2, R > 0$. Nous considérons Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ borné par Γ_1, Γ_2, Υ où

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 = [-m_1,m_1]\times[-m_2,m_2]\times\{R\}\,, \text{ à frontière } \partial\Gamma_1 \ , \\ \Gamma_2 = [-m_1,m_1]\times[-m_2,m_2]\times\{-R\}\,, \text{ à frontière } \partial\Gamma_2 \ , \\ \Upsilon \text{ est une surface à frontière } \partial\Upsilon = \partial\Gamma_1 \cup \partial\Gamma_2 \ . \end{array}\right.$$

La frontière de Ω est $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Upsilon$. On supposera que soit Ω est convexe, soit $\partial\Omega \in C^2$ avec $\Upsilon \subset \left(\mathbb{R}^2 \setminus (]-m_1, m_1[\times]-m_2, m_2[)\right) \times \mathbb{R}$. Nous choisissons $\omega = \Omega \cap \Theta$ où Θ est un voisinage de Υ dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\Theta \cap]-M_1, M_1[\times]-M_2, M_2[\times [-R, R] = \emptyset$ où $M_1 \in]0, m_1[$ et $M_2 \in]0, m_2[$.

Vérifions que la CCG avec (Ω, ω, T) n'est pas satisfaite. Le fait que Ω ne soit que C^2 ou Lipschitzien, n'est pas un souci, car la zone de contrôle ω est un voisinage du bord Υ et $\partial\Omega \setminus \overline{\Upsilon}$ n'engendre que des points hyperboliques. La propagation de la régularité microlocale le long des bicaractéristiques généralisées (ici bicaractéristiques brisées) reste valable. Intéressons-nous aux bicaractéristiques brisées. On rappelle que les bicaracteristiques associées à $\partial_t^2 - \Delta$ sans bord sont des courbes dans les variables espace-temps et leurs variables de Fourier (i.e., l'espace des phases) décrites par

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(\rho) & = x_o + 2\xi(\rho)\rho \\ t(\rho) & = t_o - 2\tau(\rho)\rho \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi(\rho) & = \xi_o \\ \tau(\rho) & = \tau_o \end{array} \right.$$

avec $|\xi(\rho)|^2 - \tau^2(\rho) = 0$ pour $\rho \in [0, +\infty[$, quand $(x_o, t_o, \xi_o, \tau_o) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Un rayon associé à $\partial_t^2 - \Delta$ sans bord est la projection d'une bicaracteristique sur la variable espace-temps

$$\left\{ \begin{array}{rl} x(\rho) - x_o - 2\xi_o\rho & = 0 \\ t(\rho) + 2\tau_o\rho & = 0 \\ |\xi_o|^2 - \tau_o^2 & = 0 \ , \end{array} \right.$$

ici, $t_o = 0$ et $\tau_o \neq 0$. Ici, un rayon généralisé est un rayon où l'on tient compte de la géométrie en suivant les règles de l'optique géométrique.

Le point essentiel dans la construction de notre géométrie est qu'il existe un rayon généralisé qui ne rencontre pas $\omega \times]0, T[$ pour tout $T > 0$. En effet, soit $\omega_o \Subset]-M_1, M_1[\times]-M_2, M_2[\times]-R, R[$, alors toute donnée initiale $(x_o, t_o, \xi_o, \tau_o) \in \omega_o \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ telle que $\xi_o = (0, 0, \pm 1)$ génère un rayon captif (i.e., un rayon généralisé qui ne sortira pas de $[-M_1, M_1] \times [-M_2, M_2] \times [-R, R] \times]0, T[$ pour tout $T > 0$). Par conséquent, nous ne pouvons pas obtenir la stabilisation forte pour le système des ondes amorties avec n'importe quel $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \geq 0$ et $1/\alpha \in L^\infty(\omega)$. Cependant, nous pouvons espérer une décroissance de l'énergie pour des données initiales régulières meilleure que celle logarithmique, car notre rayon captif se comporte de manière suffisamment simple en se réfléchissant entre $\Gamma_1 \times]0, +\infty[$ et $\Gamma_2 \times]0, +\infty[$ avec la même direction $\xi_o = (0, 0, \pm 1)$.

Enfin, nous avons publié le résultat suivant [P11].

Théorème 3.4 .- *Sous la géométrie décrite ci-dessus et si $1/\alpha \in L^\infty(\omega)$, alors il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $t > 0$ et toute donnée initiale $(w_0, w_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, la solution w de (3.1) vérifie*

$$E(w, t) \leq \frac{C}{t^\delta} \left\|(w_0, w_1)\right\|^2_{H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \ .$$

Remarques .- La décroissance polynomiale pour l'équation des ondes amorties s'obtient dans les deux choix de $\alpha \geq 0$ suivants :

- $\alpha > 0$ p.p. sur X où X est un voisinage de Υ dans $\mathbb{R}^3$;
- $\alpha \in C(\overline{\Omega})$ et $\alpha > 0$ sur $\overline{\Upsilon}$.

En effet, avec de tels choix, on a l'existence de ω comme dans la géométrie décrite ci-dessus.

En dimension deux d'espace, la décroissance polynomiale pour les ondes amorties avait été obtenue par Z. Liu et B. Rao [LiR] dans un domaine carré. Ce résultat a été généralisé récemment par N. Burq et M. Hitrik [BH] pour des domaines partiellement rectangulaires à partir d'estimations de résolvante.

Dans le cadre de la stabilisation frontière, une description analogue peut être établie [P13]. Nous nous intéressons à l'inégalité de dépendance suivante: $\exists C > 0$, $\forall u$ solution de (2.2) avec une donnée initiale non nulle $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$\|(u_0, u_1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C \int_0^{C\left(\frac{\|(u_0,u_1)\|^2_{H^2\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}}{\|(u_0,u_1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}}\right)^{1/\delta}} \int_\Gamma |\partial_\nu u(x,t)|^2 \, dxdt \ .$$

Commentaire .- Un problème ouvert qui devient à mon avis plus accessible est celui proposé par J.-L. Lions [Lio2] qui consiste à comprendre comment le contrôle et la stabilisation des ondes réagissent pour une perturbation du domaine Ω, par exemple avec Ω_ε un ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ borné par $\Gamma_{1,\varepsilon}$, Γ_2, Υ où $\begin{cases} \Gamma_2 = [-m_1, m_1] \times [-m_2, m_2] \times \{-R\}, \\ \Upsilon \text{ est une surface à frontière } \partial\Upsilon = \partial\Gamma_{1,\varepsilon} \cup \partial\Gamma_2 \ , \end{cases}$
et $\Gamma_{1,\varepsilon} = \{(x_1, x_2, R - \varepsilon(x_1 + m_1) - \varepsilon(x_2 + m_2)) \,; (x_1, x_2) \in [-m_1, m_1] \times [-m_2, m_2]\}$ est le plan généré par le point $\begin{pmatrix} -m_1 \\ -m_2 \\ R \end{pmatrix}$ et les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$ et limité à tout $(x_1, x_2) \in [-m_1, m_1] \times [-m_2, m_2]$.

4 La fonction fréquence et ses applications

Nous avons discuté des inégalités de Carleman, mais il existe une autre approche introduite par N. Garofalo et F.H. Lin [GaL], utilisant la propriété de monotonie de la fonction fréquence des solutions harmoniques. Cette propriété permet de quantifier des résultats de continuation unique pour des opérateurs elliptiques du second ordre.

La propriété de monotonie de la fonction fréquence ou de la "doubling property" est encore très peu utilisée dans le cadre de la théorie du contrôle des EDP. C'est pourquoi, ici, nous allons détailler les démonstrations pour la commodité du lecteur. L'approche semble naturelle, car on analyse la partie basse fréquence des solutions. Par ailleurs, cette méthode exige peu de régularité sur le domaine et de ce point de vue permet d'améliorer les résultats décrits dans [Ro2], [LeR] et [LZ] ou [JL].

4.1 L'approche originale de N. Garofalo et F.H. Lin

Par simplicité, nous ne reproduisons la preuve de N. Garofalo et F.H. Lin que dans le cadre du laplacien.

Soit $B_{y_o,R} = \left\{y \in \mathbb{R}^{N+1}, \ |y - y_o| < R\right\}$, avec $y_o \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $R > 0$. La sphère unité est définie par $S^N = \partial B_{0,1}$.

Théorème 4.1 .- *Soit $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, $N \geq 1$, un ouvert borné connexe tel que $B_{0,1} \subseteq D$. Si $v = v(y) \in H^2(D)$ est une solution de $\Delta_y v = 0$ dans D, alors pour tout $0 < M \leq 1/2$, on a*

$$\int_{B_{0,2M}} |v(y)|^2 \, dy \leq 2^{N+1} \exp\left((\ln 4) \frac{\int_{B_{0,1}} |\nabla v(y)|^2 \, dy}{\int_{\partial B_{0,1}} |v(y)|^2 \, d\sigma}\right) \int_{B_{0,M}} |v(y)|^2 \, dy \ .$$

Preuve .- Nous allons utiliser les trois formules suivantes. Soit $R>0$,

$$\int_{B_{0,R}} f(y)\,dy = \int_0^R \int_{S^N} f(rs)\, r^N dr d\sigma(s) \ , \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dR}\int_{B_{0,R}} f(y)\,dy = \int_{S^N} f(Rs)\, R^N d\sigma(s) = \int_{\partial B_{0,R}} f(y)\,d\sigma(y) \ , \tag{4.2}$$

$$\int_{B_{0,R}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\,dy = \int_{S^N} f(Rs)\, s_i\ R^N d\sigma(s) \ . \tag{4.3}$$

L'identité (4.1) est la formule de changement de variable en coordonnée sphérique. (4.2) provient de (4.1) quand f est une fonction continue. L'identité (4.3), valable quand ∇f est integrable, traduit la formule de Green. En effet,

$$\begin{array}{ll} \int_{B_{0,R}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\,dy & = \int_{\partial B_{0,R}} f(y)\,\nu_i(y)\,d\sigma(y) \\ & = \int_{S^N} f(Rs)\, s_i\ R^N d\sigma(s) \quad \text{car sur } \partial B_{0,R},\ \nu(y) = \frac{y}{R} \ . \end{array}$$

Maintenant, on va introduire les quantités suivantes. Soit $r>0$,

$$\begin{array}{ll} \mathcal{H}(r) = & \int_{\partial B_{0,r}} |v(y)|^2 d\sigma(y) \ , \\ \mathcal{D}(r) = & \int_{B_{0,r}} |\nabla v(y)|^2 dy \ , \end{array} \tag{4.4}$$

et

$$\mathcal{N}(r) = \frac{r\mathcal{D}(r)}{\mathcal{H}(r)} \ . \tag{4.5}$$

Le but est de montrer que $\mathcal{N}$ est une fonction croissante pour $0<r\leq 1$. Pour cela, nous devons calculer la dérivée de $\mathcal{H}$ et celle de $\mathcal{D}$.

Le calcul de la dérivée de $\mathcal{H}(r) = \int_{S^N} |v(rs)|^2 r^N d\sigma(s)$ donne

$$\begin{array}{ll} \mathcal{H}'(r) & = Nr^{N-1}\int_{S^N} |v(rs)|^2 d\sigma(s) + \int_{S^N} 2v(rs)\,(\nabla v)_{|rs}\cdot sr^N d\sigma(s) \\ & = N\frac{1}{r}\mathcal{H}(r) + \int_{S^N} \left(\nabla v^2\right)_{|rs}\cdot sr^N d\sigma(s) \\ & = N\frac{1}{r}\mathcal{H}(r) + \int_0^r \int_{S^N} div\left(\nabla v^2\right) r^N dr d\sigma(s) \\ & = N\frac{1}{r}\mathcal{H}(r) + \int_{B_{0,r}} \Delta\left(v^2\right) dy \ , \end{array}$$

mais $\Delta\left(v^2\right) = 2v\Delta v + 2|\nabla v|^2$. Puisque $\Delta_y v = 0$, on obtient ainsi

$$\frac{\mathcal{H}'(r)}{\mathcal{H}(r)} = N\frac{1}{r} + 2\frac{\int_{B_{0,r}} |\nabla v(y)|^2 dy}{\mathcal{H}(r)} \ . \tag{4.6}$$

Ensuite, on remarque que

$$\int_{B_{0,r}} |\nabla v(y)|^2 dy = \int_{\partial B_{0,r}} v(y)\,\nabla v(y)\cdot\frac{y}{|y|} d\sigma(y) \ , \tag{4.7}$$

en effet,

$$\begin{array}{ll} \int_{B_{0,r}} \partial_{y_i} v \partial_{y_i} v dy & = \int_{B_{0,r}} \partial_{y_i}\left[v\partial_{y_i} v\right] dy - \int_{B_{0,r}} v\partial_{y_i}^2 v dy \\ & = \int_{\partial B_{0,r}} \left[v\partial_{y_i} v\right] \frac{y_i}{|y|} d\sigma(y) \quad \text{car } \Delta_y v = 0 \text{ et sur } \partial B_{0,R},\ \nu(y) = \frac{y}{|y|} \ . \end{array}$$

