



HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES EN MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue publiquement par :

Vittoria Pierfelice

le 13 février 2015

Titre :

**Autour de l'analyse harmonique et d'équations d'évolution
sur les variétés**

Après avis des rapporteurs :

M. **Michael Cowling** Professeur, University of New South Wales
Mme. **Isabelle Gallagher** Professeur, Université Paris Diderot
M. **Fabrice Planchon** Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis

Devant le jury composé de :

M. **Jean-Philippe Anker** Professeur, Université d'Orléans
M. **Michael Cowling** Professeur, University of New South Wales
Mme. **Isabelle Gallagher** Professeur, Université Paris Diderot
M. **Patrick Gérard** Professeur, Université Paris Sud
Mme. **Sandrine Grellier** Professeur, Université d'Orléans
M. **Giancarlo Mauceri** Professeur, Università di Genova
M. **Fabrice Planchon** Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis

" Per tre cose vale la pena di vivere : la matematica, la musica e l'amore "
(Renato Caccioppoli, 1904-1959)

*"... à toi, cher Lecteur,
qui prêtes attention
à ce mémoire "*

Remerciements

Rapporter un mémoire d'habilitation est toujours un travail conséquent. Un très grand merci à Michael Cowling, Isabelle Gallagher et Fabrice Planchon, c'est un grand honneur qu'ils aient accepté de rapporter ce mémoire.

J'ai rencontré plusieurs fois Michael Cowling, notamment à l'occasion de visites à Orléans et j'ai toujours apprécié nos discussions (en italien bien sûr !) et sa gentillesse. Ses travaux sur le phénomène de Kunze-Stein notamment ont été cruciaux dans mes recherches. Les travaux d'Isabelle Gallagher et de Fabrice Planchon sur les équations dispersives et de Navier-Stokes ont été aussi cruciaux et m'ont beaucoup apporté en nourrissant certaines de mes réflexions ; j'ai par ailleurs beaucoup apprécié les rapports détaillés qu'ils ont faits sur ce mémoire et je tiens à leur exprimer encore une fois toute ma reconnaissance.

J'ai eu le plaisir de rencontrer Giancarlo Mauceri lors des congrès italiens d'analyse harmonique, j'ai toujours beaucoup apprécié nos discussions et ses encouragements. Je le remercie d'avoir accepté de faire le déplacement pour être membre du jury. C'est un grand honneur pour moi.

A la fin de ma thèse, j'ai eu l'occasion de faire un séjour au laboratoire d'Orsay et de travailler avec Patrick Gérard. Sa culture mathématique et sa générosité m'ont énormément apporté et n'ont fait que renforcer jour après jour ma passion pour l'analyse et les équations aux dérivées partielles. Je lui dois beaucoup et je voudrais une fois encore lui exprimer toute mon admiration et ma reconnaissance, sa présence dans mon jury d'habilitation est un immense honneur.

Après mon passage à Orsay, j'ai eu la chance de trouver rapidement un poste de maître de conférences au MAPMO, le laboratoire de mathématiques de l'université d'Orléans. Mon intérêt pour les équations aux dérivées partielles via l'analyse harmonique m'a naturellement amenée à travailler avec Jean-Philippe Anker avec qui nous avons entrepris une série de travaux, de l'équation de Schrödinger à l'équation des ondes en passant par celle de Klein-Gordon. Si nous avons beaucoup travaillé dans notre bureau au laboratoire, je me souviens aussi du plaisir que nous avions à travailler ensemble à la Gallinette, un petit restaurant du centre-ville d'Orléans.

En plus de toute mon admiration professionnelle envers Sandrine Grellier, je tiens à remercier beaucoup Sandrine pour son amitié, sa bonne humeur quotidienne et ses éclats de rire. Ses conseils et son réconfort dans les moments plus difficiles que réserve forcément un travail de recherche m'ont toujours fait beaucoup de bien et aidée à aller de l'avant.

Enfin, c'est avec grand plaisir que je remercie sincèrement l'ensemble de mon laboratoire, mes collaborateurs et tous ceux qui m'ont encouragée et soutenue depuis la fin de ma thèse.

Bien entendu, je n'oublie pas ma famille et mes amis, sans qui rien de tout cela n'aurait été possible.

INTRODUCTION

Dans les trente dernières années, l'étude des propriétés dispersives des équations d'évolution linéaires et leurs applications aux équations non linéaires de la physique mathématique (parmi les plus importantes on peut citer l'équation de Schrödinger, l'équation des ondes, l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Navier-Stokes) constituent un "champ" de recherche en forte expansion et au carrefour de plusieurs domaines des mathématiques. Suite aux travaux de Strichartz, Bourgain, Tao..., certaines techniques d'analyse harmonique se sont avérées particulièrement performantes pour étudier ce type de questions. En effet, dans la théorie moderne de l'étude du caractère localement ou globalement bien posé d'un problème de Cauchy non-linéaire, l'outil commun est le rôle crucial joué par les propriétés dispersives du problème de Cauchy linéaire. Remarquons, toutefois qu'au vu de leurs structures différentes chacune de ces équations ouvre la voie à une direction de recherche indépendante et qui nécessite des outils à la fois d'analyse harmonique et d'EDP appropriés.

Mon activité de recherche se concentre sur l'étude des propriétés dispersives de ces équations d'évolution libres ou perturbées par des potentiels et aussi dans certains contextes non euclidiens.

Pendant ma thèse de Doctorat (à l'Université de Pisa), j'ai étudié la question suivante : si on perturbe une équation par un potentiel $V(t, x)$ ou $V(x)$ singulier, quelles sont les propriétés dispersives qui restent valides ? J'ai répondu à cela pour les équations des ondes, de Schrödinger et de la chaleur, dans le cas euclidien dans les travaux [251], [99], [247], [96], [98] ; ces résultats seront très brièvement décrits dans ce mémoire.

A la fin de ma thèse, j'ai commencé à m'intéresser à l'influence de la géométrie et notamment de la courbure de l'espace sur les propriétés dispersives de l'équation de Schrödinger et des ondes.

Pendant un séjour de quatre mois à Orsay, j'ai eu l'occasion d'étudier en collaboration avec Patrick Gérard l'équation de Schrödinger non-linéaire sur des variétés compactes de dimension 4 dont les sphères [153]. Dans ce contexte compact, une difficulté vient du fait que le spectre du Laplacien est discret, ce qui détruit les inégalités dispersives en temps grand. Cependant, ce n'est pas la seule difficulté, il y a aussi une influence de la courbure, la courbure positive degrade les inégalités de Strichartz en induisant une perte de dérivées. Puisque les inégalités de Strichartz usuelles n'étaient pas suffisantes pour traiter les problèmes non-linéaires considérés, nos résultats reposaient sur de nouvelles estimations multi-linéaires de type Strichartz pour le groupe de Schrödinger, en suivant la stratégie introduite par Bourgain.

D'autre part, j'avais aussi commencé à étudier le cas des espaces hyperboliques réels \mathbb{H}^n qui est le cas modèle des espaces symétriques de rang 1 et de type non-compact à courbure négative, où on s'attendait à des meilleures propriétés dispersives par rapport au cas plat.

Dans [252], j'avais étudié l'équation de Schrödinger sur les espaces hyperboliques \mathbb{H}^n perturbée par des potentiels $V(t, x)$ plus singuliers que sur \mathbb{R}^n , en établissant les estimations de Strichartz à poids radiales obtenues dans [21] dans le cas libre. Ces estimations étaient plus fortes que dans le cas euclidien, mais elles n'étaient pas complètement satisfaisantes car elles étaient locales en temps (sauf en dimension 3 où elles étaient globales en temps) et restreintes à des données initiales radiales.

A mon arrivée à l'Université d'Orléans, j'ai complété un autre résultat [253] où j'ai montré des estimations de Strichartz à poids (globales en temps) pour les équations de Schrödinger et

des ondes avec données initiales radiales sur les espaces de Damek-Ricci, qui sont des variétés riemanniennes non-compactes à courbure négative. Il est à noter qu'aussi bien tous les espaces symétriques de rang 1 que certains espaces non symétriques sont de type Damek-Ricci. Banica, Carles et Staffilani [23], à l'aide des estimations trouvées dans [253], ont obtenu des applications à des problèmes de Cauchy non-linéaires, en particulier pour le "scattering" de l'équation de Schrödinger dans le cas radial.

A partir de mon recrutement (MCF depuis septembre 2006), cette thématique de recherche a commencé à se développer au laboratoire MAPMO, où pour quelques temps j'ai animé un groupe de travail "analyse harmonique et EDP" et j'ai été co-encadrante du stage postdoctoral CNRS de Maria Vallarino (novembre 2007 - février 2009), de deux stages de mémoire de Master 2 et de la thèse de Doctorat d'Alaa Jamal Eddine soutenue en décembre 2013. D'ailleurs les Journées "Equations dispersives sur les variétés" (9–11 avril 2008) se sont situés aussi dans la perspective de développer ces thématiques et ont engendré une nouvelle dynamique au sein du laboratoire, impliquant notamment Jean-Philippe Anker et d'autres membres de l'équipe d'analyse harmonique.

Dans [6], Jean-Philippe Anker et moi avons obtenu des estimations de type Strichartz pour l'équation de Schrödinger sur les espaces hyperboliques réels sans la condition de radialité. Les estimations trouvées sont plus fortes que dans le cas plat et permettent d'obtenir de meilleures applications à des problèmes de Cauchy non-linéaires et de scattering. Indépendamment et à la même période, Ionescu et Staffilani [171] ont prouvé des résultats complémentaires avec un certain recouvrement. Dans [7], en collaboration avec Anker et Vallarino, on a généralisé les résultats de [6] aux espaces de Damek-Ricci. Cela nous a permis de montrer des estimations de type Strichartz pour l'équation de Schrödinger associée au Laplacien distingué, lié à la structure algébrique des espaces. On montre aussi que pour cette équation l'estimation dispersive $L^\infty - L^1$ n'est pas valable. D'autre part, cet opérateur a déjà fait l'objet d'investigations en analyse harmonique sur les groupes de Lie.

Ensuite, j'avais obtenu dans [249] des estimations dispersives (et de type Strichartz) pour l'équation de Schrödinger sur certains produits de variétés, pour lesquels on dispose des estimations dispersives de chaque facteur. Cela contient un cas d'espaces symétrique de rang 2, parmi les autres qui dépendent de la configuration du système des racines liée à la structure algébrique de l'espace symétrique.

A nouveau en collaboration avec Anker et Vallarino, on s'est intéressé à l'équation des ondes associée au translaté de l'opérateur de Laplace-Beltrami, appelé l'équation des ondes *shiftée* sur les espaces hyperboliques réels. Dans [12] et [11] nous avons montré des estimations dispersives et de type Strichartz, meilleures que dans le cas euclidien, pour cette équation. Dans ce cas aussi, les estimations de Strichartz se sont avérées particulièrement performantes pour traiter des problèmes de Cauchy non linéaires. Si la stratégie générale est semblable à celle développée pour étudier l'équation de Schrödinger, sa mise en oeuvre présente un degré de difficulté supérieur. Les inégalités dispersives et les estimations de Strichartz font en effet nécessairement intervenir des conditions de régularité, qui se traduisent par l'utilisation d'espaces de Sobolev, plus délicats à manipuler que les espaces de Lebesgue. Les estimations obtenues généralisent les résultats antérieurs de Tataru [292].

Dans [253], j'avais obtenu des estimations de Strichartz à poids pour l'équation des ondes associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les espaces de Damek-Ricci (et donc en particulier sur les espaces hyperboliques) avec des données initiales radiales. Cette équation des ondes *non shiftée* a été étudiée sur l'espace hyperbolique de dimension 3 aussi par Metcalfe et Taylor [227], qui ont montré des estimations dispersives et de type Strichartz. Dans [10] en collaboration avec Jean-Philippe Anker, on a complété cette étude en toute dimension en obtenant des estimations de Strichartz avec une admissibilité plus large que le cas euclidien et sans conditions de radialité sur les données initiales. On obtient des résultats analogues aussi pour l'équation de Klein-Gordon

sur l'espace hyperbolique.

En collaboration avec Piero D'Ancona (Université Roma La Sapienza) et Fulvio Ricci (Ecole Normale Supérieure Pisa), dans [97] nous avons obtenu des estimations dispersives pour l'équation de Schrödinger et des ondes associées au "twisted Laplacian". L'intérêt d'étudier cet opérateur vient aussi du fait qu'il peut se voir comme une perturbation du laplacien par un potentiel magnétique dans le cas plat. J'ajoute aussi que ce type de questions reste pratiquement totalement ouvert pour des perturbations plus générales, avec potentiel magnétique ou pour des équations à coefficients variables.

D'autre part, en collaboration avec Patrick Maheux (Université d'Orléans) et Piero D'Ancona, dans [95] on a montré des inégalités de type Log-Sobolev pour des produits semi-directs d'opérateurs. Ce résultat s'applique à des opérateurs bien connus comme les opérateur de type Grushin, ou par exemple aussi à certains produits semi-directs des opérateurs de Laplace-Beltrami, définis sur des variétés de type non-compact. Pour un choix thématique, je ne présenterai pas ce résultat dans le mémoire.

Les propriétés dispersives sont aussi très utilisées dans l'étude des équations paraboliques. Un système de type parabolique particulièrement étudié pour son importance en physique est celui de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles visqueux. Les résultats pour ce système sont encore partiels dans le cadre euclidien, la propagation globale de la régularité en dimension trois est l'un des "Millenium problems". Il a été observé récemment dans [87] que de nouveaux phénomènes de non unicité peuvent apparaître dans le cadre des variétés non-compactes en particulier les espaces hyperboliques de dimension 2. Dans [250], je me suis donc intéressée à l'étude de ce système sur des variétés non-compactes à courbure négative. Plus précisément, j'ai étudié les solutions mild à la Kato de celui-ci dans l'optique de montrer des résultats d'existence et d'unicité. Il y a un choix naturel qui permet de généraliser le système sur les variétés observé par Ebin-Marsden et Taylor ([112], [293]), ce choix est rendu nécessaire par le fait que pour écrire le système de Navier-Stokes, on doit utiliser un Laplacien sur les champs de vecteur. Il n'y a pas de choix canonique d'un tel objet sur une variété, des possibilités sont le Laplacien de Bochner, le Laplacien de Hodge etc... Pour ce problème, j'ai trouvé une formulation permettant d'espérer des résultats d'existence et d'unicité. J'ai ensuite démontré des estimations dispersives et "smoothing" pour la partie linéaire de l'équation mettant en jeu un Laplacien vectoriel et obtenu le caractère bien posé du système non-linéaire. La formulation proposée permet aussi de montrer l'existence de solutions faible d'énergie finie à la Leray et leur unicité sur des variétés de dimension 2.

Le mémoire est organisé comme suit : dans le premier chapitre, je vais rappeler des outils d'analyse harmonique sur les espaces symétriques de type non-compact pour mieux comprendre comment l'importante structure algébrique et géométrique permet d'avoir à disposition une analyse de Fourier suffisamment riche. En particulier, je donnerai plus de détails d'analyse sphérique et d'autres importantes propriétés de convolution sur l'espace hyperbolique réel qui est le modèle des espaces symétriques de rang 1 et de type non-compact. Je passerai ensuite à la généralisation non triviale des espaces de Damek-Ricci, en rappelant surtout les propriétés qu'on utilisera dans les travaux. Dans les autres chapitres, je m'intéresserai successivement aux équations de Schrödinger, des ondes (et de Klein-Gordon) et de Navier-Stokes. Je rappellerai à chaque fois des résultats classiques dans le cas euclidien, puis je présenterai des résultats dans le contexte de variétés non-compactes à courbure négative. Je donnerai aussi quelques perspectives de recherche au cours du texte.

Liste des travaux

- 1) [247] **Decay estimate for the wave equation with a small potential**, VITTORIA PIERFELICE - *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 13, 5-6, (2007), 511- 530.
- 2) [96] **On the wave equation with a large rough potential**, PIERO D'ANCONA, VITTORIA PIERFELICE - *Journal of Functional Analysis*, 227, (2005), 30-77.
- 3) [99] **Some remarks on the Schrödinger equation with a potential in $L_t^r L_x^s$** , PIERO D'ANCONA, VITTORIA PIERFELICE, NICOLA VISCHIGLIA - *Mathematische Annalen*, 333, 2, (2005), 271-290.
- 4) [98] **Dispersive estimate for the Schrödinger equation with point interaction**, PIERO D'ANCONA, VITTORIA PIERFELICE, ALESSANDRO TETA - *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 29, (2006), 309-323.
- 5) [251] **Strichartz estimates for the Schrödinger and heat equations perturbed with singular and time dependent potentials**, VITTORIA PIERFELICE - *Asymptotic Analysis*, 47, (1,2), (2006), 1-18.
- 6) [252] **Weighted Strichartz estimates for the radial perturbed Schrödinger equation on the hyperbolic space**, VITTORIA PIERFELICE - *Manuscripta Mathematica*, 120, 4, (2006), 377-389.
- 7) [253] **Weighted Strichartz estimates for the Schrödinger and wave equations on Damek-Ricci spaces**, VITTORIA PIERFELICE - *Mathematische Zeitschrift*, 260, 2, (2008), 377-392.
- 8) [153] **Nonlinear Schrödinger equation on four-dimensional compact manifolds**, PATRICK GÉRARD, VITTORIA PIERFELICE - *Bull. Soc. Math. France*, 138, 1, (2010), 119-151.
- 9) [6] **The nonlinear Schrödinger equation on real hyperbolic spaces**, JEAN-PHILIPPE ANKER, VITTORIA PIERFELICE - *Ann. Inst. H. Poincaré - Anal. Non Linéaire*, 26, (2009), 1853-1869.
- 10) [97] **On the Wave equation associated to the Hermite and the Twisted Laplacian**, PIERO D'ANCONA, VITTORIA PIERFELICE, FULVIO RICCI - *J. Fourier Anal. Appl.*, 16, 2, (2010), 294-310.
- 11) [7] **Schrödinger equations on Damek–Ricci spaces**, JEAN-PHILIPPE ANKER, VITTORIA PIERFELICE, MARIA VALLARINO - *Communications in Partial Differential Equations*, 36, 6, (2011), 976-997.
- 12) [12] **Wave equation on real hyperbolic spaces**, JEAN-PHILIPPE ANKER, VITTORIA PIERFELICE, MARIA VALLARINO - *Journal of Differential Equations*, 252, 10, (2012), 5613-5661.
- 13) [11] **Wave equation on Damek–Ricci spaces**, JEAN-PHILIPPE ANKER, VITTORIA PIERFELICE, MARIA VALLARINO - accepté pour publication dans *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (2013) doi : 10.1007/s10231-013-0395-x.
- 14) [10] **Wave and Klein-Gordon equations on hyperbolic spaces**, JEAN-PHILIPPE ANKER, VITTORIA PIERFELICE - *Analysis & PDE* 7, 4, (2014), 953-995.
- 15) [249] **Dispersive estimates on product manifolds**, VITTORIA PIERFELICE - soumis pour publication (2013).
- 16) [95] **Log-Sobolev inequalities for semi-direct product operators**, PIERO D'ANCONA, PATRICK MAHEUX, VITTORIA PIERFELICE - soumis pour publication (2014).
- 17) [250] **The incompressible Navier-Stokes equations on noncompact manifolds**, VITTORIA PIERFELICE - soumis pour publication (2014).
- 18) [248] **Dispersive estimates for the wave and Schrödinger Equations with potentials of critical decay in higher dimension**, VITTORIA PIERFELICE, en préparation.

TABLE DES MATIÈRES

1. Quelques outils d'analyse harmonique en géométrie de courbure négative	15
1.1 Espaces symétriques	15
1.2 Analyse sphérique sur les espaces hyperboliques réels	19
1.3 Espaces de Damek–Ricci	24
2. Equation de Schrödinger	33
2.1 Le cadre euclidien \mathbb{R}^n	34
2.1.1 Propriétés dispersives	34
2.1.2 Applications au problème de Cauchy	39
2.2 Equation de Schrödinger sur variétés non-compactes	45
2.2.1 Propriétés dispersives sur les espaces hyperboliques $M = \mathbb{H}^n$	45
2.2.2 Applications	52
2.3 Propriétés dispersives sur les espaces de Damek–Ricci $M = S$	56
2.3.1 Estimations de Strichartz à poids globales sur $M = S$	57
2.3.2 Estimations ponctuelles du noyau de $e^{\tau \Delta_S}$	64
2.3.3 Estimations de Strichartz sans poids sur $M = S$	67
2.3.4 Application : l'équation de Schrödinger associée à \mathcal{L}	70
2.4 Perspectives	74
3. Equation des ondes	77
3.1 Le cadre euclidien \mathbb{R}^n	77
3.1.1 Propriétés dispersives	77
3.1.2 Estimations dispersives pour l'équation des ondes associée au "Laplacien twisté"	82
3.1.3 Applications au problème de Cauchy	86
3.2 Equations des ondes sur variétés non-compactes	89
3.2.1 Equation des ondes "shiftée" sur les espaces hyperboliques	89
3.2.2 Estimations du noyau	90
3.2.3 Estimations dispersives	95
3.2.4 Estimations de Strichartz	97
3.2.5 Equation des ondes "non-shiftée" sur les espaces hyperboliques	100
3.2.6 Estimations de $w_t^0 = w_t^{\sigma,0}$	104
3.2.7 Estimation de $\tilde{w}_t^\infty = \tilde{w}_t^{\sigma,\infty}$	105
Applications	108
3.3 Perspectives	130
4. L'équation de Navier-Stokes en courbure négative	135
4.1 Les équations de Navier-Stokes sur \mathbb{R}^n	135
4.2 Quelques rappels de géométrie riemannienne	137
4.2.1 Connections	137
4.2.2 Courbures	138

4.2.3	Métrique sur les tenseurs	138
4.2.4	Cordonnées normales	139
4.2.5	Quelques formules géométriques utiles	139
4.2.6	Analyse fonctionnelle sur les variétés non-compactes	140
4.3	L'équation de Navier-Stokes sur les variétés	141
4.4	Estimations dispersives et de régularisation	144
4.4.1	Le cas des équations de la chaleur vectorielles	144
4.4.2	Démonstration du théorème 4.4.1	146
4.4.3	Preuve du théorème 4.4.2	148
4.4.4	Le cas du système de Stokes	150
4.5	Théorèmes de type Fujita-Kato sur variétés	151
4.5.1	Le cas des variétés d'Einstein à courbure négative	151
4.5.2	Le cas général	152
4.6	Perspectives	153

1. QUELQUES OUTILS D'ANALYSE HARMONIQUE EN GÉOMÉTRIE DE COURBURE NÉGATIVE

On va rappeler quelques faits classiques à propos des espaces symétriques riemanniens de type non-compact $X = G/K$. Des références classiques concernant la structure et l'analyse harmonique de ces espaces sont [129], [158], [161], [160], [197], [198].

1.1 Espaces symétriques

Soient G un groupe de Lie semi-simple non-compact connexe à centre fini et K un sous groupe compact maximal de G . Soient \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de K . La décomposition de Cartan (au niveau des algèbres de Lie) de \mathfrak{g} s'écrit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$$

où \mathfrak{p} est le complémentaire orthogonal de \mathfrak{l} dans \mathfrak{g} relativement à la forme de Killing de \mathfrak{g}

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, (X, Y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

et ad est la différentielle de l'action adjointe Ad_G de G . Soit θ l'involution de Cartan correspondante, c'est-à-dire θ est un automorphisme de \mathfrak{g} tel que $\theta^2 = id$ et \mathfrak{l} (respect. \mathfrak{p}) est un sous espace propre de θ pour la valeur propre 1 (respect -1). Puisque la forme de Killing de \mathfrak{g} est non dégénérée, elle induit un produit scalaire G -invariant sur \mathfrak{g}

$$\langle X, Y \rangle = -B(X, \theta(Y)) \tag{1.1}$$

qui est défini positif sur \mathfrak{p} et négatif sur \mathfrak{l} . Ainsi (1.1) induit une structure riemannienne sur l'espace $X = G/K$. En effet, cet espace est un *espace symétrique riemannien de type non-compact*, dont l'espace tangent à l'origine $0 = eK$ est identifié à \mathfrak{p} . De plus, la forme de Killing permet d'identifier \mathfrak{g} avec son espace dual \mathfrak{g}^* et aussi les sous espaces de \mathfrak{g} avec ceux de \mathfrak{g}^* .