Par conséquent, (4.6) devient à partir de (4.7)

$$\frac{\mathcal{H}'(r)}{\mathcal{H}(r)} = N\frac{1}{r} + 2\frac{\int_{\partial B_{0,r}} v(y)\,\nabla v(y)\cdot\frac{y}{|y|} d\sigma(y)}{\mathcal{H}(r)} \ . \tag{4.8}$$

D'un autre côté, la dérivée de $\mathcal{D}(r)=\int_0^r\int_{S^N}\left|(\nabla v)_{|\rho s}\right|^2\rho^N d\rho d\sigma(s)$ vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'(r) &= \int_{S^N}\left|(\nabla v)_{|rs}\right|^2 r^N d\sigma(s)\\ &= \tfrac{1}{r}\int_{S^N}\left|(\nabla v)_{|rs}\right|^2 rs\cdot sr^N d\sigma(s)\\ &= \tfrac{1}{r}\int_0^r\int_{S^N} div\left(\left|(\nabla v)_{|rs}\right|^2 rs\right) r^N drd\sigma(s)\\ &= \tfrac{1}{r}\int_{B_{0,r}} div\left(|\nabla v|^2 y\right)dy\ ,\end{aligned}$$

mais $div\left(|\nabla v|^2 y\right)=|\nabla v|^2 divy+\nabla\left(|\nabla v|^2\right)\cdot y$, avec $divy=N+1$. Il reste à calculer $\int_{B_{0,r}}\nabla\left(|\nabla v|^2\right)\cdot ydy$, quand $v=v(y)\in H^2(D)$. On a

$$\begin{aligned}&\int_{B_{0,r}}\partial_{y_i}\left(\left(\partial_{y_j}v\right)^2\right)\cdot y_i dy\\ &= 2\int_{B_{0,r}}\partial_{y_j}v\partial^2_{y_iy_j}vy_idy\\ &= 2\int_{B_{0,r}}\partial_{y_j}\left[\partial_{y_j}v\partial_{y_i}vy_i\right]dy-2\int_{B_{0,r}}\partial^2_{y_j}v\partial_{y_i}vy_idy-2\int_{B_{0,r}}\partial_{y_j}v\partial_{y_i}v\partial_{y_j}y_idy\\ &= 2r\int_{\partial B_{0,r}}\left(\partial_{y_j}v\tfrac{y_j}{|y|}\right)\left(\partial_{y_i}v\tfrac{y_i}{|y|}\right)d\sigma(y)-2\int_{B_{0,r}}\left|\partial_{y_i}v\right|^2 dy\\ &\quad \text{car } \Delta_y v=0 \text{ et sur } \partial B_{0,R},\ \nu(y)=\tfrac{y}{|y|}=\tfrac{y}{R}\ .\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{D}'(r)=\frac{N-1}{r}\mathcal{D}(r)+2\int_{\partial B_{0,r}}\left|\nabla v(y)\cdot\frac{y}{|y|}\right|^2 d\sigma(y)$, c'est à dire

$$\frac{\mathcal{D}'(r)}{\mathcal{D}(r)}=(N-1)\frac{1}{r}+2\frac{\int_{\partial B_{0,r}}\left|\nabla v(y)\cdot\frac{y}{|y|}\right|^2 d\sigma(y)}{\mathcal{D}(r)}\ . \tag{4.9}$$

Finalement, le calcul de la dérivée de $\mathcal{N}(r)=\frac{r\mathcal{D}(r)}{\mathcal{H}(r)}$ donne

$$\mathcal{N}'(r)=\mathcal{N}(r)\left[\frac{1}{r}+\frac{\mathcal{D}'(r)}{\mathcal{D}(r)}-\frac{\mathcal{H}'(r)}{\mathcal{H}(r)}\right]\ , \tag{4.10}$$

et on conclut à partir de (4.4), (4.8), (4.9) et (4.10) que

$$\mathcal{N}'(r)=\mathcal{N}(r)\left[2\frac{\left(\int_{\partial B_{0,r}}\left|\nabla v\cdot\frac{y}{|y|}\right|^2 dy\right)\left(\int_{\partial B_{0,r}}|v|^2 dy\right)-\left(\int_{\partial B_{0,r}}v\nabla v\cdot\frac{y}{|y|}dy\right)^2}{\mathcal{D}(r)\mathcal{H}(r)}\right]\ .$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que $\mathcal{N}'(r)\geq 0$ i.e., $\mathcal{N}$ est croissante sur $]0,1]$. Donc, pour $r\leq 1$, $\mathcal{N}(r)\leq\mathcal{N}(1)$ c'est à dire $\frac{\mathcal{D}(r)}{\mathcal{H}(r)}\leq\frac{1}{r}\mathcal{N}(1)$. Ainsi, à partir de (4.6) et (4.5), on a

$$\frac{\mathcal{H}'(r)}{\mathcal{H}(r)}-N\frac{1}{r}\leq 2\mathcal{N}(1)\frac{1}{r}\ .$$

Par conséquent, $\forall r\leq 1$,

$$\frac{d}{dr}\left(\ln\left(\frac{\mathcal{H}(r)}{r^N}\right)\right)\leq 2\mathcal{N}(1)\frac{d}{dr}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\ . \tag{4.11}$$

En intégrant (4.11) entre $R>0$ et $2R\geq 1$, on trouve

$$\ln\left(\frac{\mathcal{H}(2R)}{\mathcal{H}(R)}\frac{1}{2^N}\right)\leq 2\mathcal{N}(1)(\ln 2)\ ,$$

ou encore $\forall 0<R\leq 1/2$,

$$\int_{S^N}|v(2Rs)|^2(2R)^N d\sigma(s)\leq 2^N e^{\mathcal{N}(1)\ln 4}\int_{S^N}|v(Rs)|^2 R^N d\sigma(s)\ .$$

On conclut que, pour tout $M \leq 1/2$,

$$\begin{array}{ll} \int_{B_{0,2M}} |v(y)|^2 dy & = \int_0^{2M} \int_{S^N} |v(rs)|^2 r^N dr d\sigma(s) \\ & = 2 \int_0^M \int_{S^N} |v(2Rs)|^2 (2R)^N dR d\sigma(s) \\ & \leq 2^{N+1} e^{\mathcal{N}(1) \ln 4} \int_0^M \int_{S^N} |v(Rs)|^2 R^N dR d\sigma(s) \\ & \leq 2^{N+1} e^{\mathcal{N}(1) \ln 4} \int_{B_{0,M}} |v(y)|^2 dy \ . \end{array}$$

Commentaire .- Les calculs ci-dessus se généralisent aux cas des opérateurs elliptiques du second ordre (voir [GaL], [Ku2]).

4.2 L'approche améliorée de I. Kukavica

Il se révèle naturel de considérer les propriétés de croissance de la fonction fréquence définie par

$$\frac{\int_{B_{0,r}} |\nabla v(y)|^2 \left(r^2 - |y|^2\right) dy}{\int_{B_{0,r}} |v(y)|^2 dy} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{r \int_{B_{0,r}} |\nabla v(y)|^2 dy}{\int_{\partial B_{0,r}} |v(y)|^2 d\sigma(y)} \ .$$

Suivant les idées de I. Kukavica ([Ku], [KN], voir aussi [AE]), on obtient les trois lemmes suivants.

4.2.1 Formule de monotonie

Nous présentons les lemmes suivants.

Lemme A .- *Soit $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, $N \geq 1$, un ouvert borné connexe tel que $\overline{B_{y_o,R_o}} \subset D$ avec $y_o \in D$ et $R_o > 0$. Si $v = v(y) \in H^2(D)$ est une solution de $\Delta_y v = 0$ dans D, alors*

$$\Phi(r) = \frac{\int_{B_{y_o,r}} |\nabla v(y)|^2 \left(r^2 - |y - y_o|^2\right) dy}{\int_{B_{y_o,r}} |v(y)|^2 dy} \quad \textit{est croissante sur } 0 < r < R_o \ ,$$

et

$$\frac{d}{dr} \ln \int_{B_{y_o,r}} |v(y)|^2 dy = \frac{1}{r} \left(N + 1 + \Phi(r)\right) \ .$$

Lemme B .- *Soit $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, $N \geq 1$, un ouvert borné connexe tel que $\overline{B_{y_o,R_o}} \subset D$ avec $y_o \in D$ et $R_o > 0$. Soient r_1, r_2, r_3 trois réels tels que $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R_o$. Si $v = v(y) \in H^2(D)$ est une solution de $\Delta_y v = 0$ dans D, alors*

$$\int_{B_{y_o,r_2}} |v(y)|^2 dy \leq \left(\int_{B_{y_o,r_1}} |v(y)|^2 dy\right)^{\alpha} \left(\int_{B_{y_o,r_3}} |v(y)|^2 dy\right)^{1-\alpha} ,$$

où $\alpha = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \right)^{-1} \in]0,1[$.

Les deux résultats ci-dessus restent valables quand on est proche d'une partie Γ du bord $\partial\Omega$ sous la condition homogène de Dirichlet sur Γ.

Lemme C .- *Soit $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, $N \geq 1$, un ouvert borné connexe à frontière ∂D. Soit Γ une partie ouverte non vide Lipschitzienne de ∂D. Soient r_o, r_1, r_2, r_3, R_o cinq réels tels que $0 < r_1 < r_o < r_2 < r_3 < R_o$. Supposons que $y_o \in D$ vérifie les trois conditions suivantes:*

i). $B_{y_o,r} \cap D$ est étoilé par rapport à y_o $\quad \forall r \in]0, R_o[$,

ii). $B_{y_o,r} \subset D$ $\quad \forall r \in]0, r_o[$,

iii). $B_{y_o,r} \cap \partial D \subset \Gamma$ $\quad \forall r \in [r_o, R_o[$.

Si $v = v(y) \in H^2(D)$ est une solution de $\Delta_y v = 0$ dans D et $v = 0$ sur Γ, alors

$$\int_{B_{y_o,r_2} \cap D} |v(y)|^2 \, dy \leq \left(\int_{B_{y_o,r_1}} |v(y)|^2 \, dy \right)^{\alpha} \left(\int_{B_{y_o,r_3} \cap D} |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\alpha} ,$$

où $\alpha = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \right)^{-1} \in]0, 1[$.

4.2.2 Preuve du Lemme B

Soit

$$H(r) = \int_{B_{y_o,r}} |v(y)|^2 \, dy \ .$$

Par application du Lemme A, nous savons que

$$\frac{d}{dr} \ln H(r) = \frac{1}{r} (N + 1 + \Phi(r)) \ .$$

Ensuite, à partir de la croissance de Φ, on en déduit les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{H(r_2)}{H(r_1)} \right) &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{N+1+\Phi(r)}{r} dr \\ &\leq (N + 1 + \Phi(r_2)) \ln \frac{r_2}{r_1} \ , \\ \ln \left(\frac{H(r_3)}{H(r_2)} \right) &= \int_{r_2}^{r_3} \frac{N+1+\Phi(r)}{r} dr \\ &\geq (N + 1 + \Phi(r_2)) \ln \frac{r_3}{r_2} \ . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln \left(\frac{H(r_2)}{H(r_1)} \right)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \leq (N + 1) + \Phi(r_2) \leq \frac{\ln \left(\frac{H(r_3)}{H(r_2)} \right)}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \ ,$$

et ainsi cela aboutit à l'inégalité désirée

$$H(r_2) \leq (H(r_1))^{\alpha} (H(r_3))^{1-\alpha} \ ,$$

où $\alpha = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \right)^{-1}$.

4.2.3 Preuve du Lemme A

Nous introduisons les deux fonctions H et D pour $0 < r < R_o$:

$$\begin{aligned} H(r) = & \int_{B_{y_o,r}} |v(y)|^2 \, dy \ , \\ D(r) = & \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v(y)|^2 \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \ . \end{aligned}$$

Tout d'abord, la dérivée de $H(r) = \int_0^r \int_{S^N} |v(\rho s + y_o)|^2 \rho^N d\rho d\sigma(s)$ vaut $H'(r) = \int_{\partial B_{y_o,r}} |v(y)|^2 d\sigma(y)$. Ensuite, rappelons la formule de Green

$$\int_{\partial B_{y_o,r}} |v|^2 \partial_\nu G d\sigma(y) - \int_{\partial B_{y_o,r}} \partial_\nu \left(|v|^2 \right) G d\sigma(y) = \int_{B_{y_o,r}} |v|^2 \Delta G dy - \int_{B_{y_o,r}} \Delta \left(|v|^2 \right) G dy \ .$$

Nous l'appliquons avec $G(y) = r^2 - |y - y_o|^2$ où $G_{|\partial B_{y_o,r}} = 0$, $\partial_\nu G_{|\partial B_{y_o,r}} = -2r$, et $\Delta G = -2(N+1)$. Cela donne

$$\begin{aligned} H'(r) & = \tfrac{1}{r} \int_{B_{y_o,r}} (N+1) |v|^2 dy + \tfrac{1}{2r} \int_{B_{y_o,r}} \Delta \left(|v|^2 \right) \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \\ & = \tfrac{N+1}{r} H(r) + \tfrac{1}{r} \int_{B_{y_o,r}} div(v \nabla v) \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \\ & = \tfrac{N+1}{r} H(r) + \tfrac{1}{r} \int_{B_{y_o,r}} \left(|\nabla v|^2 + v \Delta v \right) \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \ . \end{aligned}$$

Par conséquent, quand $\Delta_y v = 0$,

$$H'(r) = \frac{N+1}{r} H(r) + \frac{1}{r} D(r) \ , \tag{A.1}$$

c'est à dire $\frac{H'(r)}{H(r)} = \frac{N+1}{r} + \frac{1}{r} \frac{D(r)}{H(r)}$, la seconde égalité du Lemme A.