Soit \mathfrak{a} un sous espace abélien maximal de \mathfrak{p} et \mathfrak{a}^* son espace dual. La dimension réelle de \mathfrak{a} définit le rang réel de G et on pose $\ell = \dim(\mathfrak{a}) = \text{rank}_{\mathbb{R}}(G)$. Pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, on pose $\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g} | [H, Y] = \alpha(H)Y, \forall H \in \mathfrak{a}\}$. On définit alors Σ l'ensemble des racines restreintes de \mathfrak{g} à \mathfrak{a}

$$\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* | \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}.$$

Les racines sont donc par conséquent les valeurs propres communes de la famille commutative d'opérateurs auto-adjoints $\{\text{ad}(H) | H \in \mathfrak{a}\}$ de \mathfrak{g} . Soit \mathfrak{m} le centralisateur de \mathfrak{a} dans \mathfrak{l} , on a alors la décomposition suivante en l'espace des racines de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{a}

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \{\oplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha\}.$$

Remarquons que \mathfrak{g}_α est un sous-espace vectoriel réel de \mathfrak{g} et sa dimension $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = m_\alpha$, où m_α est la multiplicité des racines α . L'ensemble des éléments $H \in \mathfrak{a}$ pour lesquelles $\alpha(H) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma$ est le complémentaire dans \mathfrak{a} d'une union finie d'hyperplans : chacune des composantes

connexes est un cône convexe ouvert, appelé chambre de Weyl. On fixe une composante connexe positive \mathfrak{a}_+ dans \mathfrak{a} , appelée chambre de Weyl positive, et on pose $\Sigma_+ = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H) > 0 \forall H \in \mathfrak{a}_+\}$ qui est donc l'ensemble correspondant des racines restreintes positives. De plus, on définit $\Sigma_+^0 = \{\alpha \in \Sigma^+ \mid \alpha/2 \notin \Sigma^+\}$ l'ensemble des racines non divisibles dans Σ_+ . On définit la sous algèbre nilpotente \mathfrak{n} de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} par

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Soit $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma_+} m_\alpha \alpha$ la demi-somme des racines restreintes positives comptées avec leurs multiplicités $m_\alpha = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ et $n = \ell + \sum_{\alpha \in \Sigma_+} m_\alpha$ la dimension de $X = G/K$. La décomposition d'Iwasawa de l'algèbre \mathfrak{g} est

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Soit $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application exponentielle; ainsi $A = \exp \mathfrak{a}$, $N = \exp \mathfrak{n}$ et M désigne le centralisateur de A dans K (i.e. $M = \{k \in K \mid ka = ak \text{ : } \forall a \in A\}$). Soit M' le normalisateur de A dans K et $W = M'/M$ le groupe de Weyl de G . Le groupe W agit linéairement sur \mathfrak{a} par $(s\lambda)(H) = \lambda(s^{-1} \cdot H)$ pour $H \in \mathfrak{a}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et $s \in W$, où $g \cdot X = Ad(g)X$ pour $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$. Soit $|W|$ l'ordre de W . Alors la décomposition correspondante au niveau du groupe de Lie G est

$$G = KAN,$$

où A et N sont deux sous groupes analytiques de G d'algèbres de Lie \mathfrak{a} et \mathfrak{n} respectivement. Soit $\bar{\mathfrak{a}}_+$ la fermeture de la chambre de Weyl \mathfrak{a}_+ . La décomposition de Cartan de G , s'écrit alors

$$G = K \exp(\bar{\mathfrak{a}}_+) K.$$

En termes de décomposition d'Iwasawa $KAN \simeq NAK$ de G , on écrit :

$$g \in K \exp(H(g)) N, \quad g \in N \exp(A(g)) K,$$

où $A(g)$ et $H(g)$ sont uniquement déterminés et tels que

$$A(g) = -H(g^{-1}).$$

On a alors la formule intégrale suivante sur X

$$\int_X dx f(x) = \int_{A \times N} da dn f(an \cdot o), \tag{1.2}$$

où da, dn sont les mesures de Haar sur A, N respectivement.

Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . Les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ agissent sur l'espace $C^\infty(G)$ comme des opérateurs différentiels à droite et à gauche. On considère ici, comme d'habitude, les fonctions sur X comme les fonctions K -invariantes à droite sur G et on utilise la notation suivante pour les actions à droite de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur $C^\infty(G)$

$$f(x : X_1 \cdots X_r) = \partial_{t_1}|_{t_1=0} \cdots \partial_{t_r}|_{t_r=0} f(x e^{t_1 X_1} \cdots e^{t_r X_r}),$$

pour tout $x \in G$ et $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$. Soit (X_j) une base de \mathfrak{g} , soit $b_{jk} = B(X_j, X_k)$ et (b^{jk}) la matrice inverse de b_{jk} . Alors $\Omega = \sum_{j,k} b^{jk} X_j X_k$ est l'élément de Casimir dans le centre de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On considère, en particulier, les bases orthonormales (Y_j) et (Z_k) de \mathfrak{p} et \mathfrak{l} par rapport à (1.1), donc

$$\Omega = \Omega_{\mathfrak{p}} - \Omega_{\mathfrak{l}}, \quad \text{avec} \quad \Omega_{\mathfrak{p}} = \sum_j Y_j^2, \quad \Omega_{\mathfrak{l}} = \sum_k Z_k^2.$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami sur $X = G/K$ peut être retrouvé par l'action de l'élément de Casimir :

$$\Delta f(xK) = f(x : \Omega) = f(x : \Omega_{\mathfrak{p}}), \quad \forall x \in G.$$

De manière générale, l'analyse harmonique L^2 sur $X = G/K$ peut être résumé par la formule de Plancherel

$$(L_X, L^2(X)) \cong \int_{\mathfrak{a}^+}^{\oplus} \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} (\pi_\lambda, H_\lambda) \quad (1.3)$$

qui exprime la décomposition de la représentation régulière gauche de G sur $L^2(X)$ en séries principales sphériques. On rappelle que

- π_λ est réalisé sur $H_\lambda = L^2(K/M)$ par

$$\{\pi_\lambda(x)\xi\}(kM) = e^{\langle \rho + i\lambda, A(k^{-1}x) \rangle} \xi(x^{-1}.kM);$$

- la mesure de Plancherel s'exprime à l'aide de la fonction c de Harish-Chandra et cette fonction a été calculée explicitement par Gindikin et Karpelevic [135] ;
- la décomposition (1.3) est réalisée par la transformée de Fourier (dite transformée de Fourier-Helgason)

$$\mathcal{H}f(\lambda, kM) = \int_G dx f(x) \{\pi_\lambda(x)\mathbf{1}\}(kM) = \int_G dx f(x) e^{\langle \rho + i\lambda, A(k^{-1}x) \rangle} \quad (1.4)$$

et son inverse

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \langle \mathcal{H}f(\lambda), \pi_\lambda(x)\mathbf{1} \rangle_{L^2(K/M)} = \\ &\quad \text{const.} \int_{\mathfrak{a}} \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \int_K dk \mathcal{H}f(\lambda, kM) e^{\langle \rho - i\lambda, A(k^{-1}x) \rangle}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dans le cas où f est K -biinvariant sur G (i.e. $f(g) = f(k_1 g k_2)$, pour tous $g \in G, k_1, k_2 \in K$) la décomposition (1.3) se réduit à

$$L^2(K \backslash G / K) \cong L^2(\mathfrak{a}, \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2})^W,$$

où $L^2(\mathfrak{a}, \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2})^W$ désigne les fonctions de carré intégrable sur \mathfrak{a} invariantes par l'action du groupe de Weyl W . Quant aux transformées intégrales (1.4) et (1.5), elles se réduisent aux transformées de Fourier sphériques

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_G dg f(g) \varphi_\lambda(g) \quad (1.6)$$

et à la formule d'inversion

$$f(x) = \text{const.} \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \mathcal{H}f(\lambda) \varphi_{-\lambda}(x), \quad (1.7)$$

Pour cette transformation de Fourier sphérique, il existe un théorème analogue à celui de Paley-Wiener concernant la transformation de Fourier usuelle. Remarquons que ces formules font apparaître les importantes fonctions sphériques (K -invariantes à gauche)

$$\varphi_\lambda(x) = \langle \pi_\lambda(x)\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle_{L^2(K/M)} = \int_K dk e^{\langle \rho + i\lambda, A(kx) \rangle}. \quad (1.8)$$

Harish-Chandra donne une description des fonctions sphériques dans [154] et leur comportement à l'infini permet d'expliciter la fonction c de Harish-Chandra. La théorie des fonctions sphériques

sur les espaces symétriques est le résultat de l'imbrication entre la théorie analytique des fonctions spéciales et la théorie géométrique des représentations des groupes de Lie. Les premiers pas dans la théorie des fonctions sur les espaces symétriques sont apparus au début du siècle dernier dans les travaux de Elie Cartan et Hermann Weyl. Les fonctions sphériques ne sont cependant apparues que dans les années 50 en conjonction avec l'étude des représentations des groupes de Lie semi-simples non-compacts. Bien qu'elles soient déjà présentes dans les travaux de Godement, Gelfand et collaborateurs, la théorie des fonctions sphériques sur les espaces symétriques riemanniens non-compacts est aujourd'hui communément désignée comme la théorie de Harish-Chandra, qui a mené cette théorie à un stade presque complet. Nous arrêtons ici pour le cas général, nous utiliserons des formules explicites de cette théorie dans le cas de certains espaces symétriques de rang 1.

Remarquons aussi, qu'en utilisant (1.8), la décomposition d'Iwasawa de G et la biinvariance de f par K , il est possible de factoriser la transformée sphérique de Fourier

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & = & \mathcal{F} \circ \mathcal{A}, \\ & & \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W \\ \mathcal{H} \nearrow & & \nwarrow \mathcal{F} \\ \mathcal{S}(K \backslash G / K)^W & \xrightarrow[\mathcal{A}]{} & \mathcal{S}(\mathfrak{a})^W \end{array}$$

où \mathcal{A} est la transformée d'Abel

$$\mathcal{A}f(H) = e^{-\langle \rho, H \rangle} \int_N dn f(ne^H) = e^{\langle \rho, H \rangle} \int_N dn f(e^H n), \quad \forall H \in \mathfrak{a} \quad (1.9)$$

et \mathcal{F} est la transformée de Fourier euclidienne sur A

$$\mathcal{F}h(\lambda) = \int_A dH h(H) e^{-i\langle \lambda, H \rangle}.$$

De plus le diagramme est commutatif et chaque flèche est un isomorphisme topologique. On verra dans les cas des espaces hyperboliques et des espaces de Damek-Ricci, une expression explicite de cette transformée qui nous permettra de calculer aussi les transformées d'Abel inverse, qui joueront un rôle crucial dans l'étude des noyaux des solutions des équations dispersives sur ces espaces. Bien sûr, on peut généraliser cette transformée aussi à des espaces symétriques de rang quelconque, mais les calculs deviennent plus compliqués. Pour plus de détails voir le survey de Sawyer ([264]).

Dans la suite on utilisera un ingrédient clé concernant le produit de convolution sur G/K , qui est une version optimale du phénomène de Kunze-Stein. On rappelle d'abord que le produit de convolution de deux fonctions f_1 et f_2 sur G est défini par

$$f_1 * f_2(g) = \int_G dh f_1(h) f_2(h^{-1}g),$$

si l'intégrale ci-dessus converge. La question étudiée est : soit G un groupe (localement compact) unimodulaire, pour quels réels p , q , et r , a-t-on l'inclusion suivante

$$L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G)?$$

Dans le cas classique euclidien $G = \mathbb{R}^n$, c'est la fameuse inégalité de Young

$$L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G) \text{ si et seulement si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1.$$

Lorsque G est un groupe de Lie semi-simple (non-compact, centre fini) on a un nouveau phénomène qui apparaît et qui donne de meilleures propriétés de convolution par rapport au cas classique : c'est le phénomène de Kunze-Stein

$$L^2(G) * L^p(G) \subseteq L^2(G), \quad 1 \leq p < 2.$$

La première version de ce phénomène est donné par Kunze et Stein (1960) [206] dans le cas où $G = SL(2, \mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire des matrices réelles carrées d'ordre 2 et de déterminant 1. En 1969 Lipsman le montre dans le cas de $G = SO(n, 1)$ (voir [217]). Ensuite, en 1975 Eymard et Lohoué couvrent le cas des groupes de Lie connexe semi-simple G avec centre fini et les noyaux K -invariants ([220]). En 1978, Cowling dans [70] généralise cette propriété au cas d'un groupe de Lie G semi-simple connexe et de centre fini. Voir aussi [167].

Remarque 1.1.1 *Cette version standard a été développée et améliorée en une version optimale par Cowling-Meda-Setti [72], Lohoué-Rychener [220] et Ionescu [169], en faisant l'extension aux espaces de Lorentz sur G , lorsque G est groupe de Lie semi-simple connexe de rang 1 avec centre fini. Plus précisément, on a :*

$$L^{p,a}(G) * L^{p,b}(G) \subset L^{p,c}(G) \quad 1 < p < 2, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \geq 1,$$

où $L^{r,s}(G)$ sont les espaces de Lorentz sur G et le cas limite

$$L^{2,1}(K \backslash G) * L^{2,1}(G) \subset L^{2\infty}(G)$$

En particulier, on peut en déduire aussi

$$L^{q'}(K \backslash G) * L^{q'}(G/K) \subset L^{q',\infty}(K \backslash G/K) \quad \forall q > 2,$$

ça veut dire donc qu'il existe $C_q > 0$ tel que

$$\|f * g\|_{L^{q',\infty}} \leq C_q \|f\|_{L^{q'}} \|g\|_{L^{q'}} \quad \forall f \in L^{q'}(K \backslash G), \quad g \in L^{q'}(G/K).$$

Donc par dualité on obtient aussi la propriété suivante, qui jouera un rôle cruciale dans la suite

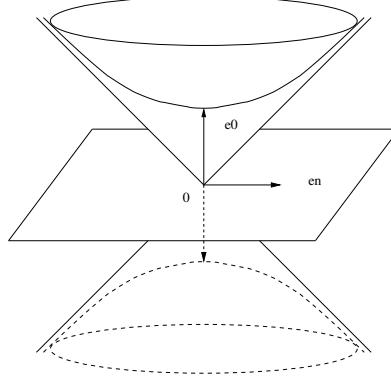
$$L^{q'}(G/K) * L^{q,1}(K \backslash G/K) \subset L^q(G/K) \quad \forall q > 2. \quad (1.10)$$

1.2 Analyse sphérique sur les espaces hyperboliques réels

On va considérer maintenant la classe la plus simple d'espace symétrique de type non-compact, c'est-à-dire les espaces hyperboliques réels \mathbb{H}^n de dimension $n \geq 2$ et on va rappeler quelques outils d'analyse sphérique qu'on utilisera dans la suite. On renvoie aux livres de Helgason [158, 161, 160] et l'article de Koornwinder [203] pour une étude plus approfondie de leur structure algébrique et de leurs propriétés géométriques, ainsi que de l'analyse harmonique sur ces espaces. Il y a plusieurs modèles classiques de géométrie hyperbolique, on va se concentrer ici sur celui de la branche supérieure de l'hyperboloïde ; deux autres modèles bien connus sont celui de la boule et celui du demi-espace.

On rappelle que \mathbb{H}^n peut être réalisé comme la branche supérieure

$$\begin{cases} x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = 1, \\ x_0 \geq 1, \end{cases}$$



de l'hyperboloïde dans \mathbb{R}^{1+n} , muni de la métrique riemannienne (qui est la restriction de la forme de Lorentz $[x, y] = x^0y^0 - x^1y^1 - \dots - x^ny^n$ sur \mathbb{R}^{1+n})

$$d\ell^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

On peut paramétriser l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n avec des coordonnées polaires (ou radiales) sous la forme

$$\{x = (x^0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n | (x^0, y) = (\cosh r, (\sinh r) \omega), r \geq 0, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\},$$

avec la métrique riemannienne

$$d\ell^2 = dr^2 + (\sinh r)^2 d\ell_{\mathbb{S}^{n-1}}^2,$$

le volume riemannien est

$$dv = (\sinh r)^{n-1} dr dv_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami sur \mathbb{H}^n s'écrit

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \partial_r^2 + (n-1) \coth r \partial_r + \sinh^{-2} r \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

La distance d'un point x dans ces coordonnées à l'origine $\mathbf{0} = (1, 0, \dots, 0)$ de \mathbb{H}^n est

$$d(x, \mathbf{0}) = r.$$

Plus généralement, en faisant appel aux isométries de l'espace hyperbolique, on a la distance entre deux points arbitraires de \mathbb{H}^n

$$d(x, y) = \cosh^{-1}([x, y]).$$

On peut identifier cet espace à un espace homogène G/K , avec $G = \mathrm{SO}(1, n)$ et $K = \mathrm{SO}(n)$. En effet, soit $G = \mathrm{SO}(1, n)$ le groupe de Lie connexe des transformations linéaires de \mathbb{R}^{1+n} de déterminant 1 qui préservent la forme de Lorentz. Dit autrement, $X \in \mathrm{SO}(1, n)$ si et seulement si

$${}^t X \cdot I_{1,n} \cdot X = I_{1,n}, \quad \det X = 1, \quad X_{0,0} > 0,$$

où $I_{1,n} = \mathrm{diag}[-1, 1, \dots, 1]$. Soit $K = \mathrm{SO}(n)$ le sous groupe de $\mathrm{SO}(1, n)$ qui fixe l'origine $\mathbf{0} = (1, 0, \dots, 0)$ de \mathbb{H}^n . Clairement $\mathrm{SO}(n)$ est le groupe compact des rotations agissant sur les variables (x^1, \dots, x^n) . Le groupe semi-simple de Lie G agit transitivement sur \mathbb{H}^n et l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n peut être donc identifié avec l'espace homogène $\mathbb{H}^n = \mathrm{SO}(1, n)\mathbf{0} \approx \frac{\mathrm{SO}(1, n)}{\mathrm{stab}\mathbf{0}} \approx \frac{\mathrm{SO}(1, n)}{\mathrm{SO}(n)}$. On peut définir aussi le sous groupe commutatif A de G

$$A := \{a_s = \begin{bmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$$

et la décomposition de Cartan est

$$G = KA_+K, \quad A_+ = \{a_s \mid s \in \mathbb{R}^+\}.$$

On normalise, comme d'habitude, les mesures de Haar sur K et G de sorte que $\int_K 1 dk = 1$ et pour tout $f \in C_c(\mathbb{H}^n)$

$$\int_G f(g \cdot \mathbf{0}) dg = \int_{\mathbb{H}^n} f(x) dv.$$

Les fonctions sphériques φ_λ sur \mathbb{H}^n sont les fonctions propres radiales normalisées de $\Delta_{\mathbb{H}^n}$:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n} \varphi_\lambda = -(\lambda^2 + \rho^2) \varphi_\lambda, \\ \varphi_\lambda(0) = 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\rho = \frac{n-1}{2}$. Elles peuvent s'exprimer en termes de fonctions spéciales :

$$\varphi_\lambda(r) = \phi_\lambda^{(\frac{n}{2}-1, -\frac{1}{2})}(r) = {}_2F_1\left(\frac{\rho}{2} + i\frac{\lambda}{2}, \frac{\rho}{2} - i\frac{\lambda}{2}; \frac{n}{2}; -\sinh^2 r\right),$$

où $\phi_\lambda^{(\alpha, \beta)}$ désigne les fonctions de Jacobi et ${}_2F_1$ la fonction hypergéométrique de Gauss.

Dans la suite on utilisera les représentations intégrales de Harish-Chandra

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(r) &= \int_K dk e^{-(\rho+i\lambda) H(a_r k)} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{n-2} (\cosh r - \sinh r \cos \theta)^{-\rho-i\lambda} \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{n-3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} (\sinh r)^{2-n} \int_{-r}^{+r} du (\cosh r - \cosh u)^{\frac{n-3}{2}} e^{-i\lambda u}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

qui impliquent en particulier

$$|\varphi_\lambda(r)| \leq \varphi_0(r) \lesssim (1+r) e^{-\rho r} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, r \geq 0. \tag{1.12}$$

On utilisera aussi le développement de Harish-Chandra

$$\varphi_\lambda(r) = \mathbf{c}(\lambda) \Phi_\lambda(r) + \mathbf{c}(-\lambda) \Phi_{-\lambda}(r) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, r > 0, \tag{1.13}$$

où la fonction \mathbf{c} d'Harish-Chandra est donnée par

$$\mathbf{c}(\lambda) = \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(i\lambda + \rho)} \tag{1.14}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(r) &= (2 \sinh r)^{i\lambda - \rho} {}_2F_1\left(\frac{\rho}{2} - i\frac{\lambda}{2}, -\frac{\rho-1}{2} - i\frac{\lambda}{2}; 1 - i\lambda; -\sinh^{-2} r\right) \\ &= (2 \sinh r)^{-\rho} e^{i\lambda r} \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma_k(\lambda) e^{-2kr} \\ &\sim e^{(i\lambda - \rho)r} \quad \text{lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Il est bien connu qu'il existe $\nu > 0$, $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon$, les coefficients du développement ci-dessus sont majorés par

$$|\Gamma_k(\lambda)| \leq C (1+k)^\nu.$$

Il nous a fallu améliorer cette estimation en élargissant son domaine de validité, en estimant les dérivées des Γ_k et en gagnant de la décroissance supplémentaire en λ pour $k \in \mathbb{N}^*$. La formule de récurrence suivante

$$\begin{cases} \Gamma_0(\lambda) = 1 \\ \Gamma_k(\lambda) = \frac{\rho(\rho-1)}{k(k-i\lambda)} \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) \Gamma_j(\lambda). \end{cases}$$

nous a permis d'obtenir :

Lemma 1.2.1 Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $\Omega_\varepsilon = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} \lambda| \leq \varepsilon |\lambda|, \operatorname{Im} \lambda \leq -1 + \varepsilon \}$. Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe $C_\ell > 0$ tel que

$$|\partial_\lambda^\ell \Gamma_k(\lambda)| \leq C_\ell k^\nu (1+|\lambda|)^{-\ell-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon. \quad (1.16)$$

Rappelons encore une fois que les fonctions K -biinvariantes sur G correspondent aux fonctions radiales sur $G/K = \mathbb{H}^n$ (i.e. $f(x) = f(r)$, où $r = d_{\mathbb{H}^n}(x, \mathbf{0})$). Dans le cas de l'espace hyperbolique $G/K = \mathbb{H}^n$, on peut alors réécrire la transformée sphérique de Fourier d'une fonction K -biinvariante sur G , définie par (1.6), comme

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^n} dx f(x) \varphi_\lambda(x) = \frac{2^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} dr \left(\sinh \frac{r}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} f(r) \varphi_\lambda(r)$$

et la formule d'inversion

$$f(x) = \text{const.} \int_0^{+\infty} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \mathcal{H}f(\lambda) \varphi_{-\lambda}(x). \quad (1.17)$$

Voici aussi la formule de Plancherel

$$\|f\|_{L^2}^2 = \text{const.} \int_0^{+\infty} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} |\mathcal{H}f(\lambda)|^2,$$

où on peut majorer la densité de Plancherel par

$$|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lesssim |\lambda|^2 (1+|\lambda|)^{n-3} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Dans la suite on utilisera la factorisation de la transformée de Fourier sphérique sur \mathbb{H}^n , $\mathcal{H} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \circ \mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R})_{\text{even}} & & \\ \mathcal{H} \nearrow & & \nwarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \\ \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)_{\text{rad}} & \xrightarrow[\mathcal{A}]{} & \mathcal{S}(\mathbb{R})_{\text{even}} \end{array}$$

où $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est la transformée de Fourier sur \mathbb{R} et \mathcal{A} désigne la transformée d'Abel

$$\mathcal{A}f(r) = C \int_r^{+\infty} ds \sinh s (\cosh s - \cosh r)^{\frac{n-3}{2}} f(s)$$

On utilisera aussi la factorisation inverse suivante $\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R})_{\text{even}} & & \\ \mathcal{H}^{-1} \swarrow & & \searrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1} \\ \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)_{\text{rad}} & \xleftarrow[\mathcal{A}^{-1}]{} & \mathcal{S}(\mathbb{R})_{\text{even}} \end{array}$$

où la transformée inverse d'Abel sur \mathbb{H}^n est :

$$\mathcal{A}^{-1}g(r) = \text{const.} \left(-\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{\frac{n-1}{2}} g(r). \quad (1.19)$$

Si n est impair, le côté droit dans la formule s'interprète comme un opérateur différentiel ordinaire. Si n est pair, les dérivées fractionnelles doivent être interprétées comme :

$$\left(-\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{\frac{n-1}{2}} g(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_r^{+\infty} ds \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} \left(-\frac{1}{\sinh s} \right)^{\frac{n}{2}} g(s). \quad (1.20)$$

Espaces de Sobolev sur \mathbb{H}^n

On rappelle brièvement les définitions et notations qui interviendront dans l'étude des propriétés dispersives de l'équation des ondes sur l'espace hyperbolique (*non shiftée* et *shiftée*) dans le paragraphe 3.2. Pour plus de détails on réfère par exemple aux textes classiques [156], [299] concernant les espaces fonctionnels sur les variétés riemanniennes.