Maintenant, nous allons calculer la dérivée de $D(r) = \int_0^r \int_{S^N} \left| (\nabla v)_{|\rho s + y_o} \right|^2 \left(r^2 - \rho^2 \right) \rho^N d\rho d\sigma(s)$:

$$\begin{aligned} D'(r) & = \tfrac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^r \int_{S^N} \left| (\nabla v)_{|\rho s + y_o} \right|^2 \rho^N d\rho d\sigma(s) \right) - \int_{S^N} r^2 \left| (\nabla v)_{|rs + y_o} \right|^2 r^N d\sigma(s) \\ & = 2r \int_0^r \int_{S^N} \left| (\nabla v)_{|\rho s + y_o} \right|^2 \rho^N d\rho d\sigma(s) \\ & = 2r \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v|^2 dy \ . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ici, nous devons remarquer que

$$\begin{aligned} 2r \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v|^2 dy & = \tfrac{N+1}{r} D(r) + \tfrac{4}{r} \int_{B_{y_o,r}} |(y - y_o) \cdot \nabla v|^2 dy \\ & \quad - \tfrac{1}{r} \int_{B_{y_o,r}} \nabla v \cdot (y - y_o) \Delta v \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \ , \end{aligned} \tag{A.3}$$

en effet,

$$\begin{aligned} & (N+1) \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v|^2 \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \\ & = \int_{B_{y_o,r}} div \left(|\nabla v|^2 \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) (y - y_o) \right) dy - \int_{B_{y_o,r}} \nabla \left(|\nabla v|^2 \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) \right) \cdot (y - y_o) dy \\ & = - \int_{B_{y_o,r}} \partial_{y_i} \left(|\nabla v|^2 \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) \right) (y_i - y_{oi}) dy \quad \text{car sur } \partial B_{y_o,r},\ r = |y - y_o| \\ & = - \int_{B_{y_o,r}} 2 \nabla v \partial_{y_i} \nabla v \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) (y_i - y_{oi}) dy - \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v|^2 \left(-2 (y_i - y_{oi}) \right) (y_i - y_{oi}) dy \\ & = - \int_{B_{y_o,r}} 2 \nabla v \partial_{y_i} \nabla v \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) (y_i - y_{oi}) dy + 2 \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v|^2 |y - y_o|^2 dy \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et} \qquad & -\int_{B_{y_o,r}} \partial_{y_j} v \partial^2_{y_i y_j} v \left(r^2 - |y-y_o|^2\right)(y_i - y_{oi})\, dy \\
&= -\int_{B_{y_o,r}} \partial_{y_j} \left((y_i - y_{oi})\, \partial_{y_j} v \partial_{y_i} v \left(r^2 - |y-y_o|^2\right)\right) dy \\
&\quad + \int_{B_{y_o,r}} \partial_{y_j} (y_i - y_{oi})\, \partial_{y_j} v \partial_{y_i} v \left(r^2 - |y-y_o|^2\right) dy \\
&\quad + \int_{B_{y_o,r}} (y_i - y_{oi})\, \partial^2_{y_j} v \partial_{y_i} v \left(r^2 - |y-y_o|^2\right) dy \\
&\quad + \int_{B_{y_o,r}} (y_i - y_{oi})\, \partial_{y_j} v \partial_{y_i} v \partial_{y_j} \left(r^2 - |y-y_o|^2\right) dy \\
&= 0 \quad \text{car sur } \partial B_{y_o,r},\ r = |y-y_o| \\
&\quad + \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v|^2 \left(r^2 - |y-y_o|^2\right) dy \\
&\quad + \int_{B_{y_o,r}} (y-y_o) \cdot \nabla v \Delta v \left(r^2 - |y-y_o|^2\right) dy \\
&\quad -2 \int_{B_{y_o,r}} |(y-y_o) \cdot \nabla v|^2\, dy \ .\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(N+1) \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v|^2 \left(r^2 - |y-y_o|^2\right) dy \quad &= 2r^2 \int_{B_{y_o,r}} |\nabla v|^2\, dy - 4 \int_{B_{y_o,r}} |(y-y_o) \cdot \nabla v|^2\, dy \\
&\quad +2 \int_{B_{y_o,r}} (y-y_o) \cdot \nabla v \Delta v \left(r^2 - |y-y_o|^2\right) dy \ ,\end{aligned}$$

et c'est exactement l'inégalité désirée (A.3).

Par conséquent, à partir de (A.2) et (A.3), nous obtenons, quand $\Delta_y v = 0$, la formule suivante

$$D'(r) = \frac{N+1}{r} D(r) + \frac{4}{r} \int_{B_{y_o,r}} |(y-y_o) \cdot \nabla v|^2\, dy \ . \tag{A.4}$$

Le calcul de la dérivée de $\Phi(r) = \frac{D(r)}{H(r)}$ donne

$$\Phi'(r) = \frac{1}{H^2(r)} \left[D'(r) H(r) - D(r) H'(r)\right] \ ,$$

ce qui implique en utilisant (A.1) et (A.4) que

$$\begin{aligned}H^2(r)\Phi'(r) \quad &= \left[\tfrac{N+1}{r} D(r) + \tfrac{4}{r} \int_{B_{y_o,r}} |(y-y_o) \cdot \nabla v|^2\, dy\right] H(r) - \left[\tfrac{N+1}{r} H(r) + \tfrac{1}{r} D(r)\right] D(r) \\
&= \tfrac{1}{r} \left(4 \int_{B_{y_o,r}} |(y-y_o) \cdot \nabla v|^2\, dy H(r) - D^2(r)\right) \geq 0 \ ,\end{aligned}$$

en effet, grâce à une intégration par parties et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}D^2(r) \quad &= 4 \left(\int_{B_{y_o,r}} v \nabla v \cdot (y-y_o)\, dy\right)^2 \\
&\leq 4 \left(\int_{B_{y_o,r}} |(y-y_o) \cdot \nabla v|^2\, dy\right) \left(\int_{B_{y_o,r}} |v|^2\, dy\right) \\
&\leq 4 \left(\int_{B_{y_o,r}} |(y-y_o) \cdot \nabla v|^2\, dy\right) H(r) \ .\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré la croissance de Φ et cela conclut la preuve du Lemme A.

4.2.4 Preuve du Lemme C

Sous l'hypothèse $B_{y_o,r} \cap \partial D \subset \Gamma$ pour tout $r \in [r_o, R_o)$, nous prolongeons v par zéro dans $\overline{B_{y_o,R_o} \backslash D}$ et notons par $\overline{v}$ son extension. Puisque $v = 0$ sur Γ, nous avons

$$\begin{cases} \overline{v} = v 1_D & \text{dans } \overline{B_{y_o,R_o}} \ , \\ \overline{v} = 0 & \text{sur } B_{y_o,R_o} \cap \partial D \ , \\ \nabla \overline{v} = \nabla v 1_D & \text{dans } B_{y_o,R_o} \ . \end{cases}$$

Maintenant, nous notons $\Omega_r = B_{y_o,r} \cap D$, quand $0 < r < R_o$. En particulier, on a $\Omega_r = B_{y_o,r}$, quand $0 < r < r_o$. Nous introduisons les trois fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rl} H(r) = & \int_{\Omega_r} |v(y)|^2 \, dy \ , \\ D(r) = & \int_{\Omega_r} |\nabla v(y)|^2 \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \ , \end{array}$$

et

$$\Phi(r) = \frac{D(r)}{H(r)} \geq 0 \ .$$

Notre but est de montrer que Φ est une fonction croissante. En effet, nous allons démontrer que l'égalité suivante est vérifiée

$$\frac{d}{dr} \ln H(r) = (N+1) \frac{d}{dr} \ln r + \frac{1}{r} \Phi(r) \ . \tag{C.1}$$

Ainsi, avec la croissance de Φ, nous en déduirions (de manière analogue à la preuve du Lemme A) que

$$\frac{\ln\left(\frac{H(r_2)}{H(r_1)}\right)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \leq (N+1) + \Phi(r_2) \leq \frac{\ln\left(\frac{H(r_3)}{H(r_2)}\right)}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \ ,$$

et cela aboutira à l'inégalité désirée

$$\int_{\Omega_{r_2}} |v(y)|^2 \, dy \leq \left(\int_{B_{y_o,r_1}} |v(y)|^2 \, dy \right)^{\alpha} \left(\int_{\Omega_{r_3}} |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\alpha} \ ,$$

où $\alpha = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \right)^{-1}$.

Tout d'abord, calculons la dérivée de $H(r) = \int_{B_{y_o,r}} |\overline{v}(y)|^2 \, dy = \int_0^r \int_{S^N} |\overline{v}(\rho s + y_o)|^2 \rho^N d\rho d\sigma(s)$.

$$\begin{array}{rl} H'(r) & = \int_{S^N} |\overline{v}(rs + y_o)|^2 r^N d\sigma(s) \\ & = \frac{1}{r} \int_{S^N} |\overline{v}(rs + y_o)|^2 rs \cdot s r^N d\sigma(s) \\ & = \frac{1}{r} \int_{B_{y_o,r}} div \left(|\overline{v}(y)|^2 (y - y_o) \right) dy \\ & = \frac{1}{r} \int_{B_{y_o,r}} \left((N+1) |\overline{v}(y)|^2 + \nabla |\overline{v}(y)|^2 \cdot (y - y_o) \right) dy \\ & = \frac{N+1}{r} H(r) + \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} v(y) \nabla v(y) \cdot (y - y_o) \, dy \ . \end{array} \tag{C.2}$$

Ensuite, quand $\Delta_y v = 0$ dans D et $v_{|\Gamma} = 0$, nous remarquons que

$$D(r) = 2 \int_{\Omega_r} v(y) \nabla v(y) \cdot (y - y_o) \, dy \ , \tag{C.3}$$

en effet,

$$\begin{array}{l} \quad \int_{\Omega_r} |\nabla v|^2 \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \\ = \int_{\Omega_r} div \left(v \nabla v \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) \right) dy - \int_{\Omega_r} v div \left(\nabla v \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) \right) dy \\ = - \int_{\Omega_r} v \Delta v \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy - \int_{\Omega_r} v \nabla v \cdot \nabla \left(r^2 - |y - y_o|^2 \right) dy \\ \quad \text{car sur } \partial B_{y_o,r}, \ r = |y - y_o| \ \text{ et } v_{|\Gamma} = 0 \\ = 2 \int_{\Omega_r} v \nabla v \cdot (y - y_o) \, dy \quad \text{car } \Delta_y v = 0 \text{ dans } D \ . \end{array}$$

Par conséquent, à partir de (C.2) et (C.3), nous obtenons

$$H'(r) = \frac{N+1}{r} H(r) + \frac{1}{r} D(r) \ , \tag{C.4}$$

et c'est aussi (C.1).

D'un autre côté, la dérivée de $D(r) = \int_0^r \int_{S^N} \left|(\nabla\overline{v})_{|\rho s+y_o}\right|^2 (r^2-\rho^2)\,\rho^N d\rho d\sigma(s)$ vaut

$$\begin{aligned} D'(r) &= 2r\int_0^r \int_{S^N} \left|(\nabla\overline{v})_{|\rho s+y_o}\right|^2 \rho^N d\rho d\sigma(s) \\ &= 2r\int_{\Omega_r} |\nabla v(y)|^2\, dy \ . \end{aligned} \tag{C.5}$$

Ici, quand $\Delta_y v = 0$ dans D et $v_{|\Gamma} = 0$, nous devons remarquer que

$$\begin{aligned} 2r\int_{\Omega_r} |\nabla v(y)|^2\, dy &= \tfrac{N+1}{r} D(r) + \tfrac{4}{r}\int_{B_{y_o,r}} |(y-y_o)\cdot\nabla v(y)|^2\, dy \\ &\quad + \tfrac{1}{r}\int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} |\partial_\nu v|^2 \left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y-y_o)\cdot\nu d\sigma(y) \ , \end{aligned} \tag{C.6}$$

en effet,

$$\begin{aligned} &(N+1)\int_{\Omega_r} |\nabla v|^2 \left(r^2-|y-y_o|^2\right) dy \\ &= \int_{\Omega_r} div\left(|\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y-y_o)\right) dy - \int_{\Omega_r} \nabla\left(|\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right)\right)\cdot(y-y_o)\, dy \\ &= \int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} |\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y-y_o)\cdot\nu d\sigma(y) - \int_{\Omega_r} \partial_{y_i}\left(|\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right)\right)(y_i-y_{oi})\, dy \\ &= \int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} |\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y-y_o)\cdot\nu d\sigma(y) \\ &\quad - \int_{\Omega_r} 2\nabla v\partial_{y_i}\nabla v\left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y_i-y_{oi})\, dy + 2\int_{\Omega_r} |\nabla v|^2 |y-y_o|^2\, dy \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \qquad & -\int_{\Omega_r} \partial_{y_j} v\partial^2_{y_iy_j} v\left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y_i-y_{oi})\, dy \\ &= -\int_{\Omega_r} \partial_{y_j}\left((y_i-y_{oi})\,\partial_{y_j} v\partial_{y_i} v\left(r^2-|y-y_o|^2\right)\right) dy \\ &\quad + \int_{\Omega_r} \partial_{y_j}(y_i-y_{oi})\,\partial_{y_j} v\partial_{y_i} v\left(r^2-|y-y_o|^2\right) dy \\ &\quad + \int_{\Omega_r} (y_i-y_{oi})\,\partial^2_{y_j} v\partial_{y_i} v\left(r^2-|y-y_o|^2\right) dy \\ &\quad + \int_{\Omega_r} (y_i-y_{oi})\,\partial_{y_j} v\partial_{y_i} v\partial_{y_j}\left(r^2-|y-y_o|^2\right) dy \\ &= -\int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} \nu_j\left((y_i-y_{oi})\,\partial_{y_j} v\partial_{y_i} v\left(r^2-|y-y_o|^2\right)\right) d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\Omega_r} |\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right) dy \\ &\quad +0 \quad \text{car } \Delta_y v = 0 \text{ dans } D \\ &\quad - \int_{\Omega_r} 2\,|(y-y_o)\cdot\nabla v|^2\, dy \ . \end{aligned}$$

Donc, quand $\Delta_y v = 0$ dans D, nous avons

$$\begin{aligned} (N+1)\int_{\Omega_r} |\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right) dy &= \int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} |\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y-y_o)\cdot\nu d\sigma(y) \\ &\quad -2\int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} \partial_{y_j} v\nu_j\left((y_i-y_{oi})\,\partial_{y_i} v\right)\left(r^2-|y-y_o|^2\right) d\sigma(y) \\ &\quad +2r^2\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2\, dy - 4\int_{\Omega_r} |(y-y_o)\cdot\nabla v|^2\, dy \ . \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $v_{|\Gamma} = 0$, on a $\nabla v = (\nabla v\cdot\nu)\,\nu$ sur Γ et nous obtenons

$$\begin{aligned} (N+1)\int_{\Omega_r} |\nabla v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right) dy &= -\int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} |\partial_\nu v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y-y_o)\cdot\nu d\sigma(y) \\ &\quad +2r^2\int_{\Omega_r} |\nabla v|^2\, dy - 4\int_{\Omega_r} |(y-y_o)\cdot\nabla v|^2\, dy \ , \end{aligned}$$

c'est à dire (C.6).

Par conséquent, à partir de (C.5) et (C.6), quand $\Delta_y v = 0$ dans D et $v_{|\Gamma} = 0$, nous avons

$$D'(r) = \frac{N+1}{r} D(r) + \frac{4}{r}\int_{\Omega_r} |(y-y_o)\cdot\nabla v(y)|^2\, dy + \frac{1}{r}\int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} |\partial_\nu v|^2\left(r^2-|y-y_o|^2\right)(y-y_o)\cdot\nu d\sigma(y) \ . \tag{C.7}$$

Le calcul de la dérivée de $\Phi(r) = \frac{D(r)}{H(r)}$ donne

$$\Phi'(r) = \frac{1}{H^2(r)} \left[D'(r) H(r) - D(r) H'(r) \right] \ ,$$

ce qui implique à partir de (C.4) et (C.7), que

$$\begin{array}{rl} H^2(r)\Phi'(r) & = \frac{1}{r}\left(4\int_{\Omega_r} \left|(y-y_o)\cdot\nabla v(y)\right|^2 dy \ H(r) - D^2(r)\right) \\ & \quad + \frac{1}{r}\int_{\Gamma\cap B_{y_o,r}} \left|\partial_\nu v\right|^2 \left(r^2 - \left|y-y_o\right|^2\right)(y-y_o)\cdot\nu d\sigma(y) \ \ H(r) \ . \end{array}$$

Grâce à (C.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$0 \leq 4\int_{\Omega_r} \left|(y-y_o)\cdot\nabla v(y)\right|^2 dy \ H(r) - D^2(r) \ .$$

L'inégalité $0 \leq (y-y_o)\cdot\nu$ sur Γ est vérifiée quand $B_{y_o,r}\cap D$ est étoilé par rapport à y_o pour tout $r \in]0, R_o[$. Ainsi, nous obtenons la croissance de Φ ce qui complète la preuve du Lemme C.

4.3 Propriété quantitative de continuation unique pour le laplacien

Soit $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, $N \geq 1$, un ouvert borné connexe à frontière ∂D. Soit Γ une partie ouverte non vide Lipschitzienne de ∂D. Nous considérons l'équation elliptique du second ordre dans D, avec une condition de Dirichlet homogène sur $\Gamma \subset \partial\Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_y v = 0 & \text{dans } D \ , \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \ , \\ v = v(y) \in H^2(D) \ . & \end{array} \right. \tag{4.12}$$

Le but de cette section est de décrire des inégalités d'interpolation associées aux solutions v de (4.12).

Théorème 4.2 .- *Soit ω un ouvert non vide inclus dans D. Alors, pour tout $D_1 \subset D$ tel que $\partial D_1 \cap \partial D \Subset \Gamma$ et $\overline{D_1} \setminus (\Gamma \cap \partial D_1) \subset D$, il existe $C > 0$ et $\mu \in]0,1[$ tels que pour tout v solution de* (4.12)*, on ait*

$$\int_{D_1} |v(y)|^2 dy \leq C\left(\int_\omega |v(y)|^2 dy\right)^\mu \left(\int_D |v(y)|^2 dy\right)^{1-\mu} \ .$$

De manière équivalente,

Théorème 4.3 .- *Soit ω un ouvert non vide inclus dans D. Alors, pour tout $D_1 \subset D$ tel que $\partial D_1 \cap \partial D \Subset \Gamma$ et $\overline{D_1} \setminus (\Gamma \cap \partial D_1) \subset D$, il existe $C > 0$ et $\mu \in]0,1[$ tels que pour tout v solution de* (4.12)*, on ait*

$$\int_{D_1} |v(y)|^2 dy \leq C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \int_\omega |v(y)|^2 dy + \varepsilon\int_D |v(y)|^2 dy \quad \forall\varepsilon > 0 \ .$$

Preuve du Théorème 4.2 .- Nous décomposons la démonstration en deux étapes.

Étape 1 .- Nous appliquons le Lemme B, en utilisant un argument standard (voir e.g., [Ro]) qui consiste à construire une suite de boules reliées les unes aux autres le long d'un chemin. Plus précisément, on prétend que pour tous K_1 et K_2, deux compacts non vide inclus dans D où mes$(K_1) > 0$, il existe $\mu \in]0,1[$ tel que pour tout $v = v(y) \in H^2(D)$, solution de $\Delta_y v = 0$ dans D, nous avons

$$\int_{K_2} |v(y)|^2 \, dy \leq \left(\int_{K_1} |v(y)|^2 \, dy \right)^{\mu} \left(\int_D |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\mu} . \tag{4.13}$$

En effet, soit $\delta > 0$ et $q_j \in \mathbb{R}^N$ pour $j = 0, 1, \cdots, m$, on peut construire une suite de boules $\left\{ B_{q_j,\delta} \right\}_{j=0,..,m}$, reliant K_1 à K_2 et vérifiant les inclusions suivantes

$$\begin{cases} K_1 \supset B_{q_0,\delta} \\ K_2 \subset B_{q_m,\delta_o} \quad \text{avec } \delta_o > 0 \\ B_{q_{j+1},\delta} \subset B_{q_j,2\delta} \quad \forall j = 0,..,m-1 \\ B_{q_j,3\delta} \subset D \quad \forall j = 0,..,m \ . \end{cases}$$

Alors, grâce au Lemme B, il existe $\alpha, \alpha_1, \mu \in]0,1[$, tels que

$$\begin{array}{ll} \int_{K_2} |v(y)|^2 \, dy & \leq \int_{B_{q_m,\delta_o}} |v(y)|^2 \, dy \\ & \leq \left(\int_{B_{q_m,\delta}} |v(y)|^2 \, dy \right)^{\alpha} \left(\int_{B_{q_m,3\delta}} |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\alpha} \\ & \leq \left(\int_{B_{q_{m-1},2\delta}} |v(y)|^2 \, dy \right)^{\alpha} \left(\int_D |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\alpha} \\ & \leq \left(\left(\int_{B_{q_{m-1},\delta}} |v(y)|^2 \, dy \right)^{\alpha_1} \left(\int_D |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\alpha_1} \right)^{\alpha} \left(\int_D |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\alpha} \\ & \leq \cdots \\ & \leq \left(\int_{B_{q_0,\delta}} |v(y)|^2 \, dy \right)^{\mu} \left(\int_D |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\mu} \quad , \end{array}$$

ce qui implique l'inégalité désirée (4.13).

Étape 2 .- Nous appliquons le Lemme C, en choisissant y_o dans un voisinage du bord Γ tel que les conditions *i, ii, iii*, soient satisfaites. Ensuite, par une partition adéquate de D, on déduit de (4.13) que pour tout $D_1 \subset D$ tel que $\partial D_1 \cap \partial D \Subset \Gamma$ et $\overline{D_1} \setminus (\Gamma \cap \partial D_1) \subset D$, il existe $C > 0$ et $\mu \in]0,1[$ tels que pour tout $v = v(y) \in H^2(D)$ vérifiant $\Delta_y v = 0$ dans D et $v = 0$ sur Γ, on ait

$$\int_{D_1} |v(y)|^2 \, dy \leq C \left(\int_{\omega} |v(y)|^2 \, dy \right)^{\mu} \left(\int_D |v(y)|^2 \, dy \right)^{1-\mu} .$$

Ceci termine la preuve.

Remarque .- À partir de techniques standards de minimisation, l'inégalité ci-dessus implique

$$\int_{D_1} |v(y)|^2 \, dy \leq C^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \int_{\omega} |v(y)|^2 \, dy + \varepsilon \int_D |v(y)|^2 \, dy \quad \forall \varepsilon > 0 \ .$$

En effet, on note $A = \int_{D_1} |v(y)|^2 \, dy \neq 0$, $B = \int_{\omega} |v(y)|^2 \, dy$ et $F = \int_D |v(y)|^2 \, dy$. On sait qu'il existe $C > 0$ et $\mu \in]0,1[$ tels que $A \leq C B^{\mu} F^{1-\mu}$. Donc,

$$A \leq C^{\frac{1}{\mu}} B \left(\frac{F}{A} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} .$$

Maintenant, si $\frac{F}{A} \leq \frac{1}{\varepsilon}$, alors $A \leq C^{\frac{1}{\mu}} B \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}$. Et, si $\frac{F}{A} > \frac{1}{\varepsilon}$, alors $A \leq \varepsilon F$. Par conséquent, on obtient l'inégalité d'interpolation désirée. Réciproquement, supposons qu'il existe $C > 0$ et $\mu \in]0,1[$ tels que

$$\int_{D_1} |v(y)|^2 \, dy \leq C^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \int_{\omega} |v(y)|^2 \, dy + \varepsilon \int_D |v(y)|^2 \, dy \quad \forall \varepsilon > 0 \ ,$$

alors, on choisit $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{A}{F}$ afin d'obtenir $A \leq 2CB^{\mu}F^{1-\mu}$.

Commentaire .- Les calculs de cette section se généralisent aux solutions du système elliptique suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta_y u = f & \text{dans } D \ , \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \ , \\ u = u\left(y\right) \in H^2\left(D\right) \ , & \\ \left(-\Delta_y\right)^{-1} f \in H^2 \cap H^1_0\left(D\right) \ , & \end{array}\right.$$

afin d'en déduire l'inégalité suivante

$$\int_{D_1} \left|u\left(y\right)\right|^2 dy \leq C \left(\left\| \left(-\Delta_y\right)^{-1} f \right\|^2_{L^2(D)} + \int_{\omega} \left|u\left(y\right)\right|^2 dy \right)^{\mu} \left(\int_D \left|u\left(y\right)\right|^2 dy \right)^{1-\mu} .$$

4.4 Propriété quantitative de continuation unique pour l'opérateur elliptique $\partial_t^2 + \Delta$

Dans cette section, nous présentons le résultat suivant (voir [LeR]).