Soit $1 < q < \infty$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. Par définition, l'espace de Sobolev sur l'espace hyperbolique $H_q^\sigma(\mathbb{H}^n)$ est l'image de $L^q(\mathbb{H}^n)$ par $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^{-\frac{\sigma}{2}}$ (en tant que distributions sur \mathbb{H}^n), muni de la norme

$$\|f\|_{H_q^\sigma} = \|(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^{\frac{\sigma}{2}} f\|_{L^q}.$$

Dans le paragraphe 3.2.1 concernant l'équation des ondes shiftée, on utilisera la définition ci-dessus en remplaçant $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ par $-\Delta_{\mathbb{H}^n} - \rho^2 + \tilde{\rho}^2$, où $\tilde{\rho} > |\frac{1}{2} - \frac{1}{q}|2\rho$. Par simplicité, on choisit $\tilde{\rho} > \rho$ indépendamment de q et on pose

$$\tilde{D} = (-\Delta_{\mathbb{H}^n} - \rho^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $H_q^\sigma(\mathbb{H}^n) = \tilde{D}^{-\sigma} L^q(\mathbb{H}^n)$ et $\|f\|_{H_q^\sigma} \sim \|\tilde{D}^\sigma f\|_{L^q}$. Si $\sigma = N$ est un entier positif, alors $H_q^\sigma(\mathbb{H}^n)$ coïncide avec l'espace de Sobolev

$$W^{N,q}(\mathbb{H}^n) = \{ f \in L^q(\mathbb{H}^n) \mid \nabla^j f \in L^q(\mathbb{H}^n) \quad \forall 1 \leq j \leq N \}$$

défini en termes de dérivées covariantes et muni de la norme

$$\|f\|_{W^{N,q}} = \sum_{j=0}^N \|\nabla^j f\|_{L^q}.$$

Proposition 1.2.1 (Théorème du plongement de Sobolev) *Soit $1 < q_1 < q_2 < \infty$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma_1 - \frac{n}{q_1} \geq \sigma_2 - \frac{n}{q_2}$ (¹). Alors on a*

$$H_{q_1}^{\sigma_1}(\mathbb{H}^n) \subset H_{q_2}^{\sigma_2}(\mathbb{H}^n),$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{H_{q_2}^{\sigma_2}} \leq C \|f\|_{H_{q_1}^{\sigma_1}} \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{H}^n).$$

Preuve. On donne deux idées de preuve. La première est basée sur le principe de localisation pour les espaces de Lizorkin–Triebel [299] et le résultat correspondant dans \mathbb{R}^n . Plus précisément, si $1 = \sum_{j=0}^\infty \varphi_j$ est une partition de l'unité bien choisie sur \mathbb{H}^n , on a

$$\|f\|_{H_{q_2}^{\sigma_2}(\mathbb{H}^n)} \asymp \left\{ \sum_{j=0}^\infty \|(\varphi_j f) \circ \exp_{x_j}\|_{H_{q_2}^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)}^{q_2} \right\}^{\frac{1}{q_2}}.$$

En utilisant les inclusions $H_{q_1}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n) \subset H_{q_2}^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ et $\ell^{q_1}(\mathbb{N}) \subset \ell^{q_2}(\mathbb{N})$, on en déduit que

$$\|f\|_{H_{q_2}^{\sigma_2}(\mathbb{H}^n)} \lesssim \left\{ \sum_{j=0}^\infty \|(\varphi_j f) \circ \exp_{x_j}\|_{H_{q_1}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \right\}^{\frac{1}{q_1}} \asymp \|f\|_{H_{q_1}^{\sigma_1}(\mathbb{H}^n)}.$$

La deuxième preuve est basée sur les propriétés $L^{q_1} \rightarrow L^{q_2}$ de l'opérateur de convolution $\tilde{D}^{\sigma_2 - \sigma_1}$ (voir [77] et les références qui y sont citées).

En plus des espaces de Sobolev $H_q^\sigma(\mathbb{H}^n)$, notre analyse concernant l'équation des ondes *shiftée* sur \mathbb{H}^n nécessite les espaces de Sobolev L^2 suivants :

$$H^{\sigma,\tau}(\mathbb{H}^n) = \tilde{D}^{-\sigma} D^{-\tau} L^2(\mathbb{H}^n),$$

1. Remarquons que $\sigma_1 - \sigma_2 \geq \frac{n}{q_1} - \frac{n}{q_2} > 0$.

où $D = (-\Delta_{\mathbb{H}^n} - \rho^2)^{\frac{1}{2}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\tau < \frac{3}{2}$ (en fait on s'intéresse seulement aux cas $\tau = 0$ and $\tau = \pm \frac{1}{2}$). Remarquons que

$$\begin{cases} H^{\sigma, \tau}(\mathbb{H}^n) = H_2^\sigma(\mathbb{H}^n) & \text{si } \tau = 0, \\ H^{\sigma, \tau}(\mathbb{H}^n) \subset H_2^{\sigma+\tau}(\mathbb{H}^n) & \text{si } \tau < 0, \\ H^{\sigma, \tau}(\mathbb{H}^n) \supset H_2^{\sigma+\tau}(\mathbb{H}^n) & \text{si } 0 < \tau < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Lemma 1.2.2 Si $0 < \tau < \frac{3}{2}$, alors

$$H^{\sigma, \tau}(\mathbb{H}^n) \subset H_2^{\sigma+\tau}(\mathbb{H}^n) + H_{2+}^\infty(\mathbb{H}^n),$$

où $H_{2+}^\infty(\mathbb{H}^n) = \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ q > 2}} H_q^s(\mathbb{H}^n)$ (on rappelle que $H_q^s(\mathbb{H}^n)$ est décroissant lorsque $q \searrow 2$ et $s \nearrow +\infty$).

Preuve. Soit $f \in L^2(\mathbb{H}^n)$. On a $\tilde{D}^{-\sigma} D^{-\tau} f = f * k_{\sigma, \tau}$, où

$$k_{\sigma, \tau}(x) = \text{const.} \int_0^{+\infty} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} |\lambda|^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \varphi_\lambda(x)$$

par la formule d'inversion pour la transformée de Fourier sphérique sur \mathbb{H}^n . On découpe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

d'où le noyau correspondant

$$k_{\sigma, \tau} = k_{\sigma, \tau}^0 + k_{\sigma, \tau}^\infty.$$

D'un côté, on a que

$$\mathbb{I}_{(1, +\infty)}(D) \tilde{D}^{-\sigma} D^{-\tau} f = f * k_{\sigma, \tau}^\infty$$

envoie $L^2(\mathbb{H}^n)$ dans $H_2^{\sigma+\tau}(\mathbb{H}^n)$. D'autre part, $k_{\sigma, \tau}^0$ est le noyau radial dans $H_2^\infty(\mathbb{H}^n)$, alors

$$\mathbb{I}_{[0, 1]}(D) \tilde{D}^{-\sigma} D^{-\tau} f = f * k_{\sigma, \tau}^0$$

envoie $L^2(\mathbb{H}^n)$ dans $H_{2+}^\infty(\mathbb{H}^n)$ par le phénomène de Kunze-Stein. Donc $\tilde{D}^{-\sigma} D^{-\tau} f = f * k_{\sigma, \tau}$ appartient à $H_2^{\sigma+\tau}(\mathbb{H}^n) + H_{2+}^\infty(\mathbb{H}^n)$, comme demandé.

1.3 Espaces de Damek–Ricci

Dans ce paragraphe, on va rappeler la définition et les principaux résultats de l'analyse sphérique dans le contexte des espaces de Damek–Ricci S , connus aussi comme groupes harmoniques NA ; ces espaces ont été très étudiés en analyse harmonique dans les 15 dernières années ([4], [262], [33], [31], [74], [73], [80], [90], [91], [260], [284]). Introduits comme certains groupes de Lie résolubles munis d'une métrique invariante à gauche, les espaces de Damek–Ricci généralisent les espaces hyperboliques. Ils fournissent une large classe d'exemples de variétés riemanniennes harmoniques qui ne sont pas des espaces symétriques, fournissant ainsi de nombreux contre-exemples à la conjecture de Lichnerowicz [90]. Cette conjecture était implicitement formulée en 1944 par Lichnerowicz, qui avait montré que toute variété harmonique de dimension au plus 4 est un espace symétrique, en laissant ouverte la question de savoir si cette affirmation reste vraie dans chaque dimension.

Bien que, en 1990, Szabo a prouvé qu'elle est vraie pour toute variété harmonique compacte simplement connexe [283], en 1992 Ewa Damek et Fulvio Ricci ont trouvé une large classe de variétés harmoniques non-compactes qui ne sont pas des espaces symétriques [89]. A l'origine de cette construction est un article d'A. Kaplan [180], qui introduit en 1980 la classe des groupes

de Lie nilpotents de type Heisenberg afin de construire des solutions élémentaires explicites pour leurs sous-laplaciens, qui sont des opérateurs différentiels hypoelliptiques du second ordre. On appelle désormais espaces de Damek-Ricci, ou groupes harmoniques NA , des groupes de Lie obtenus par produit semi-direct d'un groupe nilpotent de type Heisenberg N par une droite A , et munis d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Parmi eux figurent les espaces riemanniens symétriques de rang un et de type non compact, c'est-à-dire les espaces hyperboliques réels, complexes, ou quaternioniques. Ces derniers sont en effet de la forme G/K , où G est un groupe de Lie semi-simple et K un sous-groupe compact maximal, et peuvent être identifiés au sous-groupe résoluble NA d'une décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ de G . Mais la classe des espaces de Damek-Ricci comporte bien d'autres exemples que ceux-là, qui ne sont pas des espaces symétriques bien qu'étant tous des variétés harmoniques. Dans la liste ci-dessous (par ordre décroissant) de quelques classes remarquables de variétés riemanniennes, 1. variétés d'Einstein 2. variétés harmoniques 3. espaces de Damek-Ricci 4. espaces riemanniens symétriques de rang un et de type non-compact, l'inclusion $3 \supset 4$ est stricte. On peut penser que $2 \supset 3$ l'est aussi, mais on n'en connaît pas d'exemple.

L'analyse harmonique sur les espaces de Damek-Ricci connaît, depuis 1992, un développement rapide. Mais, si ses résultats ont de nombreuses analogies formelles avec ceux des espaces hyperboliques, il ne s'agit cependant pas d'une généralisation triviale : le groupe compact K , fréquemment utilisé dans les preuves classiques, fait ici défaut, et la notion de fonction radiale, moins facile à manipuler, doit faire l'objet d'une approche différente [91]. On parvient cependant à des résultats satisfaisants, et assez complets dans [4], [91], [260] : formules d'inversion de Fourier et de Plancherel, théorème de Paley-Wiener...

On va rappeler maintenant la définition des groupes de type H , leurs extensions aux espaces de Damek-Ricci, et ensuite les principaux résultats de l'analyse sphérique sur ces espaces. Pour les détails on renvoie à [4, 74, 73, 90, 91, 260].

Soit \mathfrak{n} une algèbre de Lie réelle de dimension finie, nilpotente d'ordre deux (c'est-à-dire $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq 0$ et $[\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] = 0$) de centre \mathfrak{z} . On a donc $[X, X'] \in \mathfrak{z}$ et $[X, Z] = 0$ pour tous $X, X' \in \mathfrak{n}$ et tout $Z \in \mathfrak{z}$. On suppose de plus que \mathfrak{n} est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on désigne par $|\cdot|$ la norme correspondante. Soit \mathfrak{v} le sous-espace orthogonal supplémentaire de \mathfrak{z} dans \mathfrak{n} , en sorte que

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{z}, \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{z}] = 0 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = 0.$$

D'après Kaplan [180], l'algèbre \mathfrak{n} est de type H si, pour chaque Z dans \mathfrak{z} de longueur unitaire, l'application $J_Z : \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{v}$, définie par

$$\langle J_Z X, Y \rangle = \langle Z, [X, Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{v},$$

est orthogonale (i.e. pour tout $Z \in \mathfrak{z}$, $X \in \mathfrak{v}$, $J_Z^2 X = -|Z|^2 X$). Enfin, on a $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{z}$.

Le groupe de Lie (connexe et) simplement connexe N associé à \mathfrak{n} est appelé un groupe de type H (ou groupe de type Heisenberg). On identifie N avec son algèbre de Lie \mathfrak{n} par l'application exponentielle

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} &\longrightarrow N \\ (X, Z) &\longmapsto \exp(X + Z). \end{aligned}$$

Alors la loi de produit sur $N \equiv \mathfrak{n}$ est

$$(X, Z)(X', Z') = (X + X', Z + Z' + \frac{1}{2}[X, X']) \quad \forall X, X' \in \mathfrak{v} \quad \forall Z, Z' \in \mathfrak{z}.$$

Le groupe N est un groupe nilpotent d'ordre deux, donc unimodulaire, avec la mesure de Haar (invariante à droite et à gauche) $dX dZ$. Le nombre $Q = \frac{m}{2} + k$, où m et k désignent les dimensions de \mathfrak{v} et \mathfrak{z} respectivement, est appelé la dimension homogène de N . Nous ne développerons pas ici la géométrie et l'analyse sur N ; voir par exemple [31], [91].

On définit les dilatations suivantes sur N :

$$\delta_a(X, Z) = (a^{1/2}X, aZ) \quad \forall (X, Z) \in N \quad \forall a \in \mathbb{R}^+.$$

Soit S l'extension unidimensionnelle de N obtenue en faisant agir $A = \mathbb{R}^+$ sur N par les dilatations homogènes. On notera par n la dimension $m + k + 1$ de S . Soit H un vecteur dans \mathfrak{a} qui agit sur \mathfrak{n} avec les valeurs propres $1/2$ et (éventuellement) 1 ; on étend le produit scalaire sur \mathfrak{n} à l'algèbre $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$, en demandant que \mathfrak{n} et \mathfrak{a} soient orthogonales et H un vecteur unitaire. L'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow S \\ (X, Z, a) &\mapsto \exp(X + Z) \exp(\log a H) \end{aligned}$$

donne les coordonnées globales sur S . Soit alors S le produit semi-direct $S = N \ltimes \mathbb{R}^+$, défini par

$$(X, Z, a)(X', Z', a') = \left(X + a^{1/2}X', Z + aZ' + \frac{1}{2}a^{1/2}[X, X'], a a' \right)$$

pour tous $(X, Z, a), (X', Z', a') \in S$.

Le groupe de Lie S est résoluble (connexe et) simplement connexe, avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathbb{R}$ et le crochet de Lie

$$[(X, Z, \ell), (X', Z', \ell')] = \left(\frac{1}{2}\ell X' - \frac{1}{2}\ell' X, \ell Z' - \ell' Z + [X, X'], 0 \right). \quad (1.21)$$

De plus, S est non-unimodulaire, on a alors deux mesures de Haar sur S invariantes à droite et à gauche définies respectivement par

$$d\rho(X, Z, a) = a^{-1} dX dZ da \quad \text{et} \quad d\lambda(X, Z, a) = a^{-(Q+1)} dX dZ da,$$

et la fonction modulaire est $\delta(X, Z, a) = a^{-Q}$. Pour $p \in [1, \infty)$ on désigne par $L^p(S, \lambda)$ et $L^p(S, \rho)$ les espaces de toutes les fonctions mesurables f telles qu'on a respectivement $\int_S |f|^p d\lambda < \infty$ et $\int_S |f|^p d\rho < \infty$. Nous équipons S avec la métrique riemannienne invariante à gauche induite par le produit scalaire

$$\langle (X, Z, \ell), (X', Z', \ell') \rangle = \langle X, X' \rangle + \langle Z, Z' \rangle + \ell \ell', \quad (1.22)$$

sur l'algèbre de Lie \mathfrak{s} de S . Pour tout $x \in S$, on désignera $r(x)$ la distance entre le point x et l'identité e de S et par $a(x)$ la A -composante de x , i.e. l'élément $a(x) \in \mathbb{R}^+$ tel que $x = (X, Z, a(x))$, avec $X \in \mathfrak{v}$, $Z \in \mathfrak{z}$. Depuis [4, formula (2.18)], pour tout $x = (X, Z, a)$ dans S , on a

$$\cosh^2 \left(\frac{r(x)}{2} \right) = \left(\frac{a^{1/2} + a^{-1/2}}{2} + \frac{1}{8}a^{-1/2}|X|^2 \right)^2 + \frac{1}{4}a^{-1}|Z|^2. \quad (1.23)$$

L'inégalité suivante est utile (voir [4, formula (1.20)]) :

$$|\log a(x)| \leq r(x) \quad \forall x \in S. \quad (1.24)$$

La mesure riemannienne est la mesure introduite ci-dessus $a^{-(Q+1)} dX dZ da$ et on dénote par Δ_S l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à cette structure riemannienne sur S .

On a donc la définition suivante :

Définition 1.3.1 *On appelle espace de Damek-Ricci un groupe de Lie (connexe et) simplement connexe $S = NA$ pour lequel l'algèbre de Lie est $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}$ avec le crochet de Lie (1.21), muni de la métrique riemannienne invariante à gauche définie par le produit scalaire (1.22) sur \mathfrak{s} .*

Remarque 1.3.1 La plupart des espaces symétriques G/K de rang un et de type non-compact s'inscrivent dans ce contexte. En effet, selon la décomposition d'Iwasawa $G = NAK = KAN$ rappelée dans le paragraphe 1.1, ils peuvent se réaliser comme $S = NA = AN$, avec $A = \mathbb{R}$. Plus précisément, soit $G = NAK$ une décomposition d'Iwasawa d'un groupe de Lie semi-simple connexe, non-compact, de centre fini et de rang un. Soient B la forme de Killing de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G , θ l'involution de Cartan, \mathfrak{g}_α et $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ (de dimensions respectives m et k) les espaces propres définis par les racines α et 2α (voir [158] chap. 6). La composante nilpotente N est alors (si $k \neq 0$) un groupe de type Heisenberg, en prenant $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_{2\alpha}$ et le produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{m+4k} B(X, \theta Y), \quad X, Y \in \mathfrak{n}$$

([88] p258; [262]); on a ici $J_Z V = [Z, \theta V]$ d'après l'invariance de la forme de Killing. La composante résoluble NA de la décomposition d'Iwasawa de G est donc un espace de Damek-Ricci. D'après la classification des espaces symétriques G/K de type non-compact et de rang un, les dimensions $m = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ et $k = \dim \mathfrak{g}_{2\alpha}$ sont alors

	$H^n(\mathbb{R})$	$H^n(\mathbb{C})$	$H^n(\mathbb{H})$	$H^2(\mathbb{O})$
k	[0]	1	3	7
m	$[n-1]$	$2(n-1)$	$4(n-1)$	8

et celle de G/K est $m+k+1$. Le cas $k=0$ est le cas dégénéré qui correspond au cas des espaces hyperboliques réels. En effet, N est abélien pour espaces hyperboliques réels $G/K = H^n(\mathbb{R})$ et de type Heisenberg dans les autres cas $G/K = H^n(\mathbb{C}), H^n(\mathbb{H}), H^2(\mathbb{O})$. On voit ainsi que les groupes NA issus d'une décomposition d'Iwasawa ne forment qu'une classe très particulière d'espaces de Damek-Ricci, appelés symétriques. On trouvera dans [74] ou [73] une caractérisation de cette classe par une condition algébrique sur les applications J_Z . Parmi eux il y en de nombreux qui ne sont pas symétriques, entre autre un exemple est le suivant : en prenant $k=2$ et $m=4$, on obtient un espace de Damek-Ricci non symétrique, de dimension minimale $4+2+1=7$. L'algèbre de type Heisenberg correspondante peut se réaliser en munissant $\mathfrak{v} = \mathbb{R}^4$ du crochet de Lie

$$[X, X'] = (ab' - ba' + dc' - cd', ac' - ca' + bd' - db') \in \mathfrak{z} = \mathbb{R}^2$$

(si $X = (a, b, c, d)$ et $X' = (a', b', c', d')$), et $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique [88].

Un autre modèle d'espace de Damek-Ricci est celui de la boule unité B de $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$ munie d'une métrique riemannienne obtenue en transportant sur B par certaines transformations globales de Cayley $C : S \rightarrow B$ la métrique invariante à gauche sur S (voir [262] pour plus de détails). Ce modèle met en évidence plusieurs propriétés importantes qu'on utilisera ensuite. Dans ce modèle de la boule $B(\mathfrak{s})$, les géodésiques issues de l'origine de B sont les diamètres. La distance géodésique à l'origine est donnée par

$$r = d(x', 0) = \log \frac{1 + \|x'\|}{1 - \|x'\|}, \text{ i.e. } \rho = \|x'\| = \tanh \frac{r}{2}. \quad (1.25)$$

En coordonnées géodésiques polaires (r, θ) autour de l'origine sur B , la mesure riemannienne s'écrit

$$dx = 2^{m+k} (\sinh \frac{r}{2})^{m+k} (\cosh \frac{r}{2})^k dr d\sigma, \quad (1.26)$$

où $d\sigma$ est la mesure euclidienne sur la sphère unité $\partial B(\mathfrak{s})$ de $\mathfrak{s} = \mathbb{R}^{m+k+1}$. En particulier, la densité de volume en coordonnées normales à l'origine, et par suite par translation en tout point,

est une fonction purement radiale, ce qui signifie que S est une variété harmonique ([90], [283]). Comme toutes les variétés harmoniques, S est une variété d'Einstein. Un calcul un peu long donne :

$$\text{Ric} = -\left(\frac{m}{4} + k\right) g \quad (1.27)$$

où Ric est le tenseur de courbure de Ricci et g est la métrique riemannienne (quelques rappels de géométrie riemannienne et en particulier les définitions des différents tenseurs de courbure sont donnés dans le paragraphe 4.2). La courbure sectionnelle κ est négative ou nulle, de minimum -1 (voir [31]). Notons que cette courbure peut s'annuler, contrairement au cas de l'espace hyperbolique.

Dans ce chapitre on développe les principaux outils de l'analyse harmonique sur un espace de Damek-Ricci $S = NA$. Par analyse harmonique, on entend la décomposition d'une fonction quelconque sur S en une combinaison linéaire (intégrale) de fonctions propres du laplacien $L = \Delta_S$ de S . Nous commençons par le cas des fonctions radiales ; dans la suite, radial signifiera toujours radial autour de l'élément neutre o de S . Comme S est une variété harmonique le problème se réduit à une variable ; on voit, en explicitant la partie radiale de L , qu'il entre dans le cadre de l'analyse des fonctions de Jacobi développée par Flensted-Jensen et Koornwinder [203]. Rappelons désormais les principales techniques de l'analyse sphérique sur ces espaces. La commutativité de la convolution sur des objets K -biinvariantes sur G est cruciale pour l'analyse harmonique sur les espaces symétriques G/K . Si on remplace la K -biinvariance par la radialité, un phénomène similaire apparaît aussi sur S . Comme établit dans [27], pour la convolution sur S :

$$(u * v)(x) = \int_S u(y)v(y^{-1}x)dy,$$

les fonctions intégrables radiales sur S forment une algèbre de Banach commutative $L^1(S)^\sharp$. On remarque que pour les distributions, les opérateurs différentiels invariants, ... la radialité est définie au moyen d'un opérateur de moyennisation sur les sphères, qui peut s'écrire

$$f^\sharp(x') = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial B(s)} d\sigma f(\rho\sigma)$$

dans le modèle de la boule et généralise la moyennisation sur K pour les espaces symétriques G/K de rang 1. L'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur S qui sont radiaux est une algèbre polynomiale avec un seul générateur l'opérateur $L = \Delta_S$ de Laplace-Beltrami.

La partie radiale (en coordonnées polaires géodésiques) de l'opérateur de Laplace-Beltrami L sur S s'écrit

$$\text{rad}L = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left\{ \frac{m+k}{2} \coth \frac{s}{2} + \frac{k}{2} \tanh \frac{s}{2} \right\} \frac{\partial}{\partial s}. \quad (1.28)$$

En remplaçant $r = \frac{s}{2}$, la partie radiale du Laplace-Beltrami $4\text{rad}L$ devient le fameux opérateur de Jacobi [203]

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \{(2\alpha+1)\coth r + (2\beta+1)\tanh r\} \frac{\partial}{\partial r},$$

avec les indices $\alpha = \frac{m+k+1}{2}$ et $\beta = \frac{k-1}{2}$, $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$.

Une fonction radiale sur S est une fonction qui dépend seulement de la distance depuis l'origine. Si f est radiale, alors par [4, formula (1.16)] on a

$$\int_S d\mu f = \int_0^\infty dr f(r) A(r),$$

où

$$A(r) = 2^{m+k} \sinh^{m+k} \left(\frac{r}{2} \right) \cosh^k \left(\frac{r}{2} \right) \quad \forall r \in \mathbb{R}^+. \quad (1.29)$$

Désignons par π l'opérateur de radialisation défini dans [14, page 150], qui associe à chaque fonction f dans $C^\infty(S)$ une fonction radiale sur S . Plus précisément

$$\pi f(r) = \text{const.} \int_{\partial B(\mathfrak{s})} d\sigma f(r\sigma) \quad \forall r \in \mathbb{R}^+,$$

où $\partial B(\mathfrak{s})$ est la sphère unité dans \mathfrak{s} et $d\sigma$ désigne sa mesure de surface.

Les fonctions sphériques φ_λ sur S sont les fonctions propres normalisées de Δ_S :

$$\begin{cases} \Delta_S \varphi_\lambda = -(\lambda^2 + \frac{Q^2}{4}) \varphi_\lambda \\ \varphi_\lambda(e) = 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ (voir [4, formule (2.6)]). Dans la suite, on va utiliser différentes propriétés des fonctions sphériques, que nous résumons maintenant. Nous nous référons à [4, 91] pour plus de détails. Toutes les fonctions sphériques sont de la forme

$$\varphi_\lambda = \pi(\delta^{i\lambda/Q-1/2}) = \pi(a(\cdot)^{-i\lambda+Q/2}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.30)$$

où δ est la fonction modulaire. Cela implique que

$$|\varphi_\lambda(r)| \lesssim \varphi_0(r) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{R}^+. \quad (1.31)$$

De plus, il est bien connu que

$$\varphi_0(r) \lesssim (1+r) e^{-\frac{Q}{2}r} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+. \quad (1.32)$$

Le comportement asymptotique des fonctions sphériques est donnée par

$$\varphi_\lambda(r) = \mathbf{c}(\lambda) \Phi_\lambda(r) + \mathbf{c}(-\lambda) \Phi_{-\lambda}(r) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{i}{2}\mathbb{Z},$$

où

$$\mathbf{c}(\lambda) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{Q-2i\lambda} \frac{\Gamma(2i\lambda)}{\Gamma(i\lambda + \frac{Q}{2}) \Gamma(i\lambda + \frac{m}{4} + \frac{1}{2})} \quad (1.33)$$

et

$$\Phi_\lambda(r) = (2 \cosh \frac{r}{2})^{i2\lambda-Q} {}_2F_1\left(\frac{Q}{2}-i\lambda, \frac{m}{4}-\frac{1}{2}-i\lambda; 1-2i\lambda; (\cosh \frac{r}{2})^{-2}\right).$$

D'une part, Φ_λ est une autre fonction propre radiale de Δ_S pour les mêmes valeurs propres $-(\lambda^2 + \frac{Q^2}{4})$, i.e.

$$\begin{aligned} 0 &= \{\Delta_S + \frac{Q^2}{4} + \lambda^2\} \Phi_\lambda(r) = \{\partial_r^2 + \frac{V'(r)}{V(r)} \partial_r + \frac{Q^2}{4} + \lambda^2\} \Phi_\lambda(r) \\ &= V(r)^{-\frac{1}{2}} \{\partial_r^2 - \omega(r) + \lambda^2\} \{V(r)^{\frac{1}{2}} \Phi_\lambda(r)\}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

où

$$\begin{aligned} \omega(r) &= V(r)^{-\frac{1}{2}} \partial_r^2 V(r)^{\frac{1}{2}} - \frac{Q^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} \frac{m}{2} (Q-1) (\sinh \frac{r}{2})^{-2} + \frac{k}{2} (\frac{k}{2}-1) (\sinh r)^{-2} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \omega_j e^{-jr} \quad \text{avec } \omega_j = O(j). \end{aligned} \quad (1.35)$$

D'autre part, la fonction Φ_λ peut se développer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(r) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(Q/2-i\lambda+\ell)}{\Gamma(Q/2-i\lambda)} \frac{\Gamma(m/4+1/2-i\lambda+\ell)}{\Gamma(m/4+1/2-i\lambda)} \frac{\Gamma(1-2i\lambda+\ell)}{\Gamma(1-2i\lambda)} \frac{2^{2\ell}}{\ell!} (2 \cosh \frac{r}{2})^{2i\lambda-Q-2\ell} \\ &= 2^{-\frac{k}{2}} V(r)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \Gamma_\ell(\lambda) e^{(i\lambda-\ell)r} \quad \text{lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.36)$$

En combinant (1.34), (1.35), (1.36), on a que les coefficients Γ_ℓ vérifient la formule suivante par récurrence

$$\begin{cases} \Gamma_0 = 1, \\ \ell(\ell - i2\lambda) \Gamma_\ell(\lambda) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \omega_{\ell-j} \Gamma_j(\lambda) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (1.37)$$

Il est bien connu aussi (voir [14, théorème 3.2]) qu'il existe des constantes positives C et d telles que

$$|\Gamma_\ell(\lambda)| \leq C(1+\ell)^d, \quad (1.38)$$

pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} \lambda \geq -|\operatorname{Re} \lambda|$.

Comme dans le cas des espaces hyperboliques, on peut améliorer cette estimation en élargissant son domaine de validité, en estimant les dérivées des Γ_ℓ et en gagnant de la décroissance supplémentaire en λ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Pour cela on a le lemme suivant :

Lemma 1.3.1 *Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $\Omega_\varepsilon = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} \lambda| \leq \varepsilon |\lambda|, \operatorname{Im} \lambda \leq -\frac{1-\varepsilon}{2} \}$. Alors il existe une constante positive d et, pour tout $h \in \mathbb{N}$, une constante positive C telles que*

$$|\partial_\lambda^h \Gamma_\ell(\lambda)| \leq C \ell^d (1+|\lambda|)^{-h-1} \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon. \quad (1.39)$$

De nouveau, en connaissant les fonctions sphériques φ_λ de S , on peut définir la transformée de Fourier sphérique $\mathcal{H}f$ d'une fonction radiale intégrable f sur S par

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_S d\mu f \varphi_\lambda$$

et la transformée de Fourier inverse

$$f(x) = c_S \int_0^\infty d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \mathcal{H}f(\lambda) \varphi_\lambda(x) \quad \forall x \in S.$$

Voici la formule de Plancherel

$$\int_S d\mu |f|^2 = c_S \int_0^\infty d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} |\mathcal{H}f(\lambda)|^2,$$

où les constantes c_S dépendent seulement de m et k . Il est bien connu que le coefficient de Harish-Chandra est borné par

$$|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lesssim |\lambda|^{-2} (1+|\lambda|)^{n-3} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.40)$$

Dans la suite on utilisera la factorisation suivante de la transformée sphérique de Fourier $\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{A}$, où \mathcal{A} est la transformée d'Abel et \mathcal{F} est la transformée de Fourier sur \mathbb{R} . On utilisera aussi de manière cruciale la factorisation $\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1}$. On rappelle les formules d'inversion de la transformée d'Abel [4, formule (2.24)], qui contiennent les opérateurs différentiels

$$\mathcal{D}_1 = -\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = -\frac{1}{\sinh(r/2)} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Si k est pair, on a

$$\mathcal{A}^{-1}f(r) = a_S^e \mathcal{D}_1^{k/2} \mathcal{D}_2^{m/2} f(r), \quad (1.41)$$

où la constante $a_S^e = 2^{-(3m+k)/2} \pi^{-(m+k)/2}$, alors que, si k est impair, on a

$$\mathcal{A}^{-1}f(r) = a_S^o \int_r^\infty \mathcal{D}_1^{(k+1)/2} \mathcal{D}_2^{m/2} f(s) d\nu(s), \quad (1.42)$$

où $a_S^o = 2^{-(3m+k)/2} \pi^{-n/2}$ et $d\nu(s) = (\cosh s - \cosh r)^{-1/2} \sinh s \, ds$.

Comme déjà remarqué avant, S est non-unimodulaire, on a ainsi des mesures de Haar λ invariante à gauche et ρ invariante à droite sur S . Il est bien connu que (S, d, λ) et (S, d, ρ) sont de *croissance exponentielle*. On a alors deux lapaciens naturels sur S , qui font l'objet de nombreuses investigations en analyse harmonique :

- (i) L'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_S associé à la métrique riemannienne d , déjà discuté avant. Cet opérateur $-\Delta_S$ est invariant à gauche, il est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(S, \lambda)$ et son spectre est la demi-droite $[Q^2/4, \infty)$.
- (ii) Le *Laplacien distingué* invariant à gauche $\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{n-1} X_i^2$, où X_0, \dots, X_{n-1} sont des champs de vecteurs invariants à gauche tels qu'à l'identité $X_0 = H$, $\{X_1, \dots, X_{m_v}\}$ est une base orthonormale de \mathfrak{v} et $\{X_{m_v+1}, \dots, X_{n-1}\}$ est une base orthonormale de \mathfrak{z} . L'opérateur $-\mathcal{L}$ est essentiellement auto-adjoint dans $L^2(S, \rho)$ et son spectre est $[0, \infty)$.

D'importants progrès ont été fait dans l'étude concernant le calcul fonctionnel L^p pour les opérateurs $-\Delta_S$ et $-\mathcal{L}$. Il s'est avéré que si $p \neq 2$, alors $-\Delta_S$ admet un calcul fonctionnel *holomorphe* [63], alors que $-\mathcal{L}$ admet un calcul fonctionnel *de type Mihlin-Hörmander* [15, 76]. Cette dichotomie intéressante entre les deux opérateurs a motivé nombreux auteurs à les étudier (tous les deux) dans le cadre des espaces hyperboliques réels, dans des espaces symétriques de rang un et de type non-compact, et plus généralement, dans les espaces Damek-Ricci et dans les espaces symétriques non-compacts de rang arbitraire [3, 5, 15, 77, 78, 79, 157, 170, 169, 235, 236, 304, 144].

Remarquons qu'il y a une importante relation entre \mathcal{L} et Δ_S . En effet, en désignant par Δ_Q l'opérateur shifté $\Delta_S + Q^2/4$, grâce à [15, Proposition 2], on a

$$\delta^{-1/2}(-\mathcal{L}) \delta^{1/2} f = -\Delta_Q f \quad (1.43)$$

pour toutes les fonctions radiales régulières et à support compact f dans S . Les spectres de $-\Delta_Q$ dans $L^2(S, \lambda)$ et $-\mathcal{L}$ dans $L^2(S, \rho)$ sont dans les deux cas $[0, +\infty)$. Soit E_{Δ_Q} et $E_{\mathcal{L}}$ respectivement la résolvante spectrale de l'identité pour laquelle

$$-\Delta_Q = \int_0^{+\infty} s \, dE_{\Delta_Q}(s) \quad \text{et} \quad -\mathcal{L} = \int_0^{+\infty} s \, dE_{\mathcal{L}}(s).$$

Pour toute fonction mesurable bornée m dans \mathbb{R}^+ les opérateurs $m(-\Delta_Q)$ et $m(-\mathcal{L})$, définis de manière spectrale par

$$m(-\Delta_Q) = \int_0^{+\infty} m(s) \, dE_{\Delta_Q}(s) \quad \text{et} \quad m(-\mathcal{L}) = \int_0^{+\infty} m(s) \, dE_{\mathcal{L}}(s),$$

sont bornés dans $L^2(S, \lambda)$ et $L^2(S, \rho)$ respectivement. Par (1.43) et le théorème spectral, on a

$$\delta^{-1/2} m(-\mathcal{L}) \delta^{1/2} f = m(-\Delta_Q) f, \quad (1.44)$$

pour des fonctions radiales régulières et à support compact f dans S . Soient $k_{m(-\mathcal{L})}$ et $k_{m(-\Delta_Q)}$ les noyaux de convolution associés aux opérateurs $m(-\mathcal{L})$ et $m(-\Delta_Q)$ respectivement, alors on a

$$m(-\Delta_Q) f = f * k_{m(-\Delta_Q)} \quad \text{et} \quad m(-\mathcal{L}) f = f * k_{m(-\mathcal{L})} \quad \forall f \in C_c^\infty(S),$$

où $*$ désigne la convolution dans S , définie par

$$f * g(x) = \int_S f(xy) g(y^{-1}) \, d\lambda(y) = \int_S f(xy^{-1}) g(y) \, d\rho(y),$$

pour toutes les fonctions f, g dans $C_c(S)$ et x dans S . Etant donnée une fonction mesurable m dans \mathbb{R}^+ , le noyau $k_{m(-\Delta_Q)}$ est radial et

$$k_{m(-\mathcal{L})} = \delta^{1/2} k_{m(-\Delta_Q)}. \quad (1.45)$$

De plus, la transformée sphérique $\mathcal{H}k_{m(-\Delta_Q)}$ de $k_{m(-\Delta_Q)}$ est donnée par

$$\mathcal{H}k_{m(-\Delta_Q)}(s) = m(s^2) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+. \quad (1.46)$$

Pour une preuve de la formule (1.46) voir [4, 15].

Espaces de Sobolev sur S

De manière analogue au cas des espaces hyperboliques, on peut introduire les espaces de Sobolev inhomogènes sur un espace de Damek-Ricci S , ce qui sera utile dans l'étude des lois de conservations et des propriétés dispersives concernant l'équation des ondes *shiftée* sur S (voir [12]). On renvoie à [299] pour plus de détails sur les espaces de fonctions sur les variétés riemanniennes. Soit $1 < q < \infty$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. Par définition, $H_q^\sigma(S)$ est l'image de $L^q(S)$ par $(-\Delta_S)^{-\frac{\sigma}{2}}$ (dans l'espace des distributions dans S), muni de la norme

$$\|f\|_{H_q^\sigma} = \|(-\Delta_S)^{\frac{\sigma}{2}} f\|_{L^q}.$$

Dans cette définition, on peut remplacer $-\Delta_S$ par $-\Delta_S - \frac{Q^2}{4} + \frac{\tilde{Q}^2}{4}$, où $\tilde{Q} > Q$, et on pose

$$\tilde{D} = (-\Delta_S - \frac{Q^2}{4} + \frac{\tilde{Q}^2}{4})^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $H_q^\sigma(S) = \tilde{D}^{-\sigma} L^q(S)$ et $\|f\|_{H_q^\sigma} \sim \|\tilde{D}^\sigma f\|_{L^q}$. Si $\sigma = N$ est un entier positif, alors $H_q^\sigma(S)$ coïncide avec l'espace de Sobolev

$$W^{N,q}(S) = \{f \in L^q(S) \mid \nabla^j f \in L^q(S) \quad \forall 1 \leq j \leq N\}$$

défini en termes de dérivées covariantes et muni de la norme

$$\|f\|_{W^{N,q}} = \sum_{j=0}^N \|\nabla^j f\|_{L^q}.$$

En suivant la même preuve rappelé dans le cas des espaces hyperboliques (voir aussi [12, Proposition 3.1]) on obtient le suivant théorème des inégalités de Sobolev.

Proposition 1.3.1 *Soient $1 < q_1 < q_2 < \infty$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\sigma_1 - \frac{n}{q_1} \geq \sigma_2 - \frac{n}{q_2}$. Alors, on a*

$$H_{q_1}^{\sigma_1}(S) \subset H_{q_2}^{\sigma_2}(S).$$

Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{H_{q_2}^{\sigma_2}} \leq C \|f\|_{H_{q_1}^{\sigma_1}} \quad \forall f \in C_c^\infty(S).$$

De nouveau, en plus des espaces de Sobolev $H_q^\sigma(S)$, on peut introduire les espaces de Sobolev L^2 suivants :

$$H^{\sigma,\tau}(S) = \tilde{D}^{-\sigma} D^{-\tau} L^2(S),$$

où $D = (-\Delta_S - \frac{Q^2}{4})^{\frac{1}{2}}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\tau < \frac{3}{2}$ (en particulier on utilisera seulement les cas $\tau = 0$ et $\tau = \pm \frac{1}{2}$). Remarquons que

$$\begin{cases} H^{\sigma,\tau}(S) = H_2^\sigma(S) & \text{si } \tau = 0, \\ H^{\sigma,\tau}(S) \subset H_2^{\sigma+\tau}(S) & \text{si } \tau < 0, \\ H^{\sigma,\tau}(S) \supset H_2^{\sigma+\tau}(S) & \text{si } 0 < \tau < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Lemma 1.3.2 *Si $0 < \tau < \frac{3}{2}$, alors*

$$H^{\sigma,\tau}(S) \subset H_2^{\sigma+\tau}(S) + H_{2+}^\infty(S),$$

où $H_{2+}^\infty(S) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}, q > 2} H_q^s(S)$ (on rappelle que $H_q^s(S)$ est décroissant lorsque $q \searrow 2$ et $s \nearrow +\infty$).

2. EQUATION DE SCHRÖDINGER

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger semi-linéaire suivant

$$(NLS) \begin{cases} i \partial_t u + \Delta u = F(u), \\ u(0) = f \end{cases}$$

qui a été intensivement étudiée dans les trente dernières années en lien avec ses importantes applications en Physique-Mathématique. Cette équation peut servir à modéliser de nombreux phénomènes physiques, c'est une équation d'enveloppe universelle pour la propagation d'onde, elle s'obtient entre autres à partir des équations de Maxwell ou des équations d'Euler à surface libre (water-waves), [107], [298], et aussi comme limite de champ moyen pour les systèmes de particules quantiques en interaction, [116]. L'inconnue u est une fonction à valeurs complexes et dépend des variables de temps et d'espace. La variable "d'espace" $x \in M$ peut être prise selon les cas, dans \mathbb{R}^n , un domaine de \mathbb{R}^n , ou plus généralement une variété riemannienne avec le Laplacien naturel. Des non-linéarités fréquemment utilisées, dans le modèle semi-linéaire, sont les *non-linéarités de type puissance*, qui vérifient

$$\begin{cases} |F(u)| \leq C |u|^\gamma, \forall u, \\ |F(u) - F(v)| \leq C (|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1}) |u-v|, \forall u, v, \end{cases} \quad (2.1)$$

pour des constantes $\gamma > 1$ et $C \geq 0$.

Selon la structure de la non-linéarité, on dira aussi que F est

- *invariante de Jauge* si $\text{Im}\{F(u)\bar{u}\} = 0$,
- *hamiltonienne* si il existe G à valeurs réelles telle que $F(u) = G'(|u|^2)u$.

De plus, si G est positive, on dira que la non-linéarité est *défocalisante* et si G est négative la non-linéarité est *focalisante*. Pour des non-linéarités *invariantes de Jauge*, on a formellement la conservation de la masse

$$M(u) = \int_M |u|^2 dx \quad (2.2)$$

et pour des non-linéarités *hamiltoniennes*, on a en outre la conservation de l'Hamiltonien (qui est l'énergie totale)

$$H(u) = \int_M |\nabla u(t, x)|^2 dx + \int_M G(|u(t, x)|^2) dx. \quad (2.3)$$

En particulier, si G est *défocalisante* cela implique toujours une borne sur la norme H^1 .

Si on se restreint à des non-linéarités polynomiales homogènes, les possibilités sont $F(u) = \pm |u|^\gamma$ et $F(u) = \pm |u|^{\gamma-1}u$, elles sont *invariantes de Jauge* et *hamiltoniennes* seulement dans le deuxième cas. De plus, remarquons que les $F(u) = +|u|^{\gamma-1}u$ sont *défocalisantes* et les $F(u) = -|u|^{\gamma-1}u$ sont *focalisantes*.

Les questions naturelles associées à ce type de problème de Cauchy non-linéaire concernent la régularité minimale des données initiales pour obtenir l'existence et unicité locale ou globale des solutions, la description de la formation de singularités ou la description du comportement asymptotique, le scattering, l'existence des opérateurs d'onde, l'existence de structures particulières stables comme les ondes solitaires.

On va d'abord rappeler quelques résultats bien connus dans le cas classique de l'espace euclidien \mathbb{R}^n et ensuite on présentera certaines généralisations dans le contexte de variétés riemannienne non-compacts.

2.1 Le cadre euclidien \mathbb{R}^n

2.1.1 Propriétés dispersives

Pour une description détaillée du sujet on renvoie le lecteur aux textes de T. Cazenave [55], J. Ginibre [136], C. Sulem et P.-L. Sulem [282], J. Bourgain [37] et T. Tao [288].

Commençons par énoncer quelques résultats classiques concernant le problème de Cauchy (NLS) local. On rappelle que :

Définition 2.1.1 Soit $s \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy (NLS) est localement bien posé dans $H^s(M)$ si pour tout borné B de $H^s(M)$, il existe $T > 0$ et un espace de Banach X_T , avec inclusion continue dans $C([-T, +T]; H^s(M))$, tel que

- pour toute donnée initiale $f(x) \in B$, (NLS) a une unique solution $u(t, x) \in X_T$;
- le flot $f(x) \mapsto u(t, x)$ est continu de B dans X_T .

(NLS) est globalement bien posé si ces propriétés sont vérifiées avec $T = \infty$.

Considérons le problème de Cauchy linéaire homogène

$$\begin{cases} i \partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

puisque le Laplacien $-\Delta : H^2 \rightarrow L^2$ est un opérateur auto-adjoint, le théorème de Stone ([259]) assure que $i\Delta$ engendre un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires fortement continu $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ sur L^2 et la solution de (2.4) s'écrit

$$u(t) = e^{it\Delta} f.$$

Le groupe $e^{it\Delta}$ est aussi unitaire sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout s , un théorème de point fixe standard sur la formulation intégrale de l'équation permet très facilement de montrer que le problème de Cauchy non-linéaire (NLS) est localement bien posé dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s > n/2$ (quitte à supposer F suffisamment régulière). La question intéressante naturelle est : étant donnée une non-linéarité $F(u)$ dans (NLS), quel est l'indice de régularité minimale s pour lequel le problème de Cauchy non-linéaire est bien posé dans H^s ? Au vu des quantités conservées, il semble particulièrement intéressant de travailler dans H^1 ou L^2 comme espace de résolution. On peut toutefois remarquer que pour les non-linéarités modèles que sont les puissances homogènes, il y a un changement d'échelle qui laisse invariant l'équation non-linéaire : si $u(t, x)$ est une solution de (NLS), alors $u_\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est aussi solution. Le seul espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ invariant par ce changement d'échelle correspond à $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{\gamma-1}$, appelé indice critique. De manière générale on s'attendrait à ce qu'un problème de Cauchy non-linéaire soit bien posé pour $s \geq s_c$ et mal posé si $s < s_c$. Cependant, pour des non-linéarités modèle puissance invariantes de Jauge, par exemple les *focalisantes* et *défocalisantes*, on a aussi la transformation galiléenne

$$u(t, x) \rightarrow e^{-iv \cdot x / 2} e^{i|v|^2 t / 4} u(t, x - vt)$$

pour toute vitesse arbitraire $v \in \mathbb{R}^n$ qui preserve l'ensemble des solutions. De plus la norme L^2 reste invariante par cette transformation, cela suggère donc que l'indice de régularité $s = 0$ joue aussi un rôle critique pour (NLS). Dans ce contexte, il y a toute une collection satisfaisante

de résultats concernant le caractère mal posé de (NLS) dans H^s (dans le sens où le flot n'est pas uniformément continu), pour $s < \max(0, s_c)$, qui montre aussi l'optimalité de résultats de caractère bien posé pour $s > \max(0, s_c)$, [60], [2], [53].

On s'intéresse donc à l'étude concernant le caractère bien posé de (NLS) pour $s \geq 0$ et $s \geq s_c$. Pour améliorer l'indice de régularité s par rapport à $\frac{n}{2}$, il faut utiliser de manière cruciale les propriétés dispersives de l'équation linéaire. La clé de tous les résultats est donc une étude fine du groupe de l'équation linéaire. En effet, en utilisant les transformations de Fourier et de Fourier inverse, on peut obtenir facilement la représentation explicite de la solution du problème de Cauchy linéaire homogène (2.4)

$$u(t, x) = e^{it\Delta} f(x) = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy \quad \forall t \neq 0.$$

On en déduit immédiatement l'*estimation dispersive* suivante

$$\|e^{it\Delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim |t|^{-\frac{n}{2}} \quad \forall t \neq 0.$$

Le groupe $e^{it\Delta}$ étant unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ on a aussi

$$\|e^{it\Delta}\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En interpolant entre les deux dernières estimations on obtient les estimations dispersives duales

$$\|e^{it\Delta}\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim |t|^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q})} \quad \forall t \neq 0, \forall q \geq 2. \quad (2.5)$$

Ces estimations dispersives sont très importantes car elles décrivent précisément le taux de décroissance de la solution à l'infini, mais aussi car elles permettent d'obtenir d'autres estimations $L_t^p L_x^q$, appelées estimations de Strichartz, pour le problème de Cauchy linéaire non-homogène. La philosophie est de passer d'une estimation de décroissance ponctuelle en temps à un gain d'intégrabilité spatiale après moyenne en temps adéquate. Il s'avère que ces estimations sont cruciales dans l'étude des problèmes de Cauchy semi-linéaires.

On considère donc maintenant le problème de Cauchy linéaire non-homogène

$$\begin{cases} i \partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = F(t, x) \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous avons les estimations suivantes :

Théorème 2.1.1 Soient $(p, q), (\tilde{p}, \tilde{q}) \in [2, \infty] \times [2, \infty)$ deux couples $\frac{n}{2}$ -admissibles, c'est-à-dire

$$\frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}, \quad \frac{2}{\tilde{p}} + \frac{n}{\tilde{q}} = \frac{n}{2}, \quad n \geq 2. \quad (2.7)$$

Soit $I = [0, T]$ ou \mathbb{R} , $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $F \in L^{\tilde{p}'}(I, L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}^n))$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que les estimations de Strichartz suivantes sont vérifiées pour toute solution de (2.6)

$$\|u\|_{C(I, L^2(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{L^p(I, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I, L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}^n))} \right), \quad (2.8)$$

où $\|u\|_{L^p(I, L^q(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

Remarque 2.1.1 Remarquons que les endpoints $(p, q) = (\infty, 2)$ et $(p, q) = (2, \frac{2n}{n-2})$ sont inclus en dimension $n \geq 3$, mais seulement le premier est inclus en dimension $n = 2$. Ces estimations ont été démontrées en 1977 dans l'article pionnier de R. Strichartz [281], pour $p = q = 2 + \frac{4}{n}$. Ensuite elles ont été généralisées dans [141] par J. Ginibre et G. Velo pour tous les autres couples avec $p > 2$, dans [313] par K. Yajima pour les estimations non homogènes et finalement dans [185] par M. Keel et T. Tao pour le endpoint $p = 2$ des dimensions $n \geq 3$. Le couple $(p, q) = (2, \infty)$, endpoint en dimension $n = 2$, est exclu par le contre-exemple donné dans [231] par S.J. Montgomery-Smith. En revanche, les estimations sont meilleures, en se restreignant au cas des solutions radiales, et celle du endpoint de la dimension $n = 2$ est valable (T. Tao [289], M.C. Vilela [307]).

Remarque 2.1.2 L'ensemble des couples $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ $\frac{n}{2}$ -admissibles sur \mathbb{R}^n appartient à l'intervalle $I_n = \left\{ (\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in [0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}] \mid \frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} \right\}$.