Théorème 4.4 .- *Soit Ω un ouvert borné connexe et Lipschitzien dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. On choisit $T > 0$ et $\delta \in]0, T/2[$. Nous considérons l'équation elliptique du second ordre dans $\Omega \times]0, T[$ avec une condition de Dirichlet sur $\partial\Omega \times (0, T)$,*

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t^2 u + \Delta u = 0 & \textit{dans } \Omega \times]0, T[\ , \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \times]0, T[\ , \\ u = u\left(x, t\right) \in H^2\left(\Omega \times]0, T[\right) \ . & \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Alors, pour tout $\varphi \in C_0^{\infty}\left(\Omega \times (0, T)\right)$, $\varphi \neq 0$, il existe $C > 0$ et $\mu \in]0, 1[$ tels que pour tout u solution de (4.14), on ait

$$\int_{\delta}^{T-\delta} \int_{\Omega} \left|u\left(x, t\right)\right|^2 dxdt \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} \left|u\left(x, t\right)\right|^2 dxdt \right)^{1-\mu} \left(\int_0^T \int_{\Omega} \left|\varphi u\left(x, t\right)\right|^2 dxdt \right)^{\mu} .$$

Preuve .- Nous appliquons le Théorème 4.2 avec $D = \Omega \times]0, T[$, $\Gamma = \partial\Omega \times]0, T[$, $\Omega \times]\delta, T - \delta[\subset D_1$, $y = (x, t)$, $\Delta_y = \partial_t^2 + \Delta$.

4.5 Propriété quantitative de continuation unique pour la somme de vecteurs propres

Le but de cette section est d'obtenir les deux résultats suivants (voir [LZ] ou [JL]).

Théorème 4.5 .- *Soient Ω un ouvert borné soit convexe, soit C^2 et connexe dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et ω un ouvert non vide inclus dans Ω. Alors, il existe $C > 0$ tel que pour toute suite $\left\{a_j\right\}_{j \geq 1}$ de réels et tout entier $M > 1$, on ait*

$$\sum_{1 \leq j \leq M} a_j^2 \leq C e^{C\sqrt{\lambda_M}} \int_{\omega} \left| \sum_{1 \leq j \leq M} a_j e_j\left(x\right) \right|^2 dx \ ,$$

où $\{\lambda_j\}_{j\geq1}$ et $\{e_j\}_{j\geq1}$ sont les valeurs propres et fonctions propres de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$, formant une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$.

De façon équivalente,

Théorème 4.6 .- *Soient Ω un ouvert borné soit convexe, soit C^2 et connexe dans $\mathbb{R}^N$, $N\geq1$ et ω un ouvert non vide inclus dans Ω. Alors, il existe $C>0$ tel que pour toute suite $\{a_j\}_{j\geq1}$ de réels et tout réel $R>\lambda_1$, on ait*

$$\sum_{\{j;\lambda_j\leq R\}} a_j^2 \leq Ce^{C\sqrt{R}}\int_\omega \left|\sum_{\{j;\lambda_j\leq R\}} a_je_j(x)\right|^2 dx\ ,$$

où $\{\lambda_j\}_{j\geq1}$ et $\{e_j\}_{j\geq1}$ sont les valeurs propres et fonctions propres de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$, formant une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$.

Preuve du Théorème 4.5 .- Nous décomposons la démonstration en trois étapes.

Étape 1 .- Pour tout $a_j\in\mathbb{R}$, on introduit la solution

$$w(x,t)=\sum_{j\leq M} a_je_j(x)\operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_j}t\right)-\chi(x)\sum_{j\leq M}a_je_j(x)\ ,$$

où $\chi\in C_0^\infty(\omega)$, $\chi=1$ dans $\widetilde{\omega}\Subset\omega$. On rappelle que $\operatorname{ch}t=\left(e^t+e^{-t}\right)/2$. Alors, w vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2w+\Delta w=\Delta f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\ ,\\ w=0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\ ,\\ w=\partial_tw=0 & \text{sur } \widetilde{\omega}\times\{0\}\ ,\\ w=w(x,t)\in H^2(\Omega\times]0,T[)\ , & \end{cases}$$

pour tout $T>0$, où $f=-\chi\sum\limits_{j\leq M}a_je_j\in H_0^2(\Omega)$. On dénote par $\overline{w}$ le prolongement de w par zéro dans $\overline{\widetilde{\omega}\times]-T,0[}$. Alors, $\overline{w}$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2\overline{w}+\Delta\overline{w}=\Delta f1_{\Omega\times(0,T)} & \text{dans } \Omega\times]0,T[\cup\widetilde{\omega}\times]-T,0[\ ,\\ \overline{w}=0 & \text{dans } \widetilde{\omega}\times]-T,0[\ ,\\ \overline{w}=0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\ . \end{cases}$$

À présent, nous définissons D, un ouvert connexe dans $\mathbb{R}^{N+1}$, vérifiant les six conditions suivantes:
i). $\Omega\times]\delta,T-\delta[\subset D$ avec $\delta\in]0,T/2[$;
ii). $\partial\Omega\times]\delta,T-\delta[\subset\partial D$;
iii). $D\subset\Omega\times]0,T[\cup\widetilde{\omega}\times]-T,0[$;
iv). il existe un ouvert non vide $\omega_o\Subset D\cap\widetilde{\omega}\times]-T_o,0[$ avec $T_o\in]0,T[$;
v). $D\in C^2$ si Ω est C^2 et connexe ;
vi). D est convexe avec un choix adéquat de (δ,T_o) si Ω est convexe .

En particulier, $\overline{w}\in H^2(D)$.

Étape 2 .- Nous prétendons qu'il existe $g\in H^2(\Omega\times]-T,T[)\cap H_0^1(\Omega\times]-T,T[)\subset H^2(D)$ tel que

$$\begin{cases} \partial_t^2g+\Delta g=\Delta f1_{\Omega\times(0,T)} & \text{dans } \Omega\times]-T,T[\ ,\\ g=0 & \text{sur } \partial(\Omega\times]-T,T[)=\partial\Omega\times]-T,T[\cup\Omega\times\{\pm T\}\ , \end{cases}$$

et

$$\|g\|_{L^2(D)}\leq\|f\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)}\ . \tag{4.15}$$

En effet, nous allons procéder en six sous-étapes dans le cas où Ω est C^2 et connexe (le cas où Ω est convexe étant bien connu car alors $\Omega \times \left]-T,T\right[$ est convexe). On dénote $h = \Delta f 1_{\Omega\times(0,T)} \in L^2\left(\Omega \times \left]-T,T\right[\right)$.

Sous-étape 1: on rappelle que $h \in L^2\left(\Omega \times \left]-T,T\right[\right)$ implique l'existence de $g \in H_0^1\left(\Omega \times \left]-T,T\right[\right)$.

Sous-étape 2: grâce à la régularité intérieure des systèmes elliptiques, pour tout $D_0 \Subset \Omega \times \left]-T,T\right[$, $g \in H^2\left(D_0\right)$.

Sous-étape 3: grâce à la régularité à la frontière des systèmes elliptiques, mais loin des sommets $\Omega \times \{-T,T\}$, g est aussi localement dans H^2 car Ω est C^2.

Sous-étape 4: on étend la solution à $t = T$ comme suit.
Soient $\overline{h}(x,t) = h(x,t)$ pour $(x,t) \in \Omega \times \left]-T,T\right[$ et $\overline{h}(x,t) = -h(x,2T-t)$ pour $(x,t) \in \Omega \times \left]T,3T\right[$. Ainsi $\overline{h} \in L^2\left(\Omega \times \left]-T,3T\right[\right)$. Soient $\overline{g}(x,t) = g(x,t)$ pour $(x,t) \in \Omega \times \left[-T,T\right[$ et $\overline{g}(x,t) = -g(x,2T-t)$ pour $(x,t) \in \Omega \times [T,3T]$. Alors, $\overline{g}$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t^2 \overline{g} + \Delta \overline{g} = \overline{h} & \text{dans } \Omega \times \left]-T,3T\right[\ , \\ \overline{g} = 0 & \text{sur } \partial\left(\Omega \times \left]-T,3T\right[\right) = \partial\Omega \times \left]-T,3T\right[\cup \Omega \times \{-T,3T\}\ . \end{array}\right.$$

En appliquant la régularité à la frontière comme au sous-étape 3, on obtient que $\overline{g} \in H^2\left(\Omega \times \left]0,2T\right[\right)$. En particulier, $g \in H^2\left(\Omega \times \left]0,T\right[\right)$.

Sous-étape 5: on étend de manière analogue à $t = -T$ pour conclure que $g \in H^2\left(\Omega \times \left]-T,0\right[\right)$.

Sous-étape 6: finalement, on multiplie $\partial_t^2 g + \Delta g = h$ par $(-\Delta)^{-1} g$ et on intègre par parties sur $\Omega \times \left]-T,T\right[$, afin d'avoir

$$\begin{array}{ll} \int_{-T}^{T} \left\|\partial_t g\right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt + \left\|g\right\|_{L^2(\Omega\times]-T,T[)}^2 & = \int_0^T \int_\Omega -\Delta f(x) (-\Delta)^{-1} g(x,t)\, dxdt \\ & = \int_0^T \int_\Omega f(x) (-\Delta) (-\Delta)^{-1} g(x,t)\, dxdt \quad \text{car } f \in H_0^2(\Omega) \\ & \leq \left\|f\right\|_{L^2(\Omega\times]0,T[)} \left\|g\right\|_{L^2(\Omega\times]-T,T[)} \quad \text{par Cauchy-Schwarz}\ . \end{array}$$

ce qui aboutit à l'inégalité désirée (4.15).

Étape 3 .- Finalement, nous appliquons le Théorème 4.3 avec $\Delta_y = \partial_t^2 + \Delta$, $v = \overline{w} - g$ dans D avec $\Gamma = \partial\Omega \times \left]\delta, T-\delta\right[$ et $\Omega \times \left]\delta/2 + T/4, 3T/4 - \delta/2\right[\subset D_1 \subset D$ tels que $\partial D_1 \cap \partial D \Subset \Gamma$ et $\overline{D_1} \backslash (\Gamma \cap \partial D_1) \subset D$ de sorte que

$$\int_{D_1} \left|\overline{w} - g\right|^2 dy \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \int_{\omega_o} \left|\overline{w} - g\right|^2 dy + \varepsilon \int_D \left|\overline{w} - g\right|^2 dy \quad \forall \varepsilon > 0\ ,$$

ce qui implique que

$$\int_{D_1} \left|\overline{w}\right|^2 dy \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \int_D |g|^2 dy + \varepsilon \int_D \left|\overline{w}\right|^2 dy \quad \forall \varepsilon \in \left]0,1\right[\ ,$$

où nous avons utilisé le fait que $\overline{w} = 0$ dans ω_o. À partir de (4.15), nous conluons qu'il existe $C > 0$ et $\mu \in \left]0,1\right[$ tels que

$$\int_{\delta/2+T/4}^{3T/4-\delta/2} \int_\Omega |w(x,t)|^2 dxdt \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \int_0^T \int_\Omega |f(x)|^2 dxdt + \varepsilon \int_0^T \int_\Omega |w(x,t)|^2 dxdt \quad \forall \varepsilon > 0\ .$$

D'un autre côté, nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{array}{ll} \int_0^T \int_\Omega |f(x)|^2 dxdt & = T \int_\Omega \left|\chi(x) \sum_{j\leq M} a_j e_j(x)\right|^2 dx \\ & \leq T \int_\omega \left|\chi(x) \sum_{j\leq M} a_j e_j(x)\right|^2 dx\ , \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \int_0^T \int_\Omega |w(x,t)|^2 dxdt & = \int_0^T \int_\Omega \left|\sum_{j\leq M} a_j e_j(x) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) - \chi(x) \sum_{j\leq M} a_j e_j(x)\right|^2 dxdt \\ & \leq 2T e^{2\sqrt{\lambda_M} T} \sum_{j\leq M} a_j^2 + 2T \int_\omega \left|\chi(x) \sum_{j\leq M} a_j e_j(x)\right|^2 dx\ , \end{array}$$

$$\int_{\delta/2+T/4}^{3T/4-\delta/2}\int_\Omega\left|\sum_{j\leq M}a_je_j\left(x\right)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda_j}t\right)\right|^2dxdt \quad \leq 2\int_{\delta/2+T/4}^{3T/4-\delta/2}\int_\Omega\left|w\left(x,t\right)\right|^2dxdt$$
$$+2T\int_\omega\left|\chi\left(x\right)\sum_{j\leq M}a_je_j\left(x\right)\right|^2dx\ .$$

Par conséquent, à partir des quatre dernières inégalités, nous en déduisons que pour tout $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}\left(T/2-\delta\right)\sum_{j\leq M}a_j^2 &\leq \int_{\delta/2+T/4}^{3T/4-\delta/2}\int_\Omega\left|\sum_{j\leq M}a_je_j\left(x\right)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda_j}t\right)\right|^2dxdt\\ &\leq 2C\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}T\int_\omega\left|\chi\left(x\right)\sum_{j\leq M}a_je_j\left(x\right)\right|^2dx\\ &\quad+4\varepsilon\left(Te^{2\sqrt{\lambda_M}T}\sum_{j\leq M}a_j^2+T\int_\omega\left|\chi\left(x\right)\sum_{j\leq M}a_je_j\left(x\right)\right|^2dx\right)\\ &\quad+2T\int_\omega\left|\chi\left(x\right)\sum_{j\leq M}a_je_j\left(x\right)\right|^2dx\ .\end{aligned}$$

Choisissons $\varepsilon=\frac{1}{8}\frac{(T/2-\delta)}{Te^{2\sqrt{\lambda_M}T}}$, nous obtenons l'existence de $C>0$ tel que

$$\sum_{j\leq M}a_j^2\leq Ce^{C\sqrt{\lambda_M}}\int_\omega\left|\sum_{j\leq M}a_je_j\left(x\right)\right|^2dx\ .$$

4.6 Application à l'équation de la chaleur

Dans cette section, nous proposons le résultat suivant.

Théorème 4.7 .- *Soient Ω un ouvert borné soit convexe, soit C^2 et connexe dans $\mathbb{R}^N$, $N\geq1$ et ω un ouvert non vide de Ω. Alors pour tout $T>0$, il existe $C>0$ et $\mu\in\left]0,1\right[$ tels que pour tout u solution de* (2.3)*, et pour tout $t_o\in\left]0,T\right[$, on ait*

$$\int_\Omega\left|u\left(x,t_o\right)\right|^2dx\leq C\left(e^{\frac{C}{t_o}}\int_\Omega\left|u\left(x,0\right)\right|^2dx\right)^{1-\mu}\left(\int_\omega\left|u\left(x,t_o\right)\right|^2dx\right)^\mu\ .$$

Remarque .- Maintenant, rappelons que pour toute solution u de (2.3) avec $u\left(\cdot,0\right)=u_o\in H_0^1\left(\Omega\right)$, on ait (voir e.g., [P08])

$$\int_\Omega\left|u\left(x,0\right)\right|^2dx\leq\exp\left(2t_o\frac{\left\|u_o\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{\left\|u_o\right\|_{L^2(\Omega)}^2}\right)\int_\Omega\left|u\left(x,t_o\right)\right|^2dx\ .$$

Par conséquent, en combinant cette dernière inégalité avec le Théorème 4.7, il existe $C>0$ tel que

$$\int_\Omega\left|u\left(x,0\right)\right|^2dx\leq C\exp\left(2t_o\frac{\left\|u_o\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{\left\|u_o\right\|_{L^2(\Omega)}^2}\right)e^{\frac{C}{t_o}}\left(\int_\Omega\left|u\left(x,0\right)\right|^2dx\right)^{1-\mu}\left(\int_\omega\left|u\left(x,t_o\right)\right|^2dx\right)^\mu\ ,$$

ce qui aboutit à l'inégalité d'interpolation suivante

$$\left\|u_o\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C^{\frac{1}{\mu}} e^{\frac{C/\mu}{t_o}} \exp\left(2t_o \frac{1}{\mu} \frac{\left\|u_o\right\|^2_{H^1_0(\Omega)}}{\left\|u_o\right\|^2_{L^2(\Omega)}}\right) \int_\omega \left|u\left(x,t_o\right)\right|^2 dx \ .$$

La quantification de la propriété de continuation unique pour les équations paraboliques avec des coefficients en espace-temps à partir de la nullité sur $\omega \times \{t_o\}$ est plus délicate (voir le travail de L. Escauriaza, F.J. Fernandez et S. Vessella [EFV]).

Preuve du Théorème 4.7 .- Soient λ_1,λ_2,$\cdots$ et e_1,e_2,$\cdots$ les valeurs propres et fonctions propres de $-\Delta$ dans $H^1_0(\Omega)$, formant une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$. Pour tout $u_o = u(\cdot,0) = \sum_{j\geq 1} \alpha_j e_j$ dans $L^2(\Omega)$ où $\alpha_j = \int_\Omega u_o e_j dx$, la solution u de (2.3), s'écrit $u(x,t) = \sum_{j\geq 1} \alpha_j e_j(x) e^{-\lambda_j t}$. Soit $t_o \in \left]0,T\right[$. Nous introduisons (voir [Lin] ou [CRV]) la solution

$$w(x,t) = \sum_{j\geq 1} \alpha_j e_j(x) e^{-\lambda_j t_o} \mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda_j} t\right) - \chi(x) \sum_{j\geq 1} \alpha_j e_j(x) e^{-\lambda_j t_o},$$

où $\chi \in C^\infty_0(\omega)$, $\chi = 1$ dans $\widetilde{\omega} \Subset \omega$. Alors, w vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2 w + \Delta w = \Delta f & \text{dans } \Omega \times \left]0,T\right[\ , \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \left]0,T\right[\ , \\ w = \partial_t w = 0 & \text{sur } \widetilde{\omega} \times \{0\} \ , \\ w = w(x,t) \in H^2\left(\Omega \times \left]0,T\right[\right) \ , & \end{cases}$$

où $f = -\chi u(\cdot,t_o) \in H^2_0(\Omega)$. Par conséquent, de façon analogue à la preuve du Théorème 4.5, il existe $\delta \in \left]0,T/2\right[$, $C > 0$ et $\mu \in \left]0,1\right[$ tels que l'on ait

$$\int_\delta^{T-\delta} \int_\Omega \left|w(x,t)\right|^2 dxdt \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \int_0^T \int_\Omega \left|f(x)\right|^2 dxdt + \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \left|w(x,t)\right|^2 dxdt \quad \forall \varepsilon > 0$$

Par ailleurs, nous avons les inégalités suivantes.

$$\int_0^T \int_\Omega \left|f(x)\right|^2 dxdt \leq T \int_\omega \left|\chi(x) u(x,t_o)\right|^2 dx \ ,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \left|w(x,t)\right|^2 dxdt \leq 2T \sum_{j\geq 1} \alpha_j^2 e^{-2\left(\lambda_j t_o - \sqrt{\lambda_j} T\right)} + 2T \int_\omega \left|\chi(x) u(x,t_o)\right|^2 dx \ ,$$

$$\begin{array}{ll} \sum_{j\geq 1} \alpha_j^2 e^{-2\left(\lambda_j t_o - \sqrt{\lambda_j} T\right)} & = \sum_{\left\{j\geq 1; \sqrt{\lambda_j} \leq \frac{T}{t_o}\right\}} \alpha_j^2 e^{-2\left(\lambda_j t_o - \sqrt{\lambda_j} T\right)} + \sum_{\left\{j\geq 1; \sqrt{\lambda_j} > \frac{T}{t_o}\right\}} \alpha_j^2 e^{-2\left(\lambda_j t_o - \sqrt{\lambda_j} T\right)} \\ & \leq e^{2\frac{T^2}{t_o}} \sum_{j\geq 1} \alpha_j^2 \ , \end{array}$$

$$\int_\delta^{T-\delta} \int_\Omega \left|\sum_{j\geq 1} \alpha_j e_j(x) e^{-\lambda_j t_o} \mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda_j} t\right)\right|^2 dxdt \leq 2 \int_\delta^{T-\delta} \int_\Omega \left|w(x,t)\right|^2 dxdt + 2T \int_\omega \left|\chi(x) u(x,t_o)\right|^2 dx \ ,$$

En conséquence, à partir des cinq dernières inégalités, nous en déduisons que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{array}{ll} (T-2\delta) \sum_{j\geq 1} \alpha_j^2 e^{-2\lambda_j t_o} & \leq (T-2\delta) \sum_{j\geq 1} \alpha_j^2 e^{-2\left(\lambda_j t_o - \sqrt{\lambda_j} \delta\right)} \\ & \leq \int_\delta^{T-\delta} \int_\Omega \left|\sum_{j\geq 1} \alpha_j e_j(x) e^{-\lambda_j t_o} \mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda_j} t\right)\right|^2 dxdt \\ & \leq 2TC \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \int_\omega \left|\chi(x) u(x,t_o)\right|^2 dx \\ & \quad +4T\varepsilon \left(e^{2\frac{T^2}{t_o}} \sum_{j\geq 1} \alpha_j^2 + \int_\omega \left|\chi(x) u(x,t_o)\right|^2 dx\right) \\ & \quad +2T \int_\omega \left|\chi(x) u(x,t_o)\right|^2 dx \ . \end{array}$$

Finalement, il existe $C>0$ tel que pour tout $t_o>0$,

$$\begin{array}{ll}\int_\Omega \left|u\left(x,t_o\right)\right|^2 dx & =\sum\limits_{j\geq 1}\alpha_j^2 e^{-2\lambda_j t_o} \\ & \leq C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}\int_\omega \left|u\left(x,t_o\right)\right|^2 dx+\varepsilon e^{\frac{C}{t_o}}\int_\Omega \left|u\left(x,0\right)\right|^2 dx \quad \forall\varepsilon\in\left]0,1\right[\ ,\end{array}$$

ce qui implique l'inégalité d'interpolation du Théorème 4.7,

$$\int_\Omega \left|u\left(x,t_o\right)\right|^2 dx\leq C^\mu e^{\frac{C(1-\mu)}{t_o}}\left(\int_\Omega \left|u\left(x,0\right)\right|^2 dx\right)^{1-\mu}\left(\int_\omega \left|u\left(x,t_o\right)\right|^2 dxdt\right)^\mu \ .$$

Commentaire .- L'inégalité suivante peut être obtenue grâce au Théorème 4.7 suite aux travaux de G. Lebeau et L. Robbiano [LeR] sur le contrôle exact de la chaleur et de G. Wang [W] sur le principe d'un contrôle bang-bang.

Théorème 4.8 .- *Soient Ω un ouvert borné soit convexe, soit C^2 et connexe dans $\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$ et ω un ouvert non vide de Ω. Soient $T>0$ et $\mathcal{E}\subset[0,T]$ tels que* $\text{mes}(\mathcal{E})>0$. *Alors, il existe $C>0$ tel que pour tout u solution de* (2.3), *on ait*

$$\int_\Omega \left|u\left(x,T\right)\right|^2 dx\leq C\int_{\mathcal{E}}\int_\omega \left|u\left(x,t\right)\right|^2 dxdt\ .$$

4.7 Application à l'équation des ondes

En reprenant l'idée de L. Robbiano qui consiste à utiliser une inégalité d'interpolation de type Hölder pour l'opérateur elliptique $\partial_t^2+\Delta$ et la transformation de FBI introduite par G. Lebeau et L. Robbiano, nous obtenons l'estimation de dépendance de type logarithmique suivante.

Théorème 4.9 .- *Soient Ω un ouvert borné soit convexe, soit C^2 et connexe dans $\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$ et ω un ouvert non vide de Ω. Alors, pour tout $\beta\in\left]0,1\right[$, Il existe $C>0$ et $T>0$ tels que pour toute solution u de* (2.2) *avec la donnée initiale non nulle $(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, on ait*

$$\left\|(u_0,u_1)\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq e^{\left(C\frac{\left\|(u_0,u_1)\right\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}}{\left\|(u_0,u_1)\right\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}}\right)^{1/\beta}}\left\|u\right\|_{L^2(\omega\times]0,T[)}\ .$$

5 Principales nouveautés liées à l'équation de Schrödinger

Les ramifications autour de l'équation de Schrödinger sont nombreuses. En effet, à partir de l'équation de Schrödinger linéaire ou non linéaire, nous avons

- l'équation des plaques via la factorisation $\partial_t^2+\Delta^2=-\left(i\partial_t-\Delta\right)\left(i\partial_t+\Delta\right)$;
- l'équation de la chaleur via la transformation de FBI (voir e.g., [P04]) ;
- les équations d'Euler via la transformation de Hasimoto [Ha] ;
- l'électromagnétisme via un scaling (voir e.g., [Ic]) ;
- la cinétique via la transformation de Husimi (voir e.g., [LP]) .

5.1 De l'équation des ondes à celle de Schrödinger

Nous avons appliqué à la théorie du contrôle des EDP une transformation utilisée par L. Boutet de Monvel [BdM] dans le cadre de la propagation des singularités (voir aussi le travail de L. Kapitanski et Y. Safarov [KS] sur les propriétés régularisantes des équations de Schrödinger) qui permet de passer de l'équation des ondes à celle de Schrödinger. La démarche entreprise est originale dans le cadre de la contrôlabilité et a fait l'objet d'un papier publié dans SICON [P04] (cité par [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17] entre autres). Ce travail a débuté pendant ma première année en tant qu'ATER à l'Université de Provence [18] (voir aussi [P05]).