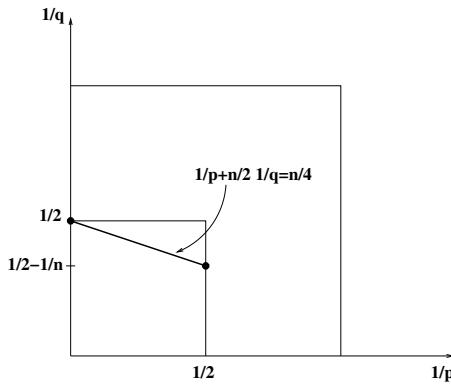


Fig. 2.1: Admissibilité sur \mathbb{R}^n en dimension $n \geq 3$

Idée de démonstration : On va donner une idée de la stratégie développée par Ginibre & Velo [139]. En utilisant la formule de Duhamel, la solution du problème de Cauchy linéaire non-homogène (2.6) peut s'écrire

$$u(t, x) = e^{it\Delta} f(x) + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s, x) ds.$$

Il suffit de montrer l'estimation de Strichartz homogène

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^p(I, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (2.9)$$

et l'estimation de Strichartz non-homogène

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s, x) ds \right\|_{L^p(I, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I, L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}^n))}. \quad (2.10)$$

Considérons l'opérateur

$$Tf(t, x) = e^{it\Delta} f(x)$$

et son adjoint formel

$$T^*F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\Delta} F(s, x) ds.$$

Par l'argument classique d'analyse fonctionnelle TT^* , il suffit de prouver la continuité $L_t^{p'} L_x^{q'} \rightarrow L_t^p L_x^q$ de l'opérateur

$$TT^*F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-s)\Delta} F(s, x) ds \quad (2.11)$$

et de sa version tronquée

$$\widetilde{TT^*}F(t, x) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s, x) ds, \quad (2.12)$$

pour tout couple $\frac{n}{2}$ -admissible (p, q) , afin d'obtenir (2.8) avec $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (p', q')$. En utilisant les estimations dispersives (2.5) les normes $L_t^p L_x^q$ de (2.11) et (2.12) sont majorées par

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})n} \|F(s)\|_{L_x^{q'}} ds \right\|_{L_t^p}. \quad (2.13)$$

Ainsi en utilisant l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev (voir [147] par exemple) on obtient la continuité désirée sauf pour les endpoints $(p, q) = (\infty, 2)$ et $(p, q) = (2, \frac{2n}{n-2})$. Grâce à la conservation de la norme L^2 , on avait déjà l'estimation d'énergie suivante

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^\infty(I, L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.14)$$

En utilisant à nouveau l'argument TT^* et le lemme de Christ-Kiselev pour $p > 2$, on peut enfin obtenir (2.8) pour tout couple $\frac{n}{2}$ -admissible (\tilde{p}, \tilde{q}) . Le cas de l'endpoint $(p, q) = (2, \frac{2n}{n-2})$ en dimension $n \geq 3$ est traité dans [185] et puisque on ne peut pas utiliser l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, on a besoin d'utiliser des arguments plus fins d'interpolation. Notons que la continuité de l'opérateur tronqué $\widetilde{TT^*}$ ne découle pas de la version non-tronquée TT^* car le lemme de Christ-Kiselev ne s'applique pas pour $p = 2$ ([61]).

Remarque 2.1.3 *Les estimations de Strichartz peuvent être généralisées à d'autres espaces qui tiennent compte des dérivées en espace. Puisque les dérivations en espace commutent avec le Laplacien, on gagne immédiatement une version des estimations de Strichartz dans les espaces de Sobolev*

$$\|u\|_{C(I, H^s(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{L^p(I, H_q^s(\mathbb{R}^n))} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I, H_{q'}^s(\mathbb{R}^n))}, \quad (2.15)$$

pour (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) $\frac{n}{2}$ -admissibles. De telles estimations sont très utiles pour étudier l'équation de Schrödinger non-linéaire à données initiales dans H^s avec régularité s minimale et pouvoir ainsi descendre en dessous de $\frac{n}{2}$.

Rappelons finalement que par des méthodes de mélangeurs, on peut obtenir d'autres estimations de la solution linéaire dans des espaces mixtes, appelées *inégalités de Morawetz*. Elles jouent un rôle crucial lors de l'étude en grand temps de l'équation non-linéaire pour des grandes données. Esquissons la méthode d'énergie à poids aboutissant à de telles estimations pour des solutions $H^1(\mathbb{R}^n)$ de l'équation

$$i\partial_t v + \Delta v = Vv,$$

avec V fonction réelle dépendant éventuellement de v . Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial_t^2}{2} \int |v(t, x)|^2 a(x) dx &= \partial_t \operatorname{Im} \int \bar{v}(t, x) \nabla v(t, x) \nabla a(x) dx \\ &= \int (-\Delta^2 a) \frac{|v|^2}{2} dx + \int \nabla v^t \operatorname{Hess} a \nabla \bar{v} dx + \operatorname{Re} \int 2Vv \nabla \bar{v} \cdot \nabla a + V|v|^2 \Delta a dx. \end{aligned}$$

En intégrant en temps, on obtient

$$\begin{aligned} \int \left(\int (-\Delta^2 a) \frac{|v|^2}{2} + \int \nabla v^t \operatorname{Hess} a \nabla \bar{v} + \operatorname{Re} \int 2Vv \nabla \bar{v} \cdot \nabla a + V|v|^2 \Delta a \right) dt \\ \leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^n))}^2 \|\nabla a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Afin d'en déduire des estimations à priori de type Morawetz pour une équation de Schrödinger non-linéaire, on doit alors bien choisir le poids $a(x)$ en fonction du terme V . Dans le cas (NLS) avec des non-linéarités *défocalisantes* $F(u) = Vu$, où $V = |u|^{\gamma-1}$, en choisissant $a(x) = |x|$, on obtient les estimations de Morawetz classiques pour $n \geq 3$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(t, x)|^{\gamma+1}}{|x|} dx dt \leq c \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^n))}^2.$$

Une différente manière pour mesurer la dispersion est donnée par les estimations de smoothing ou régularisation locale à la Kato. Elles sont plus anciennes que les estimations de Strichartz, en effet leur origine remonte à la théorie des opérateurs régularisants développée par Kato en 1965 [183]. Pour l'équation de Schrödinger dans \mathbb{R}^n une de ces estimations typiques est

$$\|\langle x \rangle^{-\frac{1}{2}-} |D|^{1/2} e^{it\Delta} f\|_{L_t^2 L_x^2} \lesssim \|f\|_{L^2}, \quad \langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

Des estimations similaires sont valables aussi pour d'autres équations dispersives comme les ondes, Klein-Gordon, Dirac, Korteweg-de Vries ([181], [314], [306], [68], [274], [82], [190], [93] et d'autres).

L'intérêt principal de ces estimations est le gain de régularité de la solution par rapport à la donnée initiale. D'ailleurs, ces estimations sont particulièrement utiles pour étudier le problème de Cauchy par la méthode de point fixe pour des équations non-linéaires ayant de plus des dérivées de l'inconnue dans la non-linéarité. Elles peuvent servir aussi dans l'étude des estimations de Strichartz pour des opérateurs perturbés, comme on verra plus tard. Il y a peu de littérature sur l'étude de tels phénomènes sur des variétés non-compactes en dehors du travail récent de Kaizuka [176], cela pourrait donc constituer une direction de recherche intéressante.

Dans la preuve précédente, les estimations de Strichartz sont obtenues comme conséquence de l'estimation de dispersion. Néanmoins, il existe de nombreuses situations pour lesquelles les inégalités dispersives ne sont pas vérifiées ou ne sont pas connues. Par exemple cela se produit sur les variétés compactes, en présence de potentiels électriques ou magnétiques et plus généralement pour les opérateurs à coefficients variables. Cependant dans de très nombreux cas, les estimations de Strichartz, ou une forme affaiblie, restent vraies. C'est dans le cadre compact que les choses se passent le moins bien. Les résultats ne peuvent être que locaux en temps, et sont en général avec perte de régularité (J. Bourgain [36], N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov [47], R. Anton [13], M. Blair, H. Smith et C. Sogge [32]). Le présence de ces pertes est inévitable, en vue des estimations des normes L^p des fonctions propres du Laplacien (C. Sogge [275]). A cause de ces pertes, pour traiter les problèmes non-linéaires, on est souvent obligé de recourir à des versions plus raffinées des estimations de Strichartz comme les estimations de Strichartz multi-linéaires introduites par Bourgain, ensuite développées par Burq-Gérard-Tzvetkov [44], [43] et d'autres.

En ce qui concerne l'étude de l'équation perturbée par des potentiels singuliers $V(x)$ ou $V(t, x)$, on peut remarquer que la perturbation par un potentiel peut détruire certaines propriétés dispersives. En effet, si on perturbe le Laplacien $-\Delta$ par un potentiel V négatif, c'est bien connu que l'opérateur $-\Delta + V(x)$ a des valeurs propres dès que V est assez grand (et qui tend vers zéro à l'infini). Il existe donc des solutions périodiques en temps sous la forme $e^{i\lambda t} u(x)$, ce qui est une obstruction à la validité en temps grand des inégalités dispersives.

Le cas extrême, dans le sens où tout le spectre de $-\Delta + V(x)$ est discret, est celui des potentiels croissants à l'infini. Un exemple modèle de ce type de comportement est l'oscillateur harmonique $V(x) = |x|^2$; des formes quadratiques positives plus générales ont été aussi étudiées ([52]). Ce type de phénomène peut se produire aussi dans le cas de perturbations du Laplacien avec un champ magnétique. Dans [97], un travail en collaboration avec P. D'Ancona (Università di Roma La Sapienza) et F. Ricci (SNS Pisa), on a étudié les propriétés dispersives des équations de Schrödinger et des ondes associées au "Laplacien twisté". Cet opérateur est très important

en analyse harmonique et son intérêt en EDP vient justement du fait qu'il peut être vu comme une perturbation du Laplacien avec un champ magnétique constant. Le cas des ondes étant plus difficile, on discutera les résultats qu'on a obtenus plus loin.

L'équation de Schrödinger perturbée par un potentiel suffisamment décroissant à l'infini a été intensivement étudiée (Journé, Soffer and Sogge [175], Yajima, Rodnianski, Schlag, Beceanu et Goldberg [314], [261], [29]). Pour une forme générale de potentiels, les meilleurs résultats pour obtenir les estimations dispersives demandent des potentiels dans la classe de Kato. Il est possible de démontrer directement des estimations de Strichartz pour des potentiels plus généraux mais vérifiant des conditions supplémentaires

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|V(t, \cdot)\|_{L^{(\frac{n}{2}, \infty)}} < \epsilon$$

ou d'intégrabilité

$$\|V\|_{L^r(\mathbb{R}; L^s(\mathbb{R}^n))} < \infty$$

pour des indices satisfaisant :

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2s} = 1. \quad (2.18)$$

Le cas critique du potentiel $\frac{\alpha}{|x|^2}$ qui n'est pas dans cette classe a été étudié séparément. Dans le cas $\alpha > -\frac{(n-2)^2}{4}$, les estimations de Strichartz homogènes ont d'abord été établies par Burq, Planchon, Stalker et Tahvilard-Zadeh ([46], [45]) en passant par la preuve d'estimations de régularisation locale. Les estimations de Strichartz non-homogènes sont traitées dans [253]. Dans ce cadre, il y a une difficulté pour le passage des estimations homogènes aux estimations non-homogènes pour l'*endpoint*, car d'une part l'argument abstrait de Keel et Tao [185] ne s'applique pas en l'absence d'inégalités dispersives et d'autre part le Lemme de Christ-Kiselev n'est pas valable. Les estimations non-homogènes sont obtenues dans [253] en combinant les estimations homogènes, un argument de dualité, l'inégalité de Hölder dans les espaces de Lorentz et les estimations de régularisation locale. On reviendra sur la preuve dans le paragraphe 3.1.2. Les estimations dispersives dans le cas critique ont été obtenues très récemment en dimension deux et trois [119], [118]. Dans ce contexte, j'ai commencé à étudier le cas des dimensions supérieures ; pour l'instant dans [248], j'ai obtenu des estimations dispersives en temps petit en exploitant de nouveau le lien entre l'équation définie dans l'espace euclidien et celle sur l'espace hyperbolique.

2.1.2 Applications au problème de Cauchy

Rappelons d'abord un schéma de preuve classique permettant de montrer qu'un problème de Cauchy non-linéaire (NLS) est localement bien posé au sens de la définition 2.1.1. L'approche usuelle est d'utiliser le théorème du point fixe de Banach.

On considère l'application Φ , définie par

$$\Phi(v)(t) = e^{it\Delta} f - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(v(s)) ds. \quad (2.19)$$

On remarque que $u = \Phi(v)$ est la solution de l'équation linéaire

$$i\partial_t u - \Delta u = F(v), \quad u(0, x) = f(x).$$

On montre alors qu'il existe une boule B d'un espace de Banach X_T tel que $\Phi : B \rightarrow B$ soit une contraction. Plus précisément, on doit vérifier que

$$\|\Phi(v)\|_{X_T} \leq \|f\|_{H^s} + \phi(R, T) \|v\|_{X_T},$$

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{X_T} \leq \phi(R, T) \|v - w\|_{X_T},$$

où ϕ est une fonction continue croissante par rapport à chaque argument, $\phi(0, 0) = 0$ et R est le rayon de la boule B . En choisissant bien le rayon de la boule et le temps T , on peut conclure dans deux cas :

- on prend T suffisamment petit, on obtient que (NLS) est localement bien posé pour toute donnée initiale dans H^s ; remarquons que le temps d'existence dépend seulement de la norme de la donnée initiale et qu'il est uniforme sur les bornés de H^s .
- si les données initiales sont en norme petite et ϕ ne dépend pas de T , on gagne $T = +\infty$ et on obtient que (NLS) est globalement bien posé dans H^s .

Si les non-linéarités sont peu régulières, on peut raffiner un peu l'argument en montrant que Φ vérifie une propriété de contraction du type

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{Y_T} \leq \phi(R, T) \|v - w\|_{Y_T}$$

avec Y_T un autre espace de Banach tel que $X_T \subset Y_T$ avec inclusion continu. Il faut alors travailler un peu plus pour montrer l'uniforme continuité du flot pour la topologie de X_T .

Comme mentionné précédemment, en prenant $X_T = \mathcal{C}([0, T], H^s)$ pour $s > n/2$, on obtient immédiatement que le problème de Cauchy non-linéaire est localement bien posé dans $H^s, s > n/2$. Afin d'obtenir des résultats de régularité minimale et donc abaisser l'indice de régularité s avec l'espoir de descendre au niveau d'une quantité conservée (2.2), (2.3), on utilise de manière cruciale les estimations de Strichartz précédentes dans l'argument du point fixe. Cela conduit à prendre des espaces de Banach X_T du type $X_T = \mathcal{C}([0, T], H^s) \cap L^p([0, T], H^{\sigma, q})$, bien choisis.

Ce type de résultats dans le cas des non-linéarités $F(u)$ de *type puissance* (2.1) (voir [136], [55]) donne le caractère

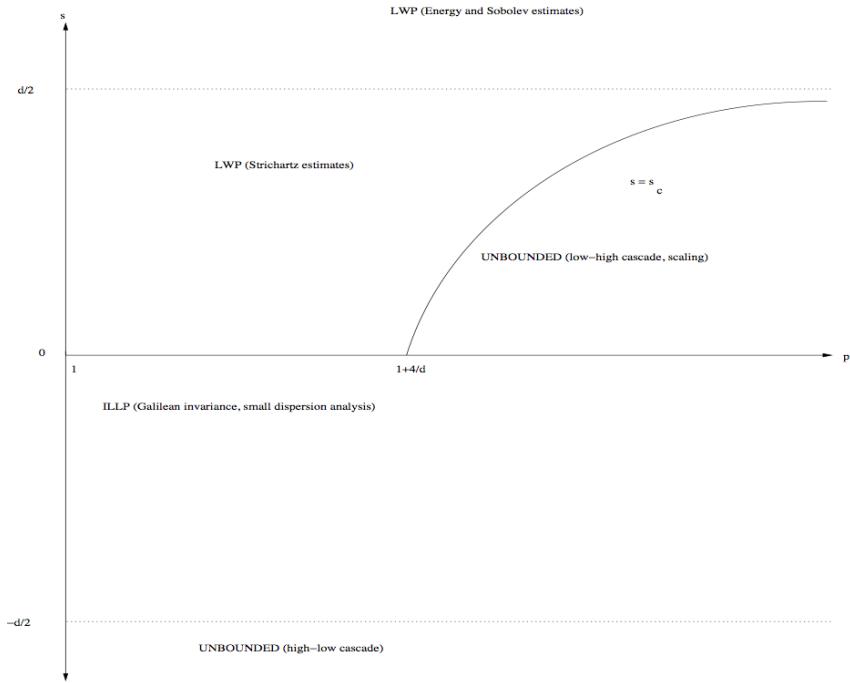
- localement bien posé dans $H^s, 0 < s < \min\{1, \frac{n}{2}\}$, dans le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n-2s}$;
- localement bien posé dans H^1 dans le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$;
- globalement bien posé dans H^1 dans les cas $1 + \frac{4}{n} \leq \gamma \leq 1 + \frac{4}{n-2}$ pour des données initiales petites en norme.
- localement bien posé dans L^2 dans le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n}$;
- globalement bien posé dans L^2 dans le cas critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ pour des données initiales petites en norme.

Les cas critiques $\gamma = 1 + \frac{4}{n-2}$ ($s_c = 1$) et respectivement $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ ($s_c = 0$) ont été traités par Cazenave-Weissler et respectivement Tsutsumi ([57], [300]). Le temps d'existence de la solution locale dépend de la donnée initiale de façon plus compliquée (i.e. dépend du profil de la donnée initiale et pas seulement de la norme) et l'uniforme continuité du flot a lieu dans une topologie plus faible. Comme déjà évoqué, les résultats locaux ci-dessus sont optimaux et (NLS) est mal posé dans H^s (dans le sens où le flot n'est pas pas uniformément continu), pour $s < \max(0, s_c)$ où $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{\gamma-1}$ ([60], [2]). On peut donc résumer le caractère localement bien posé de (NLS) selon la régularité s des données initiales et la puissance γ de la non-linéarité dans la figure 2.1.2 ci-dessous.

Il est ensuite possible d'obtenir des résultats globaux (en temps) à données initiales respectivement dans H^1 et L^2 en s'affranchissant des conditions de petitesse sur les données pour des non-linéarités donnant lieu à des lois de conservation.

Pour des non-linéarités *invariantes de Jauge*, la conservation de la norme L^2 combinée au résultat d'existence et unicité locale en temps donne le caractère globalement bien posé dans L^2 pour le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n}$.

Pour des non-linéarités *hamiltoniennes*, par exemple $F(u) = \pm |u|^{\gamma-1} u$, les résultats concernant l'existence et unicité locale en temps sont les mêmes, mais en ce qui concerne le caractère globalement bien posé à données grandes de (NLS) les cas *défocalisants* $F(u) = +|u|^{\gamma-1} u$ et *focalisants* $F(u) = -|u|^{\gamma-1} u$ sont différents.

Fig. 2.2: NLS sur \mathbb{R}^n en dimension $n \geq 3$

- Pour une non-linéarité *défocalisante*, la conservation de l'hamiltonien

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{2}{\gamma + 1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^{\gamma+1} dx \quad (2.20)$$

et de la norme L^2 donnent une borne uniforme sur la norme H^1 . Cela permet d'obtenir que (NLS) est globalement bien posé dans H^1 dans le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$.

Ce type d'argument (de bootstrap) peut s'étendre à des données H^s , pour $s > s_c$ assez proche de 1, lorsque $0 \leq s_c < 1$. Dans ce cas sous-critique, on ne peut pas utiliser la conservation de l'hamiltonien mais on peut substituer une version tronquée en fréquence qui permet de contrôler la norme H^s de la solution de (NLS) (méthode I, voir par exemple [64], [67], [309], on renvoie aussi aux travaux de Bourgain [37]).

Dans le cas \dot{H}^1 critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n-2}$, la borne a priori sur la norme H^1 ne suffit plus à garantir le caractère globalement bien posé. Ce cas a été traité dans [65] en dimension 3 et ensuite [308], [263] en dimensions supérieures (des résultats de Bourgain [38] traitaient le cas radial). Pour cela, il est nécessaire d'obtenir d'autres estimations a priori sur des normes temps-espace de la solution. Un point de départ très utile est l'estimation de Morawetz d'interaction, démontrée dans [67] par Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao (voir aussi la présentation de Hassel, Tao et Wunsch dans [155] et de Planchon et Vega dans [256])

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx dt \lesssim \|u\|_{L^\infty H^1(\mathbb{R}^3)}, \quad (2.21)$$

et pour $n \geq 4$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(t, x)|^2 |u(t, y)|^2}{|x - y|^3} dx dy dt \lesssim \|u\|_{L^\infty H^1(\mathbb{R}^n)} \quad (2.22)$$

La stratégie en dimension 3 est alors d'utiliser cette information pour contrôler la norme $L_{t,x}^{10}$ de la solution et justifier une non-explosion. La difficulté principale pour aboutir à cela est de prévenir la possibilité d'une cascade d'énergie vers les hautes fréquences cela est justifié au moyen d'une estimation de masse localisée en fréquence combiné avec une utilisation intensive d'estimations de Strichartz. D'autre part, ces idées combinées avec l'approche par éléments critiques de Kenig et Merle [186], ont aussi permis de montrer que dans le cas L^2 critique *défocalisant*, le problème de Cauchy est globalement bien posé à données grandes dans L^2 (Dodson, [102]). Un point clé de la preuve est une version localisée en fréquence des estimations de Morawetz d'interaction (2.21), (2.22).

- Dans le cas *focalisant*, la conservation de l'hamiltonien

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t, x)|^2 dx - \frac{2}{\gamma + 1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^{\gamma+1} dx \quad (2.23)$$

n'implique pas automatiquement un contrôle de la norme \dot{H}^1 . En utilisant de plus la conservation de la norme L^2 combinée avec l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|v\|_{L^{\gamma+1}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma+1} \leq C_{\gamma+1} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\gamma+1 - \frac{n(\gamma-1)}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n(\gamma-1)}{2}} \quad (2.24)$$

on obtient une borne uniforme sur $\|\nabla u\|_{L^2}$ si $\gamma < 1 + \frac{4}{n}$ et aussi dans le cas critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ si

$$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{C_{2+\frac{4}{n}}} \right)^{\frac{n}{4}} = \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.25)$$

où Q est l'état fondamental de l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire l'unique solution radiale positive à décroissance exponentielle, de l'équation elliptique associée

$$\Delta Q + Q^{1+\frac{4}{n}} = Q \quad (2.26)$$

(voir Weinstein, [311]). Lorsque $\gamma < 1 + \frac{4}{n}$, on en déduit donc que (NLS) est globalement bien posé dans H^1 . Dans le cas $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$, on a que (NLS) est globalement bien posé pour des données initiales dans H^1 vérifiant aussi (2.25). Sous la même hypothèse (2.25), Dodson dans [103] a récemment montré l'existence globale dans L^2 .

En faisant le calcul exact de viriel, on a

$$\partial_t^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^2 |x|^2 dx = 16H(u_0) - \frac{4(\gamma-1)n-4}{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^{\gamma+1} dx. \quad (2.27)$$

Donc on en déduit le critère de Glassey [145] : si $\gamma \geq 1 + \frac{4}{n}$ toute donnée initiale de variance finie et d'énergie négative va exploser en temps fini dans H^1 (voir aussi [184]). Une question aussi intéressante concerne la description de l'explosion. Dans le cas critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ plusieurs régimes d'explosion sont connus. L'un s'obtient explicitement grâce à la transformation pseudo-conforme appliquée à l'état fondamental Q

$$u(t, x) = \frac{e^{i\frac{|x|^2}{4(T-t)}}}{(T-t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{i}{(T-t)}} Q\left(\frac{x}{T-t}\right),$$

la norme L^2 du gradient explose comme $\frac{1}{T-t}$. La norme L^2 de cette solution est exactement la norme de Q dans L^2 . Merle a montré que toutes les solutions explosives de masse critique et d'énergie finie sont de ce type, modulo les invariants de l'équation [223]. En masse sur-critique, $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, Bourgain et Wang ont montré dans [41] la persistance de solutions explosives en $1/(T-t)$, avec profil du même type. Enfin, l'existence de solutions explosant en $\sqrt{\frac{\log \log |T-t|}{|T-t|}}$ a été établie par Perelman [245] et par Merle et Raphaël [226], [225], [224].

Comportement asymptotique

Revenons maintenant à l'étude des solutions de (NLS) avec temps maximal d'existence infini. Une question naturelle est de décrire le comportement asymptotique de ces solutions. Les résultats d'existence globale décrits ci-dessus ont été obtenus essentiellement par un argument de point fixe dans des espaces de type $L^\infty H^s \cap L^p L^q$, en utilisant les estimations de Strichartz et au besoin d'autres estimations a priori de type Morawetz combinées avec convenables lois de conservation. Comme conséquence, cette méthode montre aussi que les solutions d'un problème non-linéaire sont en un certain sens petites dans des espaces L^q lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. On en déduit alors qu'en temps grand la contribution de la non-linéarité est dominée par la partie linéaire et donc asymptotiquement la dynamique non-linéaire est approchée par une dynamique linéaire. En particulier, cela dit aussi qu'asymptotiquement les solutions du problème non-linéaire (NLS) vérifient les propriétés dispersives. Cette remarque est à l'origine du scattering ou diffusion dans la théorie de NLS. On dira que le problème de Cauchy non-linéaire (NLS) a la propriété de scattering dans H si pour toute solution globale $u \in C(\mathbb{R}, H)$ de (NLS) il existe des données de diffusion $u_\pm \in H$ telles que

$$\|u(t) - e^{it\Delta} u_\pm\|_H \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. Le choix de l'espace H est lié au choix des données initiales afin d'obtenir un caractère globalement bien posé de (NLS). Décrivons maintenant brièvement quelques résultats connus. Dans le cas des *non-linéarités générales* $F(u)$ de type puissance (2.1) on a la propriété de scattering

- dans H^1 si $1 + \frac{4}{n} < \gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$ pour données initiales petites en norme ;
- dans L^2 si $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ ($s_c = 0$) pour données initiales petites en norme.