Nous appliquons les idées décrites au paragraphe 3.1. Soit v une solution de l'équation des ondes controlée vers l'état d'équilibre sur une partie du bord par $\Theta\varrho$ où $\Theta = \Theta(x,t) \in C_c^0 (\partial\Omega \times]0, T_c[\,; \mathbb{R})$, $\varrho \in H^1 \left(]-T,T[\,; L^2(\partial\Omega)\right)$ et avec donnée initiale $(v_0, 0)$ où $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Nous commençons par construire par symétrie une solution $\widetilde{v} \in C\left(\mathbb{R}; H^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}; L^2(\Omega)\right)$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widetilde{v} - \Delta \widetilde{v} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \ , \\ \widetilde{v}(x,t) = (\Theta\varrho)(x,t)\, 1_{|\partial\Omega\times]0,T_c[} - (\Theta\varrho)(x,-t)\, 1_{|\partial\Omega\times]-T_c,0[} & ,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \ , \\ (\widetilde{v}, \partial_t \widetilde{v})(\cdot, 0) = (v_0, 0) & \text{dans } \Omega \ , \\ \widetilde{v} \equiv 0 & \text{dans } \Omega \times (]-\infty, -T_c] \cup [T_c, +\infty[) \ . \end{cases}$$

Par ailleurs, à partir de la solution fondamentale de l'équation de Schrödinger monodimensionelle $E(\ell,t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi t}} e^{i\frac{\ell^2}{4t}} \in C^\infty(\{t>0\} \times \mathbb{R}_\ell) \cap C\left([0,+\infty[\,; H^{-1/2-\epsilon}(\mathbb{R}_\ell)\right)$, nous avons l'existence de $F = F(\ell,t) \in C\left([0,+\infty[\,; H^{-1}(\mathbb{R}_\ell)\right)$ vérifiant

$$\begin{cases} i\partial_t F(\ell,t) + \partial_\ell^2 F(\ell,t) = f(\ell,t)\, 1_{\ell \in (\mathbb{R}\setminus]-T_c,T_c[)} & ,\ (\ell,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \\ F(\ell,0) = \delta(\ell) & ,\ \ell \in \mathbb{R} \ , \\ F(\ell,t) = 0 & ,\ (\ell,t) \in [-T_c, T_c] \times [\varepsilon, +\infty[\ . \end{cases}$$

Finalement, nous observons que la solution

$$z(x,t) = \int_{\mathbb{R}} F(\ell,t)\, \widetilde{v}(x,\ell)\, d\ell \ ,$$

[11] Lasiecka, I., Triggiani, R., Zhang, X. (2003) *J. Inv. Ill-Posed Problems 11, 1-63.*

[12] Zuazua, E. (2003) *Remarks on the controllability of the Schrödinger equation, A. Bandrauk, M.C. Delfour, and C. Le Bris, Quantum Control: mathematical and numerical challenges, CRM Proc. Lect. Notes Ser., AMS Publications, Providence, R.I., 181-199.* "The paper by K.D. Phung [P] is also worth mentioning. In [P] the author establishes the connections between the heat, wave and Schrodinger equations through suitable integral transformations. This allows him to get, for instance, estimates on the cost of approximate controllability for the Schrodinger equation when the GCC (Geometrical Control Condition) is not satisfied and also on the dependence of the size of the control with respect to the control time."

[13] Miller, L. (2004) *Arch. Rat. Mech. Anal. 172, 429-456.* "Phung's paper [Phu01] drew our attention to the subjet. His Theorem 2.3 proves that, under geodesic condition, the cost of controlling data in $H_0^1(M)$ grows at most as $\exp\left(C/T^2\right)$ as T tends to 0.
The strategy used by Phung to prove Theorem 2.3 in [Phu01], is what we have coined the transmutation control method. Phung was inspired by [BdM75,KS96] (i.e. articles of L. Boutet de Monvel (1975), L. Kapitanski & Y. Safarov (1996)) where the Schrödinger semigroup on the whole space is written as an integral over the wave group."

[14] Miller, L. (2006) *SIAM J. Control Optim. 45, 762-772.* "the Schrödinger equation, which is the control problem to which a transmutation method was first applied by Phung ... ".

[15] Zuazua, E. (2006) *Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some results and open problems, in Handbook of Differential Equations: Evolutionary Differential Equations, vol. 3, C. M. Dafermos and E. Feireisl eds., Elsevier Science, pp. 527-621.* "Previously similar arguments and transformations have been used by K.D. Phung to analyze the cost of controllability for the Schrödinger equations."

[16] Illner, R., Lange, H., Teismann, H. (2006) *ESAIM, Control Optim. Calc. Var. 12, 615-635.*

[17] Dehman, B., Gérard, P., Lebeau, G. (2006) *Mathematische Zeitschrift, 4, 729-749.*

[18] http://www-gm3.univ-mrs.fr/~gallouet/documents/phung.pdf

satisfait

$$\begin{cases} i\partial_t z - \Delta z = 0 & \text{dans } \Omega \times]0,\varepsilon[\ , \\ z(x,t) = \int_0^{T_c} F(\ell,t)(\Theta\varrho)(x,\ell)\, d\ell - \int_{-T_c}^0 F(\ell,t)(\Theta\varrho)(x,-\ell)\, d\ell & , \ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \ , \\ z(\cdot,0) = v_0 & \text{dans } \Omega \ , \\ z(\cdot,\varepsilon) \equiv 0 & \text{dans } \Omega \ . \end{cases}$$

5.2 De l'équation de Schrödinger à celle des ondes

Une propriété essentielle de l'équation des ondes concerne la propagation des singularités ou encore la propagation de la régularité microlocale (voir e.g., [Pau]). Différentes techniques permettent de décrire ce phénomène comme les rayons gaussiens [Ra], les opérateurs intégraux de Fourier [Ho], l'extension de la méthode des multiplicateurs avec des opérateurs pseudo-différentiels [MS], les mesures de défauts [GeL].

Nous nous sommes intéressés à introduire des opérateurs h-Fourier intégraux et il est alors naturel de travailler avec l'opérateur $i\partial_s - h\left(\Delta - \partial_t^2\right)$ avec $h > 0$.

Nous introduisons la fonction $a = a(x,t,s) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{N+2};\mathbb{C}\right)$, dépendante de $h \in]0,1]$ définie comme suit.

$$a(x,t,s) = \left(\frac{1}{(is+1)^{N/2}}\ e^{-\frac{1}{4h}\frac{|x|^2}{is+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-ihs+1}}\ e^{-\frac{1}{4}\frac{t^2}{-ihs+1}}\right) .$$

Cette fonction a peut être vue comme produit de $N+1$ solutions de l'équation de Schrödinger monodimensionnelle $i\partial_s \pm h\partial^2$. En particulier, nous obtenons.

$$\left(i\partial_s + h\left(\Delta - \partial_t^2\right)\right) a(x,t,s) = 0 \ ,$$

$$|a(x,t,s)| = \frac{1}{\left(\sqrt{s^2+1}\right)^{N/2}} \frac{1}{\left(\sqrt{(hs)^2+1}\right)^{1/2}}\ e^{-\frac{1}{4h}\frac{|x|^2}{s^2+1}}\ e^{-\frac{1}{4}\frac{t^2}{(hs)^2+1}} .$$

Maintenant, nous allons construire un opérateur intégral de Fourier associé à a de la façon suivante. Soit $x^o \in \Omega$, $m = (m_1,\cdots,m_N) \in \mathbb{Z}^N$, $\lambda \geq 1$ et $\varepsilon \in]0,1]$. On écrira $\xi^o = (2m+1)\varepsilon$ et $\Lambda(\xi^o) = \left\{\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_N) \in \mathbb{R}^N; 2m_j \leq \xi_j/\varepsilon \leq 2m_j+2\right\}$. On notera $\varphi = \varphi(x,t)$ une fonction régulière vérifiant $\varphi(\cdot,t) \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{-t^2}$. Soit $f \in L^1\left(\mathbb{R}^{N+1}\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^{N+1}\right)$ telle que la transformée de Fourier de φf, $\widehat{\varphi f} \in L^1\left(\mathbb{R}^{N+1}\right)$. Nous introduisons l'opérateur suivant

$$\begin{array}{l} \left(A(x^o,\xi^o) f\right)(x,t,s) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{\xi\in\Lambda(\xi^o)} \int_{|\tau|<\lambda} e^{ix\xi+t\tau}\ e^{-i\left(|\xi|^2-\tau^2\right)hs} a(x-x^o-2\xi hs, t+2\tau hs, s)\ \widehat{\varphi f}(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \ . \end{array}$$

En particulier, nous en déduisons les deux égalités suivantes

$$\left(i\partial_s + h\left(\Delta - \partial_t^2\right)\right)\left(A(x^o,\xi^o) f\right)(x,t,s) = 0 \ ,$$

$$\left(A(x^o,\xi^o) f\right)(x,t,0) = a(x-x^o,t,0)\left[\frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{\xi\in\Lambda(\xi^o)} \int_{|\tau|<\lambda} e^{ix\xi+t\tau}\ \widehat{\varphi f}(\xi,\tau)\, d\xi d\tau\right] .$$

Cette dernière égalité entraîne, à partir de la formule d'inversion de Fourier et une sommation sur les $m \in \mathbb{Z}^N$ provenant de $\xi^o = (2m+1)\,\varepsilon$, l'apparition de la quantité $a\,(x - x^o, t, 0)\,(\varphi f)\,(x,t)$ qui localise autour du point x^o. Par ailleurs,

$$\begin{array}{rl} \left(A\left(x^o,\xi^o\right)f\right)(x,t,L) & = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{\xi\in\Lambda(\xi^o)} \int_{|\tau|<\lambda} e^{ix\xi+t\tau}\ e^{-i\left(|\xi|^2-\tau^2\right)hL}\ \widehat{\varphi f}\,(\xi,\tau) \\ & \qquad a\,(x - x^o - 2\xi^o hL + 2\,(\xi^o-\xi)\,hL, t + 2\tau hL, L)\,d\xi d\tau\ , \end{array}$$

avec $|\xi^o - \xi| \leq \varepsilon$ pour tout $\xi \in \Lambda(\xi^o)$, ce qui entraîne une localisation autour du point $x^o + 2\xi^o hL$ pour ε suffisamment petit.

Maintenant, on multiplie $\left(i\partial_s + h\left(\Delta - \partial_t^2\right)\right)A\left(x^o,\xi^o\right)f = 0$ par u solution de (2.2) et on intègre par parties sur $(x,t,s) \in \Omega \times \mathbb{R} \times [0,L]$ pour en déduire la formule suivante.

$$\begin{array}{l} \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \left(A\left(x^o,\xi^o\right)f\right)(x,t,0)\ \ u\,(x,t)\,dxdt \\ = \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \left(A\left(x^o,\xi^o\right)f\right)(x,t,L)\ \ u\,(x,t)\,dxdt \\ +ih\int_0^L \int_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} \left(A\left(x^o,\xi^o\right)f\right)(x,t,s)\ \ \partial_\nu u\,(x,t)\,d\sigma\,(x)\,dtds\ . \end{array}$$

Cette formule établit un lien entre une localisation autour du point x^o dans la direction ξ^o et une localisation autour du point $x^o + 2\xi^o hL$ pour ε suffisamment petit, pourvu que le segment de droite (ou autrement dit le rayon) reliant x^o et $x^o + 2\xi^o hL$ soit suffisamment éloigné du bord $\partial\Omega$.

Pour traiter le terme de bord (plus précisément, le terme $\int_0^L \int_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} \cdots$ de la formule ci-dessus), une stratégie consiste à construire un autre opérateur intégral de Fourier de manière à rendre la trace au bord suffisamment petite (voir par exemple la construction des rayons gaussiens par J. Ralston). Cette étape est délicate. Les calculs sont beaucoup plus simples quand la frontière est plate (par exemple dans le cas d'un rayon captif entre deux surfaces parallèles). Ici, un problème ouvert consiste à établir une décroissance exponentielle et non uniforme de l'énergie de l'équation des ondes amorties en présence d'un rayon captif entre deux surfaces strictement convexes (comme le cas traité par M. Ikawa [Ik] par exemple).

Dans le cadre de la décroissance polynomiale pour l'équation des ondes amorties (3.1), nous fixons $\varepsilon = 1$ et c'est la propriété de dispersion en la variable s de la fonction a qui va être utilisée pour traiter le terme $\left(A\left(x^o,\xi^o\right)f\right)(x,t,L)$ (voir [P11]).

6 Projet en cours sur l'équation de Schrödinger

Tout au long de ce mémoire, nous avons déjà évoqué de nombreux problèmes ouverts. Ici, le point de départ est un résultat de C. Kenig, G. Ponce et L. Vega [KPV] concernant la propriété de continuation unique pour l'équation de Schrödinger suivante. Soit $u = u\,(x,t)$ une solution suffisamment régulière de

$$i\partial_t u\,(x,t) + \Delta u\,(x,t) = 0 \quad ,\ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\ ,$$

et telle que $u\,(x,0) = u\,(x,1) = 0$ pour tout $x \in \omega \subset \mathbb{R}^N$ où ω doit vérifier des conditions géométriques. Alors, u est identiquement la solution nulle. Par conséquent, il semble naturel de se poser le problème de stabilisation suivant.

Soient $T > 0$ et Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ à frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Nous considérons l'équation de Schrödinger amortie

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\partial_t w + \Delta w + i\alpha\,(x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \delta\left(t - \left(\frac{T}{2} + nT\right)\right) \otimes w = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'\left(\Omega \times \mathbb{R}^+\right)\ , \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+\ , \\ w\,(\cdot,0) = w_o & \text{dans } \Omega\ , \end{array} \right.$$

où $\alpha \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^+)$ vérifie $\{x \in \Omega; \alpha > 0\} \neq \emptyset$. Ici, $\delta\left(t - \left(\frac{T}{2} + nT\right)\right)$ est la masse de Dirac concentrée à l'instant $\left(\frac{T}{2} + nT\right)$. Pour ne pas s'encombrer avec des difficultés liées aux espaces fonctionnels. Nous nous ramenons à l'étude du système régularisé suivant. Soit $\varepsilon \in]0, \min(1, T/4)[$ suffisamment petit,

$$\begin{cases} i\partial_t w^\varepsilon + \Delta w^\varepsilon + i\alpha(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^\varepsilon\left(t - \left(\frac{T}{2} + nT\right)\right) w^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ , \\ w^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ , \\ w^\varepsilon(\cdot, 0) = w_o \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) , & \end{cases}$$

où $\rho^\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une suite régularisante de sorte que, quand $\varepsilon \to 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^\varepsilon\left(t - \left(\frac{T}{2} + nT\right)\right)$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta\left(t - \left(\frac{T}{2} + nT\right)\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$.

Maintenant, $w^\varepsilon \in C\left([0, +\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, +\infty); L^2(\Omega)\right)$ et son energie $E(w^\varepsilon, t) = \int_\Omega |w^\varepsilon(x, t)|^2 dx$ est une fonction décroissante en temps t. Bien entendu, nous voudrions en savoir plus. S'agissant de contrôle sous forme d'un "pulse", il me semble qu'il existe encore peu de résultats mathématiques (voir e.g., [LS]).

7 Travaux en collaboration

J'ai commencé à travailler sur les problèmes de contrôlabilité parabolique lors du postdoctorat à l'Université de Madrid invité par E. Zuazua.

Dans [P06], j'ai étudié la propriété de contrôle exact vers zéro de l'équation de la chaleur comme limite quand $\varepsilon > 0$ tend vers zéro, de celui des ondes dissipatives dépendant du paramètre $\varepsilon > 0$. Ce résultat répond à un problème ouvert posé par A. Lopez, X. Zhang et E. Zuazua [LZZ].

Durant cette visite à l'Université de Madrid, E. Zuazua m'a donné un manuscrit de L. Escauriaza [E] sur la méthode de "doubling property" avec la quantité

$$N(r) = \frac{\int_{B_r} \left(|\nabla u(x,t)|^2 + |\partial_t u(x,t)|^2\right)\left(r^2 - t^2 - |x|^2\right) dxdt}{\int_{B_r} |u(x,t)|^2 dxdt} ,$$

comme la fonction fréquence en la variable r, où B_r est la boule de centre $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ et de rayon $r > 0$.

Lors du séjour au Center for Optimal Control and Discrete Mathematics à Wuhan (Chine), j'ai collaboré avec G. Wang sur différents problèmes de contrôle optimal. En particulier, nous nous sommes posés la question de savoir si une solution T-périodique en temps $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur avec un potentiel $q \in L^\infty(\Omega \times]0, T[)$, paire et T-périodique en temps, pouvait vérifier l'inégalité suivante

$$\|u(x,0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u(x,0)\|_{L^2(\omega)} .$$

Une réponse positive est donnée dans [P10] pour des potentiels q associés à des temps T adéquats. Cette propriété entraîne la propriété de continuation unique pour l'application de Poincaré. Nous avons employé la technique des inégalités de Carleman de A. Fursikov and O. Imanuvilov pour le Laplacien. De plus, la stabilisation de l'équation de la chaleur avec un potentiel $q(x,t)$ non nul est étudiée dans [P10] à partir d'un contrôle explicitement construit et vivant dans un sous-espace de dimension finie.

Dans les problèmes pratiques d'ingénierie, le contrôle est souvent soumis à des contraintes (par exemple, $|||g||| \leq 1$), mais avec un temps d'attente éventuellement grand. Si cela est possible à construire, alors le nombre de candidats est infini. Aussi, on ne s'intéressera qu'à ceux avec le plus petit temps de contrôlabilité. Les résultats désirés de contrôlabilité nécessitent alors une très bonne connaissance de leur coût. Nous recherchons à démontrer l'existence de solutions en contrôle optimal vis-à-vis du temps de contrôlabilité. Ce travail est en collaboration avec G. Wang et X. Zhang [P12]. Aussi, il s'agira de caractériser les contrôles optimaux que nous espérons bang-bang (i.e., $|||g||| = 1$).

Plus récemment, en contrat à l'Université de Sichuan jusqu'en mai 2008, j'ai collaboré avec X. Zhang sur les équations de Kirchhoff dans le cadre du retournement temporel [P14]. Le procédé de retournement temporel génère de réelles applications liées aux phénomènes ondulatoires. Nous avons présenté une stratégie pour reconstruire la donnée initiale pour les équations des plaques de Kirchhoff à partir d'une méthode itérative de retournement temporel. Parallèlement, nous établissons la stabilité de la convergence. Nous tenons compte de la condition de contrôle géométrique de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch liée aux solutions à haute fréquence. Mais aussi, en combinant la transformation de FBI et des inégalités de Carleman ponctuelles pour un système elliptique d'ordre 4, nous traitons le cas d'une géométrie sans condition particulière sauf connexe et régulière, et pouvant générer des rayons captifs.

8 Publications

[P01] K.-D. Phung, *Stabilisation frontière du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver-Müller*, C.R. Acad.Sci. Paris 320, I, (1995) 187-192.

[P02] K.-D. Phung, *Contrôlabilité exacte et stabilisation interne des équations de Maxwell*, C.R. Acad.Sci. Paris 323, I, (1996) 169-174.

[P03] K.-D. Phung, *Contrôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 5 (2000) 87-137.

[P04] K.-D. Phung, *Observability and control for Schrödinger equations*, SIAM J. Control Optim. 40, 1 (2001) 211-230.

[P05] K.-D. Phung, *Observability of the Schrödinger equation*, Carleman estimates and applications to uniqueness and control theory (Cortona, 1999), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 46, Birkhauser Boston, (2001) pp.165-177.

[P06] K.-D. Phung, *Null controllability of the heat equation as singular limit of the exact controllability of dissipative wave equation under the Bardos-Lebeau-Rauch geometric control condition*, Computers and Mathematics with Applications 44, 10-11 (2002) 1289-1296.

[P07] K.-D. Phung, *Remarques sur l'observabilité de l'équation de Laplace*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 9 (2003) 621-635.

[P08] K.-D. Phung, *Note on the cost of the approximate controllability for the heat equation with potential*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 295, 2 (2004) 527-538.

[P09] K.-D. Phung, *Stabilization of the incompressible 2D Euler equations in a simply connected domain utilizing the Lorentz force*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 293, 2 (2004) 389-404.

[P10] K.-D. Phung, G. Wang, *Quantitative uniqueness for time-periodic heat equation with potential and its applications*, Differential and Integral Equations 19, 6 (2006) 627-668.

[P11] K.-D. Phung, *Polynomial decay rate for the dissipative wave equation*, Journal of Differential Equations 240, (2007) 92-124.

[P12] K.-D. Phung, G. Wang, X. Zhang, *On the existence of time optimal controls for linear evolution equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B 8, 4 (2007) 925-941.

[P13] K.-D. Phung, 2007, *Boundary stabilization for the wave equation in a bounded cylindrical domain*, accepté dans Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A.

[P14] K.-D. Phung, X. Zhang, 2007, *Time reversal focusing of the initial state for Kirchhoff plate*, soumis à SIAM Journal of Applied Mathematics.

References

[AE] V. Adolfsson, L. Escauriaza, *$C^{1,\alpha}$ domains and unique continuation at the boundary*, Comm. Pure Appl. Math. 50, 3 (1997) 935-969.

[BLR] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim. 30, 5 (1992) 1024-1065.

[BdM] L. Boutet de Monvel, *Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger*, in Fourier Integral Operator and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, vol. 459, Springer, Berlin, (1975) pp.1-14.

[Bu] N. Burq, *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel*, Acta Math. 1980 (1998) 1-29.

[BG] N. Burq, P. Gérard, *Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes*, C. R. Acad. Sci. Paris t.325, série 1 (1997) 749-752.

[BH] N. Burq, M. Hitrik, *Energy decay for damped wave equations on partially rectangular domains*, Math. Res. Lett. 14 (2007) 35-47.

[CRV] B. Canuto, E. Rosset, S. Vessella, *Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations and inverse initial-boundary value problems with unknown boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2001) 491-535.

[E] L. Escauriaza, Communication to E. Zuazua.

[EFV] L. Escauriaza, F.J. Fernandez, S. Vessella, *Doubling properties of caloric functions*, Appl. Anal. 85, 1-3 (2006) 205-223.

[FI] A. Fursikov, O. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series, 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.

[FCZ] E. Fernandez-Cara, E. Zuazua, *The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case*, Adv. Differential Equations 5, 4-6 (2000) 465-514.

[GaL] N. Garofalo, F.H. Lin, *Monotonicity properties of variational integrals, A_p-weights and unique continuation*, Indiana Univ. Math. J. 35, 2 (1986) 245-268.

[GeL] P. Gérard, E. Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J. 71 (1993) 559-607.

[Ha] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. 51, 3 (1972) 477-485.

[Ho] L. Hörmander, *Fourier integral operators I*, Acta Math. 127 (1971) 79-183.

[Ic] W. Ichinose, *On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and Fourier integral operators*, J. Math. Kyoto Univ. 33, 3 (1993) 583-620.

[Ik] M. Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles*, Osaka J. Math. 19, 3 (1982) 459-509.

[JL] D. Jerison, G. Lebeau, *Nodal sets of sum of eigenfunctions*, Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996), Univ. Chicago Press, Illinois, (1999) pp.223-239.

[J] F. John, *Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960) 551-585.

[KS] L. Kapitanski, Y. Safarov, *Dispersive smoothing for Schrödinger equations*, Math. Res. Lett. 3, (1996) 77-91.

[KPV] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On unique continuation for nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Pure Appl. Math. 54 (2002) 1247-1262.

[Ko] V. Komornik, *Contrôlabilité exacte en un temps minimal*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 304, 9 (1987) 223-225.

[Ku] I. Kukavica, *Level sets for the stationary Ginzburg-Landau equation*, Calc. Var. 5 (1997) 511-521.

[Ku2] I. Kukavica, *Quantitative uniqueness for second order elliptic operators*, Duke Math. J. 91 (1998) 225-240.

[KN] I. Kukavica, K. Nyström, *Unique continuation on the boundary for Dini domains*, Proc. of Amer. Math. Soc. 126, 2 (1998) 441-446.

[Le] G. Lebeau, *Equation des ondes amorties*, in Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics, Math. Phys. Stud. 19, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996) pp.73-109.

[LeR] G. Lebeau, L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Part. Diff. Eq. 20 (1995) 335-356.

[LeR2] G. Lebeau, L. Robbiano, *Stabilisation de l'équation des ondes par le bord*, Duke Math. J. 86, 3 (1997) 465-491.

[LZ] G. Lebeau, E. Zuazua, *Null-controllability of a system of linear thermoelasticity*, Arch. Mech. Anal. 141, 4 (1998) 297-329.

[Lin] F.H. Lin, *A uniqueness theorem for the parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 43 (1990) 127-136.

[Lio] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribués*, 1, coll.RMA, Masson, Paris 1988.

[Lio2] J.-L. Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. 30 (1988) 1-68.

[LiR] Z. Liu, B. Rao, *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation*, Z. Angew. Math. Phys. 56 (2005) 630-644.

[LP] P.-L. Lions, T. Paul, *Sur les mesures de Wigner*, Revista Matematica Iberoamericana 9, 3 (1993) 553-618.

[LZZ] A. Lopez, X. Zhang, E. Zuazua, *Null controllability of the heat equation as singular limit of the exact controllability of dissipative wave equations*, J. Math. Pures et Applic. 79, 8 (2000) 741-808.

[LS] V. Lyashko, V. Semenov, *Controllability of linear distributed systems in classes of generalized action*, Cybernetic and Systems Analysis 37, 1 (2001) 13-32.

[MS] R. Melrose, J. Sjöstrand, *Singularities of boundary value problems I*, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) 593-617.

[Mi] L. Miller, *Escape function conditions for the observation, control and stabilization of the wave equation*, SIAM J. Control Optim. 41, 5 (2002) 1554-1566.

[Mi2] L. Miller, *How violent are fast controls for Schrödinger and plate vibrations?*, Arch. Rational Mech. Anal. 172 (2004) 429-456.

[Pau] R. Pauen, *Non-trapping conditions and local energy decay for hyperbolic problems*, Prépublication 2000, http://www.informatik.uni-konstanz.de/Schriften.

[Pay] L. Payne, *Improperly posed problems in partial differential equations*, CBMS Series, SIAM 1976.

[Ra] J. Ralston, *Gaussian beams and propagation of singularities*, in Studies in Partial Differential Equations, Littman éd., MAA studies in Mathematics, 23 (1982) pp.206-248.

[Ro] L. Robbiano, *Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques*, Comm. Part. Diff. Eq. 16 (1991) 789-800.

[Ro2] L. Robbiano, *Fonction de coût et contrôle des solutions des équations hyperboliques*, Asymptotic Analysis 10 (1995) 95-115.

[W] G. Wang, *A bang-bang principle of time optimal internal controls of the heat equation*, Prépublication 2006, http://www.arxiv.org/abs/math.OC/0612237.

[Z] X. Zhang, *Explicit observability inequalities for the wave equation with lower order terms by means of Carleman inequalities*, SIAM J. Control Optim. 30 (2000) 812-834.