Remarquons que dans le cas critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n-2}$ on a scattering dans \dot{H}^1 pour données initiales petites en norme. On donne une idée de la preuve dans le cas de (NLS) avec $F(u) = |u|^{1+\frac{4}{n-2}}$, qui est un exemple modèle pour les non-linéarités puissances qui ne vérifient pas les lois de conservation. Avec les arguments déjà traités on a que dans ce cas (NLS) est globalement bien posé à données petites dans H^1 et aussi dans \dot{H}^1 ; de plus $u(t, x) \in L^p(\mathbb{R}; \dot{H}^{1,q}(\mathbb{R}^n))$ pour certains couples (p, q) admissibles. Pour montrer que cette solution a la propriété de scattering dans \dot{H}^1 , un argument classique souvent utilisé est le critère de Cauchy suivant

si $\|z(t_1) - z(t_2)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ lorsque $t_1, t_2 \rightarrow +\infty$, alors il existe $z_+ \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que
 $\|z(t) - z_+\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Dans notre cas $z(t, x) = e^{-it\Delta} u(t, x)$, donc si on montre

$$\|e^{-it_2\Delta} u(t_2) - e^{-it_1\Delta} u(t_1)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t_1 \leq t_2 \rightarrow \pm\infty,$$

on peut conclure que la solution globale $u(t, x)$ a la propriété de scattering annoncée. En combinant les estimations de l'opérateur T^* (dans les inégalités de Strichartz (2.15)), les inégalités de Hölder et de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} \|e^{-it_2\Delta} u(t_2) - e^{-it_1\Delta} u(t_1)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{-is\Delta} F(u(s)) ds \right\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u\|_{L^p([t_1, t_2]; \dot{H}^{1,q}(\mathbb{R}^n))}^{1+\frac{4}{n-2}}. \end{aligned}$$

Puisque $u(t, x) \in L^p(\mathbb{R}; \dot{H}^{1,q}(\mathbb{R}^n))$, le dernier terme disparaît lorsque $t_1 \leq t_2$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

○ Dans le cas des non-linéarités *défocalisantes* $F(u) = |u|^{\gamma-1} u$, grâce aussi aux lois de conservations et d'autres estimations de type Morawetz on peut obtenir des résultats de scattering pour données grandes dans les cas suivants

- dans H^1 dans les cas $1 + \frac{4}{n} < \gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$ ([143], [65], [291])
- dans \dot{H}^1 dans le cas $\gamma = 1 + \frac{4}{n-2}$ ([66] n=3, [38], [309], [263])
- dans L^2 dans le cas critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ ([102]);
- dans $\Sigma = H^1 \cap \{u \in L^2, xu \in L^2\}$ dans les cas $1 + \gamma_0 < \gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$, où $\gamma_0 = \frac{2-n+\sqrt{n^2+12n+4}}{2n}$ est l'exposant de Strauss ([140], [300]).

Le dernier résultat permet donc de descendre en dessous du cas critique $1 + \frac{4}{n}$ en demandant plus de localisation. Il est, de plus, possible d'avoir des résultats de type scattering en dessous de l'exposant de Strauss, mais en étudiant la convergence dans une topologie plus faible : par exemple pour $\gamma > 1 + \frac{2}{n}$ toute solution globale de régularité $C(\mathbb{R}, \Sigma)$ vérifie que $e^{-it\Delta}u(t)$ a une limite forte dans L^2 lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (voir [301]). Il y a aussi beaucoup d'autres résultats (Ginibre et Velo [142], Lin et Strauss [212], Tsutsumi [300], T. Cazenave et F. Weissler [58], Nakanishi et Ozawa [237], Ozawa [242], Ginibre et Ozawa [137], R. Carles [51], et d'autres).

- Pour toutes les non-linéarités $F(u) = \pm |u|^{\gamma-1}u$, si $\gamma \leq 1 + \frac{2}{n}$ il n'y a pas de scattering. Plus précisément, même pour une solution globale avec régularité $C(\mathbb{R}, \Sigma)$ il n'existe pas de limite forte L^2 pour $e^{-it\Delta}u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ sauf pour la solution nulle ([279], [24], [302]).

○ Dans le cas *focalisant*, le scattering à données grandes ne peut pas toujours avoir lieu. Une obstruction vient de la présence des ondes solitaires $e^{iEt}Q(x)$ qui sont des solutions non dispersives. Le comportement générique attendu appelé parfois conjecture de résolution en solitons est qu'en temps grand la solution se décompose en une superposition d'ondes solitaires et d'une solutions dispersive de l'équation linéaire. La justification de ce comportement dans une telle généralité reste une question encore largement ouverte sauf dans le cas de la non-linéarité cubique en dimension 1 pour laquelle la théorie de la diffusion inverse (inverse scattering) peut être utilisée. Cependant des résultats de scattering à données avec condition de petitesse optimale ont été obtenus par des stratégies spécifiques (voir par exemple Kenig et Merle [186] pour le cas critique \dot{H}^1 , Keraani [192], Tao, Visan et Zhang [290] pour le cas critique L^2 et récemment Dodson [103]). Plus précisément, dans le cas L^2 critique, il y a existence globale et scattering pour toute donnée initiale u_0 vérifiant $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ où Q est l'unique solution radiale positive décroissante de (2.26). Dans le cas \dot{H}^1 critique, le rôle joué par Q est remplacé par W la solution explicite radiale d'énergie finie de

$$\Delta W + |W|^{\frac{4}{N-2}}W = 0. \quad (2.28)$$

Dans le cas radial, Kenig et Merle [186] montrent que pour des données initiales u_0 vérifiant $H(u_0) < H(W)$ les solutions sont globales et dispersent si $\|u_0\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}$ alors qu'elles explosent si $\|u_0\|_{\dot{H}^1} > \|W\|_{\dot{H}^1}$. Ces phénomènes sont compatibles avec l'instabilité des ondes solitaires. Dans le cas sous-critique $\gamma < 1 + 4/n$, les ondes solitaires sont orbitalement stables, dans le sens où toute solution H^1 issue d'une perturbation suffisamment petite d'une onde solitaire vérifie

$$\inf_{\gamma, h} \|u(t) - e^{i\gamma}Q(x+h)\|_{H^1} \leq \varepsilon.$$

Cela a été montré par [56], [311], et peut s'obtenir par la méthode générale de Grillakis-Shatah-Strauss [152], [151]. Une question très intéressante dans ce cadre est d'établir la stabilité asymptotique, c'est à dire montrer qu'il existe des paramètres de modulation $\gamma(t)$, $h(t)$ et des états u_\pm tels que

$$\|u(t) - e^{i\gamma(t)}Q(x+h(t)) - e^{it\Delta}u_\pm\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Il y a des résultats dans cette direction ([84], [20], [282], [48]), mais ils demandent souvent l'ajout d'un potentiel et des hypothèses ad hoc.

2.2 Equation de Schrödinger sur variétés non-compactes

Nous nous intéressons maintenant à l'équation de Schrödinger semi-linéaire suivante sur une variété riemannienne (M, g)

$$(NLSM) \quad \begin{cases} i \partial_t u + \Delta_g u = F(u), \\ u(0) = f \end{cases}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M associé à la métrique g . L'étude de l'influence de la géométrie sur les propriétés qualitatives des solutions du problème de Cauchy, introduites dans le paragraphe précédent, a été un nouveau sujet très actif ces dernières années.

En ce qui concerne le problème de Cauchy local, malgré l'absence d'invariance par changement d'échelle, on s'attend toujours à ce que pour $s < \max(0, s_c)$, où s_c est l'indice critique de \mathbb{R}^n , le problème soit mal posé. Cependant, l'étude pour $s \geq s_c$ sur M présente de vraies difficultés et de nouveaux phénomènes apparaissent par rapport au cas plat. Plus précisément, la courbure de la variété M influence les propriétés dispersives du problème de Cauchy et en conséquence certains résultats de régularité des solutions de (NLSM). Dans le cadre compact, la courbure positive détruit les propriétés dispersives de l'équation et comme montré par Burq-Gérard-Tzvetkov [47] les inégalités de Strichartz font intervenir des pertes de dérivées, ces pertes sont nécessaires par exemple dans le cas des sphères. Il n'est donc pas assuré que l'indice s_c soit effectivement critique. Par exemple, pour l'équation cubique en dimension 2, l'indice s_c est zéro. Dans le cas du tore en dimension 2, Bourgain dans [35] a montré que le problème de Cauchy est bien posé dans H^ϵ pour tout ϵ strictement positif. D'autre part Burq, Gérard et Tzvetkov dans [43] ont montré que sur S^2 l'indice de régularité critique effectif est en fait $1/4$: il n'y a pas de flot uniformément continu sur les bornés dans H^s pour $s < 1/4$ et le problème est bien posé seulement dans H^s , $s > 1/4$. Remarquons que pour ce type de problèmes on a besoin de recourir à d'autres outils d'analyse de Fourier, en particulier les généralisations multi-linéaires des estimations de Strichartz jouent un rôle crucial. Il y a quand même des résultats pour d'autres non-linéarités et variétés sur lesquelles on a un caractère bien posé pour des données initiales qui approchent la régularité s_c . Par exemple, sur S^4 pour des non-linéarités cubiques, Burq, Gérard et Tzvetkov montrent un caractère localement bien posé de (NLSM) dans H^s , $s > 1 = s_c$ et pour des non-linéarités quadratiques, en collaboration avec P. Gérard dans [153] on montre un caractère localement bien posé de (NLSM) dans H^s , $s > \frac{1}{2}$. Il reste donc de très nombreuses questions intéressantes dans ce cadre compact. De plus, vu la différence importante entre \mathbb{T}^2 et S^2 , qui n'est due ni à la compacité, ni à l'existence de trajectoires captées, il est naturel de penser que dans le cas de variétés sans bord c'est la courbure positive qui en est la cause. Dans le cas de variétés non-compactes à courbure négative on peut s'attendre donc à de meilleures propriétés dispersives des solutions libres. Ainsi un point crucial de l'étude est de quantifier précisément ces effets. Pour cela on aura besoin d'utiliser des outils d'analyse harmonique plus raffinés.

Dans la suite on va étudier le problème de Cauchy (NLSW) dans le cas de l'espace hyperbolique $M = H^n(\mathbb{R})$ et ensuite on généralisera aux espaces de Damek-Ricci $M = S$.

2.2.1 Propriétés dispersives sur les espaces hyperboliques $M = \mathbb{H}^n$

Considérons d'abord le problème de Cauchy linéaire sur \mathbb{H}^n :

$$\begin{cases} i \partial_t u(t, x) + \Delta_{\mathbb{H}^n} u(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{H}^n, \\ u(0, x) = f(x) \end{cases} \quad (2.29)$$

en utilisant les opérateurs unitaires $e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}$, la solution peut s'écrire

$$u(t) = e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} f. \quad (2.30)$$

Dans une première étude, ayant comme but de trouver l'expression explicite des solutions linéaires de (2.29) pour en déduire les propriétés dispersives, Banica dans [21] utilise comme dans le cas euclidien les transformée de Fourier et son inverse. En combinant avec certaines propriétés des fonctions de Legendre et le coefficient de Harish-Chandra sur \mathbb{H}^n , elle obtient les formules explicites suivantes : en dimension impaires $n \geq 3$

$$u(t, x) = c \frac{e^{-it\frac{(n-1)^2}{4}}}{t^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{H}^n} f(y) \left(\frac{\partial_{\tilde{r}}}{\sinh \tilde{r}} \right)^{\frac{n-1}{2}} e^{i\frac{\tilde{r}^2}{4t}} dy, \quad (2.31)$$

et en dimension paires $n \geq 2$

$$u(t, x) = c \frac{e^{-it\frac{(n-1)^2}{4}}}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{H}^n} f(y) \left(\frac{\partial_{\tilde{r}}}{\sinh \tilde{r}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_{\tilde{r}}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{s^2}{4t}s}}{\sqrt{\cosh s - \cosh \tilde{r}}} ds dy, \quad (2.32)$$

où $\tilde{r} = d_{\mathbb{H}^n}(x, y)$. Bien qu'explicites, on voit immédiatement qu'à cause de la distance \tilde{r} qui dépend de deux points x et y sur \mathbb{H}^n dans le terme $\left(\frac{\partial_{\tilde{r}}}{\sinh \tilde{r}} \right)^{\frac{n-1}{2}}$, ces formules ne sont pas faciles à manipuler pour pouvoir obtenir en toute généralité les estimations dispersives et aussi celles de Strichartz. Pour cela, Banica a besoin d'imposer des conditions de radialités sur les données initiales qui permettent d'obtenir les estimations dispersives à poids suivantes en dimension $n \geq 3$:

$$\tilde{w}(x) |u(t, x)| \leq C \left(|t|^{-\frac{n}{2}} + |t|^{-\frac{3}{2}} \right) \int_{\mathbb{H}^n} |f(y)| \tilde{w}(y)^{-1} dy. \quad (2.33)$$

où $\tilde{w}(x) = \frac{\sinh r}{r}$ et $r = d_{\mathbb{H}^n}(x, 0)$ est la distance géodésique de x à l'origine. Elle en déduit, en suivant la stratégie rappelée avant dans le cas euclidien, les estimations de Strichartz homogènes à poids suivantes (locales en temps) :

$$\|\tilde{w}^{1-\frac{2}{q}} u\|_{L^p([0, T]; L^q(\mathbb{H}^n))} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)}. \quad (2.34)$$

pour tout temps T fini et tout couple (p, q) $\frac{n}{2}$ -admissible. Les estimations homogènes sont globales en dimension 3 (voir aussi [252]). Ce type d'estimations *locales en temps* sur des variétés asymptotiquement hyperboliques a été obtenu ensuite par Bouclet (voir [34]). Ainsi, on commence à voir apparaître quelques nouveaux phénomènes en courbure négative par rapport au cas plat qui donnent envie de mieux comprendre l'influence de la géométrie sur les solutions de cette équation. En effet, dans ce contexte radial grâce aux poids $\tilde{w}(x)$ on voit qu'il y a une amélioration du comportement de la solution en espace, mais au niveau de la dispersion le taux de décroissance en temps semble être pire que le cas euclidien. D'ailleurs ce premier résultat n'a pas permis d'atteindre toutes les estimations de Strichartz globales en temps (sauf en dimension $n = 3$ où les comportements globaux sont les mêmes). Cela paraissait surprenant en considérant qu'on s'attendait à des meilleures propriétés dispersives par rapport au cas plat ! Cette approche analogue au cas euclidien montre aussi qu'il y a de vraies difficultés techniques à surmonter pour obtenir des résultats complets sur les propriétés dispersives dans le cadre variétés non-compactes. Cela suggère que pour obtenir les estimations dispersives et de Strichartz sans la condition de radialité sur les données initiales ou même dans le cas radial mais pour avoir des estimations de Strichartz globales en temps, il faut recourir à d'autres stratégies et aussi à une analyse harmonique plus raffinée qui tienne compte de la riche structure algébrique de ces espaces.

A la fin de ma thèse de doctorat, j'ai commencé à m'intéresser à ce type de questions au carrefour des EDP et de l'analyse harmonique. Dans [252], j'ai obtenu des estimations de Strichartz à poids non-homogènes (locales en temps) pour l'équation de Schrödinger perturbée par certains potentiels $V(t, x)$ très singulier par rapport au cas plat, avec des données initiales radiales. Ensuite, j'ai obtenu, avec une nouvelle stratégie dans [253], un résultat qui complétait celui de

Banica dans le contexte radial. En effet, j'ai trouvé les estimations optimales de Strichartz à poids globales en temps pour les solutions radiales de l'équation de Schrödinger non-homogène en dimension $n \geq 3$:

Théorème 2.2.1 *Soit $n \geq 3$. Dans le cas radial, la solution du problème de Cauchy non-homogène*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_{\mathbb{H}^n} u = F(t, x), \\ u(0, x) = f(r), \end{cases} \quad (2.35)$$

vérifie, pour tout couple (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) $\frac{n}{2}$ -admissible, c'est-à-dire

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}, \quad p \in [2, \infty] \text{ et } q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right], \quad (2.36)$$

les estimations de Strichartz à poids (globales en temps) suivantes

$$\|w^{1-\frac{2}{q}} u\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} + C \|w^{\frac{2}{\tilde{q}}-1} F\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; L^{\tilde{q}'}(\mathbb{H}^n))} \quad (2.37)$$

où $w(r) = j(r)^{\frac{1}{2}}$ et $j(r) = (\frac{\sinh r}{r})^{n-1}$ est le Jacobien de l'application exponentielle.

De plus, en dimension $n = 3$, on retrouve les estimations dispersives (globales en temps) à poids

$$\left(\frac{\sinh r}{r}\right) |u(t, x)| \leq \frac{C}{t^{\frac{3}{2}}} \left\| \left(\frac{r}{\sinh r}\right) f \right\|_{L^1(\mathbb{H}^3(\mathbb{R}))}. \quad (2.38)$$

Remarquons que la forte contrainte du caractère local en temps des (2.34) a été enlevée grâce aux inégalités (2.37) en dimension $n \geq 4$ et aussi les puissances des poids \tilde{w} ont été améliorés. En effet, les bonnes puissances des poids dans (2.37), comme remarqué ensuite par Banica, Carles et Staffilani dans [23], permettent d'élargir l'admissibilité des couples (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) par rapport au cas euclidien. Ainsi les estimations (2.37) impliquent aussi des estimations de Strichartz sans poids avec une admissibilité des couple (p, q) plus large que le cas euclidien. J'ai, en fait, obtenu les estimations de Strichartz à poids globales en temps ci-dessus à la fois pour l'équation de Schrödinger et pour l'équation des ondes directement sur les espaces plus généraux de Damek-Ricci, qui contiennent tous les espaces symétrique de type non-compact de rang 1 et en particulier les espaces hyperboliques. La nouvelle stratégie introduite dans [253] est de transformer l'équation sur la variété non-compacte en une équation sur \mathbb{R}^n perturbée par des potentiels V singuliers à l'infini de type critique $\sim |x|^{-2}$, qui rentrent dans le cadre de ceux étudiés par Burq, Planchon, Stalker et Tahvildar-Zadeh dans [45] (voir aussi [46]). J'ai cependant dû compléter leur résultat (seules les estimations de Strichartz homogènes étaient établies) pour le problème perturbé sur \mathbb{R}^n en obtenant les estimations de Strichartz non-homogènes dont j'avais besoin pour pouvoir obtenir les correspondantes sur les variétés. Comme déjà mentionné, il y a quand même une difficulté pour le passage des estimations homogènes aux estimations non-homogènes car l'argument usuel qui consiste à recourir au Lemma de Christ-Kiselev n'est pas valable pour l'endpoint et le formalisme abstrait de Keel et Tao ne s'applique pas en l'absence d'inégalités dispersives ([61], [185]). Je donnerai plus de détails de ces résultats directement dans le contexte plus général des espaces de Damek-Ricci dans le paragraphe 2.3.1. Ensuite, avec la même stratégie introduite dans [251], le cas des fonctions radiales sur les variétés rotationnellement symétriques a été étudié par Banica et Duyckaerts dans [22].

Ensuite, en collaboration avec Jean-Philippe Anker, on a réussi dans [6] à trouver un juste mélange de certains ingrédients clés de l'étude de l'équation de Schrödinger avec la riche structure géométrique et algébrique des espaces hyperboliques, cela nous a permis d'enlever les hypothèses de radialité et faire ainsi une étude exhaustive des propriétés dispersives de (2.29). Enfin, en

collaboration avec Jean-Philippe Anker et Maria Vallarino, on a généralisé ce résultat dans [7] aux espaces de Damek-Ricci et on verra cela dans le paragraphe 2.3.3. Je vais présenter maintenant les idées clés de notre approche dans [6]. Revenons au problème de Cauchy linéaire associé à l'équation de Schrödinger (2.29). En utilisant la propriété de noyau de convolution des opérateurs, on écrit la solution

$$u(t, x) = e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} f(x) = f * s_t(x) = \int_{\mathbb{H}^n} s_t(d(x, y)) f(y) dy.$$

La première remarque à faire est que le noyau de convolution s_t est K -biinvariant sur G , donc s_t est une fonction radiale sur $\mathbb{H}^n = G/K$ et il peut s'exprimer en utilisant la transformée sphérique de Fourier inverse (1.17) :

$$s_t(r) = \text{const. } e^{-i(\frac{n-1}{2})^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda^2} \varphi_\lambda(r) \frac{d\lambda}{|\mathbf{c}(\lambda)|^2}. \quad (2.39)$$

Grâce à la propriété de K -invariance du noyau sur \mathbb{H}^n et à la factorisation de la transformée sphérique de Fourier, en utilisant la transformée d'Abel on peut faire mieux et rendre cette expression du noyau (2.39) plus explicite. En effet, en utilisant la factorisation et la transformée d'Abel inverse, rappelées dans le paragraphe 1.2, on obtient :

$$s_t(r) = \text{const. } (it)^{-\frac{1}{2}} e^{-i(\frac{n-1}{2})^2 t} \left(-\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{i}{4} \frac{r^2}{t}}. \quad (2.40)$$

Ici $(it)^{-\frac{1}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}\text{sign}(t)} |t|^{-\frac{1}{2}}$ et dans le cas de dimension paire, les dérivées fractionnaires deviennent

$$\left(-\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{i}{4} \frac{r^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|r|}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\sinh s} \frac{\partial}{\partial s}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i}{4} \frac{s^2}{t}} \frac{\sinh s ds}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}}. \quad (2.41)$$

Ainsi, en faisant une analyse raffinée de ces expressions du noyau $s_t(r)$ (voir la preuve de la Proposition 3.1 p. 1859-1861 dans [6]), on obtient les estimations ponctuelles suivantes du noyau de Schrödinger sur \mathbb{H}^n , $n \geq 2$

$$|s_t(r)| \leq C \begin{cases} |t|^{-n/2} j(r)^{-1/2} & \text{si } |t| \leq 1+r, \\ |t|^{-3/2} \varphi_0(r) & \text{si } |t| \geq 1+r, \end{cases} \quad (2.42)$$

où $j(r) = \left(\frac{\sinh r}{r}\right)^{n-1} \asymp \left(\frac{e^r}{1+r}\right)^{n-1}$ est le jacobien de l'application exponentielle et $\varphi_0(r) \asymp (1+r) e^{-\frac{n-1}{2}r}$ est la "ground spherical function".

Pour donner une idée des techniques utilisées dans cette analyse du noyau pour obtenir (2.42), dans la section 2.3.2 on présentera directement la preuve des estimations ponctuelles du noyau des opérateurs plus généraux $e^{\tau\Delta_S}$, lorsque $\tau \in \mathbb{C}^*$ avec $\text{Re } \tau \geq 0$ et Δ_S est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les espaces de Damek-Ricci S . Ces estimations peuvent être pensées comme des estimations ponctuelles du noyau de la chaleur du Laplacien Δ_S en temps complexe et elles s'obtiennent aussi en utilisant la transformée d'Abel inverse sur les espaces de Damek-Ricci. Des résultats similaires avaient été obtenu dans [100, 221] sur les espaces hyperboliques. Lorsque $\tau \in i\mathbb{R}^*$, on obtient en particulier les estimations ponctuelles du noyau de Schrödinger associé à Δ_S .

Remarquons qu'en dimension $n = 3$ on retrouve les mêmes résultats que ceux du cas radial (2.33) et (2.38), mais pour les autres dimensions elles sont meilleures et elles vont nous permettre d'établir des inégalités dispersives optimales $L^{q'} \rightarrow L^q$. Plus précisément, il faut quand même remarquer que dans le comportement du noyau on retrouve des bons poids en espace, mais qu'on retrouve aussi le taux de décroissance $|t|^{-3/2}$ en temps grands qui est pire que dans le cas euclidien en dimensions $n \geq 4$. Vis à vis des attentes...étonnant mais vrai ! Si on suivait la même stratégie

d'interpolation du cas euclidien, on n'arriverait donc même pas à obtenir en temps grand les inégalités dispersives $L^{q'} \rightarrow L^q$ avec des puissances analogues à celles de \mathbb{R}^n .

Cependant l'approche "euclidienne" habituelle n'utilise pas toutes les informations fournies par l'analyse du noyau (2.42) et l'élément très important de l'analyse harmonique sur les espaces symétriques de rang 1 de type non-compact est le phénomène de Kunze-Stein. En effet, on peut d'abord remarquer que la décroissance spatiale du noyau fournie par (2.42) permet d'obtenir que le noyau de s_t est dans L^q avec q fini, ce qui n'est pas vrai sur \mathbb{R}^n .

Cela est fourni par le corollaire crucial suivant :

Corollaire 2.2.1 *Soit $2 < q < \infty$ et $1 \leq \alpha \leq \infty$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle qu'on a les estimations suivantes du noyau dans les espaces de Lorentz :*

$$\|s_t\|_{L^{q,\alpha}} \leq C \begin{cases} |t|^{-n/2} & \text{si } 0 < |t| \leq 1, \\ |t|^{-3/2} & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (2.43)$$

Preuve. On rappelle que les espaces de Lorentz $L^{q,\alpha}(\mathbb{H}^n)$ sont des variantes classiques des espaces de Lebesgue dont les normes sont définies par

$$\|f\|_{L^{q,\alpha}} = \begin{cases} \left[\int_0^{+\infty} \{s^{1/q} f^*(s)\}^\alpha \frac{ds}{s} \right]^{1/\alpha} & \text{si } 1 \leq \alpha < \infty, \\ \sup_{s>0} s^{1/q} f^*(s) & \text{si } \alpha = \infty, \end{cases}$$

où f^* désigne le rearrangement décroissant de f . En particulier, si f est une fonction radiale positive sur \mathbb{H}^n , alors $f^* = f \circ V^{-1}$, où

$$V(r) = C \int_0^r (\sinh s)^{n-1} ds \asymp \begin{cases} r^n & \text{lorsque } r \rightarrow 0 \\ e^{(n-1)r} & \text{lorsque } r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

est le volume de la boule de rayon $r > 0$ in \mathbb{H}^n . Donc

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{q,\alpha}} &= \left[\int_0^{+\infty} \{V(r)^{1/q} f(r)\}^\alpha \frac{V'(r)}{V(r)} dr \right]^{1/\alpha} \\ &\asymp \left[\int_0^1 f(r)^\alpha r^{\frac{\alpha n}{q}-1} dr \right]^{1/\alpha} + \left[\int_1^{+\infty} f(r)^\alpha e^{\frac{\alpha(n-1)}{q}r} dr \right]^{1/\alpha} \end{aligned}$$

si $1 \leq \alpha < \infty$ et

$$\|f\|_{L^{q,\infty}} = \sup_{r>0} V(r)^{1/q} f(r) \asymp \sup_{0 < r < 1} r^{\frac{n}{q}} f(r) + \sup_{r \geq 1} e^{\frac{n-1}{q}r} f(r).$$

Grâce à ces considerations et (2.42), on peut conclure facilement.

Revenons maintenant aux propriétés de continuité sur L^q du propagateur de Schrödinger $e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}$ sur \mathbb{H}^n . On va alors utiliser la version optimale (1.10) du phénomène de Kunze-Stein sur \mathbb{H}^n (due à Cowling, Setti, Meda, et Ionescu), qui est une propriété importante de la convolution sur les espaces symétriques de type non-compact et de rang 1, rappelée dans le premier chapitre et qui n'est pas valable dans le cas euclidien.

Théorème 2.2.2 *Soit $q, \tilde{q} \in (2, \infty]$. Alors, pour $0 < |t| < 1$, on a les estimations dispersives*

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{H}^n)} \leq C |t|^{-\max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}\}n} \|f\|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbb{H}^n)}$$

alors que, pour $|t| \geq 1$, on obtient

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{H}^n)} \leq C |t|^{-\frac{3}{2}} \|f\|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbb{H}^n)}.$$

Si $q = \tilde{q} = 2$, on a bien sûr la conservation de la norme $L^2(\mathbb{H}^n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.1 Dans le cas euclidien, les estimations en temps petit sont similaires pour $q = \tilde{q}$, les autres en temps petits ne sont pas valables, mais en temps grand les estimations sont totalement différentes et elles sont meilleures.

Preuve. Ces estimations sont obtenues par interpolation et en utilisant le Corollaire 2.2.1. En particulier, les estimations en temps petit suivent de

$$\begin{cases} \|e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}\|_{L^1 \rightarrow L^q} = \|s_t\|_{L^q} \leq C_q |t|^{-\frac{n}{2}} & \forall q > 2, \\ \|e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}\|_{L^{q'} \rightarrow L^\infty} = \|s_t\|_{L^q} \leq C_q |t|^{-\frac{n}{2}} & \forall q > 2, \\ \|e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1, \end{cases}$$

et en temps grands de

$$\begin{cases} \|e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}\|_{L^1 \rightarrow L^q} = \|s_t\|_{L^q} \leq C_q |t|^{-\frac{3}{2}} & \forall q > 2, \\ \|e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}\|_{L^{q'} \rightarrow L^\infty} = \|s_t\|_{L^q} \leq C_q |t|^{-\frac{3}{2}} & \forall q > 2, \\ \|e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}\|_{L^{q'} \rightarrow L^q} \leq C_q \|s_t\|_{L^{q,1}} \leq C_q |t|^{-\frac{3}{2}} & \forall q > 2. \end{cases}$$

Remarquons, encore une fois, qu'ici l'ingrédient clé a été le phénomène de convolution de Kunze-Stein sur l'espace hyperbolique.

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger linéaire non-homogène sur \mathbb{H}^n :

$$\begin{cases} i \partial_t u(t, x) + \Delta_{\mathbb{H}^n} u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases}$$

dont la solution est donnée par la formule de Duhamel

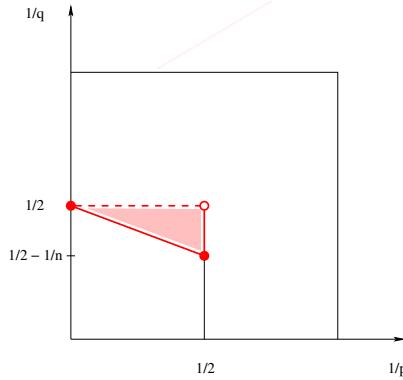
$$u(t, x) = e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} f(x) - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_{\mathbb{H}^n}} F(s, x) ds. \quad (2.44)$$

Ainsi, en utilisant les estimations dispersives et la stratégie du TT^* comme dans le cas euclidien, on en déduit les estimations de Strichartz sur \mathbb{H}^n globales en temps suivantes, sans hypothèse de radialité.

Théorème 2.2.3 Supposons que $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ appartiennent au triangle $T_n = \{(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}) \mid \frac{2}{p} + \frac{n}{q} \geq \frac{n}{2}\} \cup \{(0, \frac{1}{2})\}$. Alors on a les estimations de Strichartz suivantes

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|f\|_{L_x^2} + C \|F\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}}. \quad (2.45)$$

Remarque 2.2.2 L'ensemble T_n des couples admissibles sur \mathbb{H}^n est beaucoup plus large que l'ensemble correspondant I_n sur \mathbb{R}^n (qui est seulement le côté le plus bas du triangle). Ce nouveau phénomène frappant avait déjà été remarqué dans [23] pour des solutions radiales, en utilisant les estimations de Strichartz à poids optimales de [253]. Cela peut être interprété comme un effet de la géométrie à courbure négative sur la dispersion. En fait la zone d'admissibilité pourrait être même plus grande si la région $\frac{2}{p} + \frac{n}{q} < \frac{n}{2}$ n'était pas exclue pour des raisons purement locales. Cela se produit pour les équations dispersives sur les arbres homogènes. Cela a été étudié pour le cas de l'équation de Schrödinger dans la thèse de Doctorat de Alaa Jamal Eddine [113], coencadrée avec Jean-Philippe Anker.

Fig. 2.3: Admissibilité sur \mathbb{H}^n en dimension $n \geq 3$

Preuve. En suivant la même stratégie développée par Kato [181], Ginibre & Velo [139] et Keel & Tao [185] dans \mathbb{R}^n , considérons l'opérateur

$$Tf(t, x) = e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} f(x)$$

et son adjoint formel

$$T^*F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\Delta_{\mathbb{H}^n}} F(s, x) ds.$$

On doit alors montrer la borne $L_t^{p'} L_x^{q'} \rightarrow L_t^p L_x^q$ des opérateurs

$$TT^*F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-s)\Delta_{\mathbb{H}^n}} F(s, x) ds \quad (2.46)$$

et de sa version tronquée

$$\widetilde{TT^*}F(t, x) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_{\mathbb{H}^n}} F(s, x) ds, \quad (2.47)$$

pour tout couple admissible (p, q) . Le point limite $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) = (0, \frac{1}{2})$ est couvert par la conservation L^2 et l'endpoint $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n})$ en dimension $n \geq 3$ sera discuté après. Il reste donc les couples (p, q) tel que $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ et $(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})\frac{n}{2} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$. En utilisant les estimations dispersives (avec $\tilde{q} = q$) dans le théorème 2.2.2, les normes $L_t^p L_x^q$ de (2.46) et (2.47) sont majorées par

$$\left\| \int_{|t-s| \leq 1} |t-s|^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})n} \|F(s)\|_{L_x^{q'}} ds \right\|_{L_t^p} + \left\| \int_{|t-s| \geq 1} |t-s|^{-\frac{3}{2}} \|F(s)\|_{L_x^{q'}} ds \right\|_{L_t^p}. \quad (2.48)$$

D'un côté, le noyau de convolution $|t-s|^{-\frac{3}{2}} \mathbb{1}_{\{|t-s| \geq 1\}}$ sur \mathbb{R} définit un opérateur borné de $L_s^{p_1}$ to $L_t^{p_2}$, pour tout $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, en particulier de $L_s^{p'}$ vers L_t^p , pour tout $2 \leq p \leq \infty$. De l'autre côté, le noyau de convolution $|t-s|^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})n} \mathbb{1}_{\{|t-s| \leq 1\}}$ définit un opérateur borné de $L_s^{p_1}$ vers $L_t^{p_2}$, pour¹ tout $1 < p_1, p_2 < \infty$ tel que $0 \leq \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \leq 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})n$, en particulier de $L_s^{p'}$ vers L_t^p , pour tout $2 \leq p < \infty$ tel que $\frac{1}{p} \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})\frac{n}{2}$. Considérons aussi l'endpoint $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n})$ en dimension $n \geq 3$. Les intégrales sur $|t-s| \geq 1$ sont estimées comme avant. Les intégrales sur $|t-s| \leq 1$ sont

1. En effet, pour tout $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ tel que $0 \leq \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \leq 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})n$, sauf pour les endpoints duals $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) = (1, (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})\frac{n}{2})$ et $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) = (1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})\frac{n}{2}, 0)$.

traitées comme dans [185], sauf que seulement les petits intervalles dyadiques sont concernés. Les indices sont enfin découplés en utilisant à nouveau l'argument TT^* .

Un article connecté a été produit indépendamment et en même temps par Ionescu et Staffilani [171]. Dans notre travail [6], on s'est intéressé surtout à obtenir des estimations dispersives et de Strichartz optimales, avec des applications de caractère bien posé et de scattering pour (NLSM) avec des non-linéarités très générales de *type puissance* (2.1). Le but dans [171] était plutôt d'obtenir des inégalités de type Morawetz pour étudier le scattering et la complétude asymptotique dans H^1 pour (NLSM) avec des non-linéarités *défocalisantes* à données grandes. Nos travaux, même s'il y a recouvrement, étaient donc plutôt complémentaires que concurrents.

Plus précisément, leur approche utilise l'argument classique des moltiplicateurs (2.16) comme sur \mathbb{R}^n , mais la géométrie à l'infini de l'espace hyperbolique leur permet de construire un poids $a(x)$ convexe ($\text{Hess } a \geq 0$), dont le Laplacien est égal à 1. Cela donne des nouvelles estimations de type Morawetz sur \mathbb{H}^n , $n \geq 2$, pour des solutions u du problème non-linéaire (NLSM) :

$$\|u\|_{L^{\gamma+1}([0,T] \times \mathbb{H}^n)}^{\gamma+1} \leq C \sup_{t \in (-T,T)} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{H}^n)}. \quad (2.49)$$

Visiblement, elles sont meilleures que dans le cas euclidien.

2.2.2 Applications

On va présenter maintenant les résultats, qui ont pu être déduit sur \mathbb{H}^n pour l'étude du caractère bien posé du problème de Cauchy semi-linéaire (NLSM) et du scattering, avec des non-linéarités de *type puissance* (2.1). Comme rappelé dans le cadre euclidien, les ingrédients clés, dans l'argument de point fixe de Banach, sont les estimations de Strichartz du problème de Cauchy linéaire. On va voir comment ces nouvelles estimations de Strichartz pour une plus grande famille de couples admissibles et globales en temps en courbure négative ont permis d'obtenir des applications plus fortes que dans le cas plat.

Pour des non-linéarités $F(u)$ de *type puissance* (2.1), on a obtenu dans [6] le caractère

- localement bien posé dans H^1 dans le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$;
- globalement bien posé dans H^1 dans les cas $\gamma \leq 1 + \frac{4}{n-2}$ pour données initiales petites en norme.
- localement bien posé dans L^2 dans le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n}$;
- globalement bien posé dans L^2 dans les cas $\gamma \leq 1 + \frac{4}{n}$ pour données initiales petites en norme.

Remarquons que, même si sur \mathbb{H}^n on n'a pas les propriétés de scaling, l'indice de régularité critique s_c de \mathbb{R}^n est le même (voir [13]) et on retrouve les mêmes résultats que sur \mathbb{R}^n concernant le caractère localement bien posé de (NLSM) dans H^s . La figure 2.1.2 résume donc aussi le comportement sur \mathbb{H}^n . On peut noter qu'on peut montrer le caractère mal posé pour $0 < s < s_c$, en utilisant les mêmes phénomènes que dans le cas euclidien. En effet pour montrer ceci sur \mathbb{R}^n , on étudie l'évolution de certaines données initiales qui se concentrent en un point (voir par exemple [60], [2], la construction peut donc s'étendre au cas d'une variété (voir par exemple [296])). Les conséquences les plus frappantes des nouvelles estimations de Strichartz sont celles qui concernent le comportement de (NLSM) en temps grands. En particulier, on obtient que le caractère globalement bien posé à données petites dans L^2 et H^1 reste vrai pour les puissances correspondantes critique, mais de plus, contrairement au cas euclidien, il est aussi vrai pour toutes les puissances sous-critiques de (2.1) sans aucune loi de conservation. Dans le cas de \mathbb{R}^n , on a vu que ça reste un problème ouvert.

Donnons un énoncé précis et une idée de preuve dans le cas de régularité $L^2(\mathbb{H}^n)$.

Théorème 2.2.4 Si $1 < \gamma \leq 1 + \frac{4}{n}$, alors (NLSM) est globalement bien posé pour données initiales petites dans L^2 . De plus, dans le cas sous-critique $1 < \gamma < 1 + \frac{4}{n}$, (NLSM) est localement bien posé pour toute donnée dans L^2 .

Preuve. Comme dans le cas euclidien, on utilise un argument classique de point fixe combiné avec les nouvelles estimations de Strichartz (2.45). Soit $u = \Phi(v)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} i \partial_t u(t, x) + \Delta_{\mathbb{H}^n} u(t, x) = F(v(t, x)), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.50)$$

qui est donnée par la formule de Duhamel (2.44) :

$$u(t, x) = e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} f(x) + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_{\mathbb{H}^n}} F(v(s, x)) ds.$$

En accord avec le Théorème 2.2.3, on a les estimations de Strichartz suivantes

$$\|u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|f\|_{L_x^2} + C \|F(v)\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \quad (2.51)$$

pour tout $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ dans le triangle T_n , ce qui revient aux conditions

$$\begin{cases} 2 \leq p, q \leq \infty \text{ tels que } \frac{\beta}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} \text{ pour } 0 < \beta \leq 2, \\ 2 \leq \tilde{p}, \tilde{q} \leq \infty \text{ tels que } \frac{\beta}{\tilde{p}} + \frac{n}{\tilde{q}} = \frac{n}{2} \text{ pour } 0 < \tilde{\beta} \leq 2. \end{cases} \quad (2.52)$$

De plus, par les hypothèses sur les non-linéarités (2.1), on a

$$\|F(v)\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \leq C \|v\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}}^\gamma \leq C \|v\|_{L_t^{\tilde{p}'} \gamma L_x^{\tilde{q}' \gamma}}^\gamma$$

Donc

$$\|u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \|f\|_{L_x^2} + C \|v\|_{L_t^{\tilde{p}'} \gamma L_x^{\tilde{q}' \gamma}}^\gamma. \quad (2.53)$$

Afin de rester dans le même espace de fonctions, on demande alors

$$p = \tilde{p}' \gamma, \quad q = \tilde{q}' \gamma. \quad (2.54)$$

Il est facile de contrôler que les conditions sont vérifiées si on choisit

$$0 < \beta = \tilde{\beta} \leq 2 \text{ tel que } \gamma = 1 + \frac{2\beta}{n} \text{ et } p = q = \tilde{p} = \tilde{q} = 1 + \gamma = 2 + \frac{2\beta}{n},$$

ainsi Φ envoie $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{H}^n)) \cap L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))$ dans lui-même, et donc $X = C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{H}^n)) \cap L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))$ dans lui-même. Puisque X est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_X = \|u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_t^p L_x^q},$$

il reste à montrer que Φ est une contraction dans la boule

$$X_\varepsilon = \{u \in X \mid \|u\|_X \leq \varepsilon\},$$

avec $\varepsilon > 0$ et $\|f\|_{L^2}$ assez petits. Soient $v, \tilde{v} \in X$ et $u = \Phi(v)$, $\tilde{u} = \Phi(\tilde{v})$. En procédant comme avant et en utilisant aussi les inégalités d'Hölder, on estime

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_X &\leq C \|F(v) - F(\tilde{v})\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \\ &\leq C \|\{|v|^{\gamma-1} + |\tilde{v}|^{\gamma-1}\} |v - \tilde{v}|\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}} \\ &\leq C \{\|v\|_{L_t^p L_x^q}^{\gamma-1} + \|\tilde{v}\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}}^{\gamma-1}\} \|v - \tilde{v}\|_{L_t^p L_x^q}, \end{aligned}$$

donc

$$\|u - \tilde{u}\|_X \leq C (\|v\|_X^{\gamma-1} + \|\tilde{v}\|_X^{\gamma-1}) \|v - \tilde{v}\|_X. \quad (2.55)$$

Si $\|v\|_X \leq \varepsilon$, $\|\tilde{v}\|_X \leq \varepsilon$ et $\|f\|_{L^2} \leq \delta$, alors (2.53) et (2.55) permettent d'obtenir

$$\|u\|_X \leq C \delta + C \varepsilon^\gamma, \quad \|\tilde{u}\|_X \leq C \delta + C \varepsilon^\gamma \quad \text{et} \quad \|u - \tilde{u}\|_X \leq 2 C \varepsilon^{\gamma-1} \|v - \tilde{v}\|_X.$$

Donc

$$\|u\|_X \leq \varepsilon, \quad \|\tilde{u}\|_X \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u - \tilde{u}\|_X \leq \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_X$$

si $C \varepsilon^{\gamma-1} \leq \frac{1}{4}$ et $C \delta \leq \frac{3}{4} \varepsilon$. On peut alors conclure en appliquant le théorème de point fixe dans l'espace métrique complet X_ε .

Dans le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n}$, on peut prouver de manière similaire que (NLSM) est localement bien posé dans L^2 pour toute donnée f . Plus précisément, on se restreint à l'intervalle en temps $I = [-T, +T]$ et on procède comme avant, à exception de grandir $\tilde{\beta} \in (\beta, 2]$ et $\tilde{p} = \frac{\tilde{\beta}}{\beta} p$ pour appliquer l'inégalité d'Hölder en temps. On obtient alors

$$\|u\|_X \leq C \|f\|_{L^2} + C T^\lambda \|v\|_X^\gamma, \quad (2.56)$$

où $X = C(I; L^2(\mathbb{H}^n)) \cap L^p(I; L^q(\mathbb{H}^n))$ et $\lambda = \frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}} > 0$, et aussi

$$\|u - \tilde{u}\|_X \leq C T^\lambda (\|v\|_X^{\gamma-1} + \|v\|_X^{\gamma-1}) \|v - \tilde{v}\|_X. \quad (2.57)$$

Comme conséquence, on déduit que Φ est une contraction dans la boule

$$X_M = \{u \in X \mid \|u\|_X \leq M\},$$

avec $M > 0$ assez grand et $T > 0$ assez petit, en particulier $\frac{3}{4} M \geq C \|f\|_{L^2}$ et $C T^\lambda M^{\gamma-1} \leq \frac{1}{4}$. On peut donc conclure comme avant.

De plus, comme dans le cadre euclidien, pour des non-linéarités *invariantes de Jauge*, la conservation de la norme L^2 combinée au résultat d'existence et unicité locale en temps précédent donne le caractère globalement bien posé dans L^2 pour le cas sous-critique $\gamma < 1 + \frac{4}{n}$.

Pour des non-linéarités *hamiltoniennes*, par exemple $F(u) = \pm |u|^{\gamma-1} u$, comme déjà mentionné les résultats concernant l'existence et unicité locale en temps sont les mêmes, mais en ce qui concerne le caractère globalement bien posé à données grandes de (NLSM) sont différents selon les cas *défocalisants* $F(u) = +|u|^{\gamma-1} u$ et *focalisants* $F(u) = -|u|^{\gamma-1} u$. Ici aussi les cas critiques $\gamma = 1 + \frac{4}{n-2}$ et $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ sont plus subtils. Pour une non-linéarité *défocalisante*, la conservation de l'hamiltonien

$$H(u) = \int_{\mathbb{H}^n} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{2}{\gamma+1} \int_{\mathbb{H}^n} |u(t, x)|^{\gamma+1} dx \quad (2.58)$$

et de la norme L^2 donnent une borne uniforme sur la norme H^1 . Cela permet d'obtenir que (NLS) est globalement bien posé dans H^1 dans tous les cas sous-critiques $\gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$.

○ Dans le cas de non-linéarités *défocalisantes*, des résultats similaires avaient été obtenus dans [23] comme conséquence des estimations de Strichartz (2.37) montrées dans [253] sous des hypothèses de radialité et aussi par Ionescu et Staffilani dans [171] sans hypothèse de radialité dans le cas H^1 sous-critique. Le cas H^1 critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n-2}$ a été résolu seulement en dimension 3 par Ionescu, Pausader et Staffilani dans [168] en suivant la même stratégie que [65] sur \mathbb{R}^3 ; les autres dimensions restent des questions ouvertes. Aussi la question de l'existence et unicité globale pour toute donnée initiale dans L^2 dans le cas critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ reste une intéressante question ouverte.

- Dans le cas *focalisant*, comme dans le cas euclidien la conservation de l'hamiltonien

$$H(u) = \int_{\mathbb{H}^n} |\nabla u(t, x)|^2 dx - \frac{2}{\gamma + 1} \int_{\mathbb{H}^n} |u(t, x)|^{\gamma+1} dx \quad (2.59)$$

ne donne pas un contrôle de la norme \dot{H}^1 . Ainsi, en utilisant l'inclusion de Sobolev (voir le livre de Hebey [156]) et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg qui en découle, on obtient des résultats d'existence globale similaires à \mathbb{R}^n . Remarquons que dans le cas $\gamma = 1 + \frac{4}{n}$ on a aussi une condition supplémentaire sur la donnée initiale dans H^1 analogue à (2.25), qui garantit le caractère globalement bien posé, mais la meilleure constante de Galgliardo-Niremberg n'est pas reliée à la norme L^2 de l'onde solitaire sur \mathbb{H}^n . L'équivalent du résultat de Dodson [103] dans L^2 reste une autre intéressante question ouverte.

La courbure négative n'est pas une obstruction à l'explosion dans le cas $\gamma \geq 1 + \frac{4}{n}$; en effet dans [21], en reprenant l'argument de Glassey avec la distance hyperbolique comme poids dans le calcul du viriel (2.27), on obtient explosion en temps fini pour des données initiales radiales, vérifiant

$$\int_{\mathbb{H}^n} |u_0(x)|^2 d_{\mathbb{H}^n}(0, x)^2 dx < \infty \quad (2.60)$$

et

$$H(u_0) < c_n \|u_0\|_{L^2}, \quad (2.61)$$

où c_n est une constante géométrique positive. Remarquons qu'à différence du cas euclidien, on peut avoir explosion pour des données initiales d'énergie positive.

Il y a très peu de travaux sur la description qualitative de l'explosion, il n'y a pas d'équivalent connu de la transformation pseudo-conforme. L'existence de solutions explosant en log log sur une courbe pour des surfaces invariantes par rotations (en particulier \mathbb{H}^2) a été montrée dans [146].

Comportement asymptotique

Revenons maintenant à l'étude des solutions de (NLSM) avec temps maximal d'existence infini.

Dans le cas des données petites sans hypothèse de radialité et des non-linéarités générales $F(u)$ de type puissance (2.1) on a obtenu dans [6] la propriété de "scattering" comme conséquence des meilleures estimation de Strichartz sur l'espace hyperbolique

- dans H^1 dans les cas $\gamma \leq 1 + \frac{4}{n-2}$;
- dans L^2 dans les cas $\gamma \leq 1 + \frac{4}{n}$.

Voici précisément le résultat dans le cas de régularité $L^2(\mathbb{H}^n)$.

Théorème 2.2.5 *Considérons le problème de Cauchy (NLSM) avec des non-linéarité de type puissance (2.1) d'ordre $1 < \gamma \leq 1 + \frac{4}{n}$. Alors les solutions globale $u(t, x)$ qui correspondent aux données initiales petites dans L^2 ont la suivante propriété de scattering : il existe $u_{\pm} \in L^2$ tel que*

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}} u_{\pm}\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \pm\infty.$$

Preuve. Selon la preuve du théorème 2.2.4, pour $1 < \gamma \leq 1 + \frac{4}{n}$ et données petites dans L^2 , (NLSM) a une unique solution $u(t, x)$ dans $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{H}^n)) \cap L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))$, pour certains couples (p, q) . Comme dans le cas euclidien, on peut déduire la propriété de scattering pour les solutions globales $u(t, x)$ à l'aide du critère de Cauchy et des estimations de Strichartz (2.45); en effet, on a

$$\begin{aligned} \|e^{-it_2\Delta_{\mathbb{H}^n}} u(t_2) - e^{-it_1\Delta_{\mathbb{H}^n}} u(t_1)\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{-is\Delta_{\mathbb{H}^n}} F(u(s)) ds \right\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \\ &\leq \|u\|_{L^p([t_1, t_2]; L^q(\mathbb{H}^n))}^{\gamma}. \end{aligned}$$

Puisque $u(t, x) \in L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))$, la dernière expression disparaît lorsque $t_1 \leq t_2$ tendent tous les deux vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans le cadre L^2 , l'équivalent du résultat de Dodson [102], dans le cas L^2 critique n'est pas connu. Il serait aussi intéressant d'étudier si dans les cas L^2 sous-critiques où on a existence globale la géométrie à l'infini permet d'avoir des résultats de scattering pour des données grandes.

Dans le cas des non-linéarités *hamiltoniennes défocalisantes*, le problème de Cauchy est globalement bien posé dans H^1 . La propriété de scattering dans H^1 pour toutes données a été établie pour les non-linéarités sous-critiques ($\gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$) dans [171]. Comme déjà évoqué, l'argument repose sur les inégalités de Morawetz (2.49). Le cas critique $\gamma = 1 + \frac{4}{n-2}$ a été traité récemment dans [168] (seulement en dimension 3) en utilisant aussi les arguments de concentration-compacité à la Kenig-Merle [186]. Observons que ces résultats plus forts sont possibles grâce à la géométrie à l'infini plus favorable que dans le cas euclidien ; ces résultats de scattering traduisent l'absence d'effet à longue portée de toutes les non-linéarités.

Dans le cas *focalisant*, l'existence d'ondes solitaires est une obstruction au scattering. Pour $\gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$ l'existence d'ondes solitaires $e^{i\lambda t}Q(x)$ a été établie pour tout $\lambda > -(n-1)^2/4$ dans [62]. Il est aussi montré que ses ondes solitaires sont orbitalement stables si $\gamma < 1 + \frac{4}{n}$. Une question intéressante laissée ouverte est celle de la stabilité asymptotique de ces ondes solitaires. On est encore très loin d'une caractérisation complète de la dynamique en temps grand.

2.3 Propriétés dispersives sur les espaces de Damek-Ricci $M = S$

Dans ce chapitre, je vais d'abord présenter les résultats obtenus dans [253] concernant l'étude de l'équation de Schrödinger sur les espaces de Damek-Ricci S , en particulier je vais d'abord présenter la nouvelle stratégie qui a permis d'obtenir les estimations optimales de Strichartz à poids globaux en temps dans le contexte radial. Ensuite je vais aussi présenter les résultats obtenus sans hypothèses de radialité dans [7] concernant l'étude des propriétés dispersives de l'équation de Schrödinger pour les deux Lapaciens Δ_S et \mathcal{L} naturels sur les espaces de Damek-Ricci S , rappelés dans le paragraphe 1.3. Dans le paragraphe 2.3.2 on commencera par montrer les estimations ponctuelles du noyau des opérateurs plus généraux $e^{\tau\Delta_S}$, pour $\tau \in \mathbb{C}^*$ avec $\operatorname{Re} \tau \geq 0$. Cela permet d'obtenir, dans le cas spécial $\operatorname{Re} \tau = 0$, les estimations ponctuelles du noyau de Schrödinger $e^{it\Delta_S}$, pour $t \in \mathbb{R}^*$ et selon la stratégie de [6] d'obtenir les estimations dispersives pour $e^{it\Delta_S}$. Il faut toutefois souligner une nouvelle difficulté dans ce contexte, le phénomène de Kunze-Stein n'est pas valable pour des fonctions générales sur les espaces de Damek-Ricci [72, 75, 217, 219]. On verra plus en détail, dans le paragraphe 2.3.3, comment on a résolu cette difficulté dans notre contexte. Comme dans [6], on trouve des estimations de Strichartz pour une famille de couples admissibles plus grande que dans le cas euclidien et sans hypothèses de radialité. On peut toutefois remarquer que dans le contexte radial les estimations de Strichartz à poids dans [253] permettent de retrouver les estimations de Strichartz sans poids avec l'admissibilité valable sur le triangle T_n . Dans le contexte non radial, on n'arrive pas à retrouver les poids dans les estimations, mais on obtient quand même le triangle d'admissibilité. Les applications de ces estimations de Strichartz concernant le caractère bien posé et le scattering pour (NLSM) discutés avant, peuvent se généraliser aussi dans ce contexte et bien sûr ils restent aussi des problèmes ouverts intéressants. D'autre part, on a trouvé une autre intéressante application concernant l'étude des propriétés dispersives de l'équation de Schrödinger associée au *Laplacien distingué* \mathcal{L} sur les espaces de Damek-Ricci. En effet, on va voir dans le paragraphe 2.3.4 que l'estimation dispersive classique $L^1 \rightarrow L^\infty$ n'est pas valable, mais on pourra quand même montrer des estimations de Strichartz à poids comme application des estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger associée au Laplace-Beltrami Δ_S .

2.3.1 Estimations de Strichartz à poids globales sur $M = S$

Rappelons d'abord les résultats principaux de [45] concernant les estimations de Strichartz dans le cas euclidien pour les équation de Schrödinger et des ondes perturbées par des potentiels de décroissance critique. Considérons un potentiel $V(x)$ vérifiant les hypothèses suivantes

$$\||x|^2 V\|_{L^\infty} < \infty, \quad (2.62)$$

$$V(x) \geq \frac{\delta}{|x|^2} \quad \text{pour} \quad \delta > -\frac{(n-2)^2}{4}, \quad (2.63)$$

$$-\partial_r(|x|V(x)) \geq \frac{\delta}{|x|^2} \quad \text{pour} \quad \delta > -\frac{(n-2)^2}{4}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.64)$$

où ∂_r désigne la dérivée radiale. Remarquons que les hypothèses dans [45] sont un peu plus faibles, mais ici (2.62)-(2.64) nous suffisent. Alors on a le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 (BPST) *Soit $n \geq 3$. Sous les hypothèses (2.62)-(2.64), la solution de l'équation de Schrödinger perturbée*

$$iu_t - \Delta u + Vu = 0, \quad u(0) = f$$

vérifie les estimations de Strichartz

$$\|u\|_{L^p L^q} \leq C \|f\|_{L^2} \quad (2.65)$$

pour tout couple (p, q) $\frac{n}{2}$ -admissible, c'est-à-dire

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}, \quad p \in [2, \infty] \text{ et } q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right]. \quad (2.66)$$

Un résultat analogue a été obtenu aussi pour l'équation des ondes perturbée, mais dans ce cas les techniques de [45] ne permettent pas de couvrir l'endpoint.

Remarque 2.3.1 *Comme déjà mentionné, en utilisant l'argument de TT* et le Lemma de Christ-Kiselev comme dans [139] et [185], on sait que les estimations de Strichartz homogènes sont équivalentes à celles non-homogènes pour toutes les couples (p, q) admissibles, à l'exception des endpoints. En effet, dans le cas de l'endpoint $(p, q) = (2, \frac{2n}{n-2})$, on ne peut pas utiliser les résultats de [185] pour obtenir la version non-homogène des estimations de Strichartz. L'argument général de [185] ne peut pas être appliqué ici car il nécessite des estimations dispersives, qui ne sont pas valables en dimension $n \geq 4$ pour l'équation de Schrödinger perturbée. Toutefois, dans mon résultat suivant ([253]) il est possible d'étendre le théorème 2.3.1 directement, surtout pour couvrir le cas de l'endpoint.*

Théorème 2.3.2 *Soit $n \geq 3$. Sous les hypothèses (2.62)-(2.64), la solution du problème de Cauchy*

$$iu_t - \Delta u + Vu = G(t, x), \quad u(0) = f \quad (2.67)$$

vérifie les estimations de Strichartz non-homogènes

$$\|u\|_{L^p L^q} \leq C \|f\|_{L^2} + \|G\|_{L^{\tilde{p}'} L^{\tilde{q}'}} \quad (2.68)$$

pour tout couple (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) $\frac{n}{2}$ -admissible, avec l'endpoint.

Preuve. Par une adaptation des mêmes techniques que dans [45], il est possible d'obtenir la version non-homogène des estimations de Strichartz. En effet, l'estimation cruciale de [45] est l'estimation de la résolvante suivante

$$\||x|^{-1}R(z)f\|_{L^2} \leq C\||x|f\|_{L^2}$$

où $R(z) = (-\Delta + V - z)^{-1}$ est l'opérateur de la résolvante perturbé. En utilisant cette estimation de la résolvante, le théorème de smoothing de Kato implique que la solution de l'équation homogène (i.e. (2.67) pour $G = 0$) satisfait l'estimation de smoothing suivante

$$\||x|^{-1}u\|_{L^2 L^2} \leq C\||x|f\|_{L^2}$$

A partir de cette estimation, il est facile d'obtenir les estimations de Strichartz comme conséquence des correspondantes pour l'équation libre, un argument de dualité et des inégalités de Hölder dans les espaces de Lorentz. Remarquons maintenant que grâce au théorème de smoothing de Kato, on peut aussi obtenir les estimations de smoothing pour l'équation non-homogène avec données initiales nulles

$$iu_t - \Delta u + Vu = G(t, x), \quad u(0) = 0; \quad (2.69)$$

en effet, on a

$$\||x|^{-1}u\|_{L^2 L^2} \leq C\||x|G\|_{L^2 L^2} \quad (2.70)$$

comme c'est facile à vérifier.

On réécrit les estimations ci-dessus en une forme plus simple, avec la notation $\Delta_V = \Delta - V(x)$: les estimations de Strichartz pour l'équation homogène perturbée sont

$$\|e^{it\Delta_V} f\|_{L^p L^q} \leq C\|f\|_{L^2}, \quad (2.71)$$

les estimations de smoothing pour l'équation homogène perturbée sont

$$\||x|^{-1}e^{it\Delta_V} f\|_{L^2 L^2} \leq C\||x|f\|_{L^2}, \quad (2.72)$$

les estimations de smoothing pour l'équation perturbée avec terme non-homogène sont

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_V} |x|^{-1} G(s, x) ds \right\|_{L^2 L^2} \leq C\||x|G\|_{L^2 L^2} \quad (2.73)$$

et bien sûr les estimations de Strichartz pour l'équation libre sont

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G(s, x) ds \right\|_{L^p L^{q,2}} \leq C\|G\|_{L^{\tilde{p}'} L^{\tilde{q}'},2} \quad (2.74)$$

(on a besoin ici de la version plus forte dans les espaces de Lorentz, montrée par Keel et Tao). On utilisera la conséquence suivante de (2.74) :

$$\left\| |x|^{-1} \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G(s, x) ds \right\|_{L^2 L^2} \leq C\|G\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n+2},2}} \quad (2.75)$$

qui s'obtient facilement par l'estimation de l'endpoint et l'inégalité de Hölder dans les espaces de Lorentz $\|fg\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^{n,\infty}} \|g\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}$.

Ainsi, soit $v(t, x)$ la solution de

$$iv_t - \Delta v = -Vv + G, \quad v(0) = 0 \quad (2.76)$$

et soit

$$w(t, x) = v(t, x) - \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G(s, x) ds;$$

alors w satisfait l'équation

$$iw_t - \Delta w = -Vv \equiv -Vw - V \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G(s, x) ds, \quad w(0) = 0$$

donc on peut aussi écrire

$$w = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_V} V \cdot \left(\int_0^s e^{i(s-\sigma)\Delta} G d\sigma \right) ds.$$

Si on applique (2.73) à w , on obtient

$$\| |x|^{-1} w \|_{L^2 L^2} \leq C \left\| |x| V \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G ds \right\|_{L^2 L^2} \leq C \| |x| V \|_{L^{n,\infty}} \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G ds \right\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n-2}, 2}}$$

par l'inégalité de Hölder dans les espaces de Lorentz ; remarquons que la norme de V est finie sous nos hypothèses. Le cas de l'endpoint dans (2.74) implique aussi, par l'inégalité de Hölder, la suivante

$$\left\| |x|^{-1} \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G(s, x) ds \right\|_{L^2 L^2} \leq C \|G\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n+2}, 2}},$$

donc on obtient

$$\| |x|^{-1} w \|_{L^2 L^2} \leq C \|G\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n+2}, 2}};$$

en revenant à v et en utilisant (2.75) on peut conclure

$$\| |x|^{-1} v \|_{L^2 L^2} \leq C \|G\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n+2}, 2}}. \quad (2.77)$$

De plus, à partir de l'équation (2.76) on voit que v peut s'écrire :

$$v = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G ds - \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} V v ds.$$

Le premier terme satisfait les estimations de Strichartz ; pour le second, en utilisant l'estimation sur l'endpoint, on a

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} V v ds \right\|_{L^p L^q} \leq C \|Vv\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n+2}, 2}} \leq C \| |x| V \|_{L^{n,\infty}} \| |x|^{-1} v \|_{L^2 L^2}$$

et par (2.77), on obtient

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} V v ds \right\|_{L^p L^q} \leq C \|G\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n+2}, 2}}$$

et finalement la solution v de (2.76) vérifie l'estimation

$$\|v\|_{L^p L^q} \leq C \|G\|_{L^2 L^{\frac{2n}{n+2}, 2}}$$

pour tous les couples (p, q) admissibles, inclus l'endpoint. Puisque la solution u de l'équation complète (2.67) peut s'écrire $u = e^{it\Delta_V} f + v(t, x)$, en rappelant (2.71) on a obtenu ce qu'on voulait et u vérifie l'ensemble complet des estimations de Strichartz.

On peut maintenant montrer le résultat principal pour l'équation de Schrödinger sur les espaces de Damek-Ricci. Sans utiliser les estimations dispersives, j'ai obtenu des estimations de Strichartz à poids globales en temps en dimension $n \geq 4$ et de plus en dimension $n = 3$ on retrouve aussi les estimations dispersives à poids montrées avant par Banica dans [21]. La nouvelle stratégie consiste à transformer la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur

S , c'est-à-dire le bien connu en analyse harmonique opérateur de Jacobi, en la partie radiale du Laplacien sur \mathbb{R}^n perturbée par des potentiels vérifiants les hypothèses (2.62)-(2.64). Ainsi on va déduire les estimations de Strichartz à poids globales en temps sur S , à partir de l'étude faite pour l'équation de Schrödinger perturbée sur \mathbb{R}^n en utilisant le théorème 2.3.1 dans [45] et aussi le théorème 2.3.2 dans [253]. Bien sûr cette idée s'applique aussi à l'équation des ondes (pour plus de détails voir [253]), mais ici je vais présenter le résultat seulement pour l'équation de Schrödinger :

Théorème 2.3.3 *Supposons $n \geq 4$. Soient u_0 et F deux fonctions radiales en $x \in S$, telles que $w_2 u_0 \in L^2(S)$ et $w_{\tilde{q}'} F \in L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; L^{\tilde{q}'}(S))$. Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} i\partial_t u + L u = F(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.78)$$

alors pour tout couple (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) $\frac{n}{2}$ -admissible

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}, \quad p \in [2, \infty], \text{ et } q \in \left[2, \frac{2n}{n-2} \right], \quad (2.79)$$

on a les estimations de Strichartz à poids suivantes

$$\|w_q u\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(S))} \leq C \|w_2 u_0\|_{L^2(S)} + C \|w_{\tilde{q}'} F\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}, L^{\tilde{q}'}(S))}, \quad (2.80)$$

avec les poids

$$w_q(r) = \left(\frac{\sinh r}{r} \right)^{\frac{(m+k)}{2}(1-\frac{2}{q})} (\cosh r)^{\frac{k}{2}(1-\frac{2}{q})} \quad (2.81)$$

et $\alpha = \frac{m+k-1}{2}$, $\beta = \frac{k-1}{2}$, $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$.

De plus, dans le cas de l'espace réel hyperbolique de dimension trois, $S = \mathbb{H}^3(\mathbb{R})$, on a les estimations dispersives suivantes

$$\left(\frac{\sinh r}{r} \right) |u(t, x)| \leq \frac{C}{t^{\frac{3}{2}}} \left\| u_0 \left(\frac{r}{\sinh r} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{H}^3(\mathbb{R}))}. \quad (2.82)$$

Preuve. Soit $L_{\alpha, \beta}$ l'opérateur de Jacobi défini par

$$L_{\alpha, \beta} = \partial_r^2 + B(r)\partial_r + \rho^2, \quad (2.83)$$

où

$$B(r) = (2\alpha + 1) \coth r + (2\beta + 1) \tanh r \quad (2.84)$$

et

$$\rho = (\alpha + \beta + 1), \quad \alpha = \frac{m+k-1}{2}, \quad \beta = \frac{k-1}{2}, \quad \alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}. \quad (2.85)$$

On sait que (2.83) inclue la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les espaces hyperboliques et plus généralement sur les espaces de Damek-Ricci S . On rappelle aussi que la partie radiale de l'opérateur de Laplace sur \mathbb{R}^n est

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r.$$

L'idée de la preuve est de construire une transformation qui envoie l'opérateur de Jacobi sur S en la partie radiale de l'opérateur de Laplace sur \mathbb{R}^n en posant

$$u(t, r) = \sigma(r)v(t, r). \quad (2.86)$$

On a alors

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta} u(t, r) &= \partial_r^2 u(t, r) + B(r) \partial_r u(t, r) + \rho^2 u(t, r) = \\ &\quad \partial_r^2(\sigma(r)v(t, r)) + B(r) \partial_r(\sigma(r)v(t, r)) + \rho^2 \sigma(r)v(t, r) = \\ &\quad \sigma(r) \left[\partial_r^2 v(t, r) + \left(2 \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + B(r) \right) \partial_r v(t, r) + \left(\frac{\sigma''(r)}{\sigma(r)} + B(r) \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + \rho^2 \right) v(t, r) \right]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Le passage crucial ici est d'imposer la condition suivante

$$2 \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} + B(r) = \frac{2\alpha+1}{r}, \quad (2.88)$$

et en résolvant cette équation différentielle ordinaire, on a

$$\sigma(r) = r^{\alpha+\frac{1}{2}} (\sinh r)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} (\cosh r)^{-(\beta+\frac{1}{2})}. \quad (2.89)$$

En remplaçant (2.89) dans le coefficient de $v(t, r)$ dans (2.87) et après des calculs, on obtient le potentiel

$$V(r) = \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r^2} - \frac{B'(r)}{2} - \frac{B^2(r)}{4} + \rho^2.$$

Donc, en utilisant la formule (2.84) on a

$$V(r) = \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r^2} - \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \coth^2 r - \left(\beta^2 - \frac{1}{4} \right) \tanh^2 r + \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2} \right). \quad (2.90)$$

Remarquons que $V \in C^\infty[0, \infty)$ et il tend vers zéro lorsque $r \rightarrow \infty$. On a donc obtenu l'équation de Schrödinger perturbée

$$i\partial_t v + \Delta v - \tilde{V}v = 0 \quad (2.91)$$

sur $\mathbb{R}^{2\alpha+2}$, où $\tilde{V} = -V$.

On va étudier, maintenant, le comportement de \tilde{V} dans le Lemma suivant :

Lemma 2.3.1 *Soit $\tilde{V} = -V$, où le potentiel V est comme ci-dessus (2.90), alors on a les inégalités suivantes*

$$\tilde{V}(r) > -\frac{a}{r^2} \quad (2.92)$$

et

$$-\partial_r[r \cdot \tilde{V}(r)] > -\frac{a}{r^2}, \quad (2.93)$$

où $a = \frac{(n-2)^2}{4}$, $n \geq 3$.

Preuve. On commence par la preuve de la première inégalité. Ce n'est pas difficile de vérifier que la première identité est équivalente à la suivante

$$\tilde{V} = -\frac{A}{r^2} + \frac{4A}{e^{2r} + e^{-2r} - 2} - \frac{4B}{e^{2r} + e^{-2r} + 2}, \quad (2.94)$$

où $A = (\alpha^2 - \frac{1}{4})$ et $B = (\beta^2 - \frac{1}{4})$, avec $A \geq B$. Remarquons que $a = \alpha^2 = A + \frac{1}{4}$, donc on doit montrer

$$-\frac{A}{r^2} + \frac{4A}{e^{2r} + e^{-2r} - 2} - \frac{4B}{e^{2r} + e^{-2r} + 2} > -\frac{A}{r^2} - \frac{1}{4r^2},$$

plus précisément

$$\frac{4A}{e^{2r} + e^{-2r} - 2} - \frac{4B}{e^{2r} + e^{-2r} + 2} > -\frac{1}{4r^2}. \quad (2.95)$$

Lorsque $A \geq B \geq -\frac{1}{4}$, alors (2.95) est toujours vraie. Dans le cas $A \geq B > 0$, il suffit de vérifier le cas $A = B > 0$, alors le minimum est $A = B = \frac{1}{4} > 0$ et on voit facilement que

$$\frac{r^2}{e^{2r} + e^{-2r} - 2} - \frac{r^2}{e^{2r} + e^{-2r} + 2} > -\frac{1}{4}.$$

Si $A \geq B = 0$ et si $A \geq 0, B = -\frac{1}{4}$, alors (2.95) est vérifiée. Le seul cas dans lequel l'inégalité n'est pas vérifiée est $A = B = -\frac{1}{4}$; mais ça correspond à l'espace de dimension 2 qui n'est pas concerné dans notre résultat. La deuxième inégalité (2.93) est équivalente à la suivante

$$-\partial_r[r \cdot \tilde{V}(r)] + \frac{A}{r^2} > -\frac{1}{4r^2}, \quad (2.96)$$

après quelques calculs on peut écrire

$$-\partial_r[r \cdot \tilde{V}(r)] + \frac{A}{r^2} = \frac{4Ae^{2r}}{(e^{2r} - 1)^3} \varphi_1(r) - \frac{4Be^{2r}}{(e^{2r} + 1)^3} \varphi_2(r),$$

où

$$\varphi_1(r) = e^{2r}(2r - 1) + 2r + 1$$

et

$$\varphi_2(r) = e^{2r}(2r - 1) - 2r - 1.$$

Remarquons que $\varphi_1(0) = 0$ et $\varphi'_1(r) = 4e^{2r} + 2 \geq 0$, donc $\varphi_1(r) \geq 0, \forall r$; la fonction $\varphi_2(r)$ est croissante et $\varphi_2(0) = -2$. On voit facilement que

$$\varphi_1(r) > \varphi_2(r).$$

Lorsque $A \geq B \geq 0$, (2.93) est vérifiée, car on a

$$\frac{A\varphi_1(r)}{(e^{2r} - 1)^3} - \frac{B\varphi_2(r)}{(e^{2r} + 1)^3} \geq \frac{A\varphi_1(r) - B\varphi_2(r)}{(e^{2r} + 1)^3} \geq \frac{B(\varphi_1(r) - \varphi_2(r))}{(e^{2r} + 1)^3} \geq 0.$$

Pour montrer (2.93) dans les cas restants $A \geq 0$ et $B = -\frac{1}{4}$, il suffit d'étudier le cas $A = 0$ et $B = -\frac{1}{4}$; en effet

$$\frac{e^{2r}\varphi_2(r)}{(e^{2r} + 1)^3} > -\frac{1}{4r^2}$$

est vérifiée dans la région dans laquelle $\varphi_2(r)$ est positive. De plus, lorsque $\varphi_2(r)$ est négative, on a

$$\frac{e^{2r}\varphi_2(r)}{(e^{2r} + 1)^3} \geq -\frac{1}{4} > -\frac{1}{4r^2}, \text{ for } r < 1.$$

Puisque $\varphi_2(1) = e^2 - 3 > 0$ et la fonction φ_2 est croissante, alors pour $r \geq 1$ φ_2 est positive.

Comme annoncé, ce Lemma nous permet d'appliquer le théorème 2.3.1 de Burq, Planchon, Stalker et Tahvildar-Zadeh et le théorème 2.3.2. Pour cela, si on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v - \tilde{V}v = \frac{F(t,r)}{\sigma(r)}, \\ v(0, x) = v_0, \end{cases}$$

avec données initiales radiales, on obtient les estimations de Strichartz suivantes

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^{2\alpha+2}))} \leq C\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{2\alpha+2})} + C\left\|\frac{F}{\sigma}\right\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}, L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}^{2\alpha+2}))}. \quad (2.97)$$

Si on remplace (2.86), on obtient l'inégalité suivante

$$\left\| \frac{u}{\sigma} \right\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^{2\alpha+2}))} \leq C \left\| \frac{u_0}{\sigma} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2\alpha+2})} + C \left\| \frac{F}{\sigma} \right\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}, L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}^{2\alpha+2}))}. \quad (2.98)$$

En écrivant explicitement le côté gauche, on a

$$\left\| \frac{u}{\sigma} \right\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^{2\alpha+2}))} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2\alpha+2}} |u(t, x) \sigma(x)^{-1}|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

et en remplaçant (2.89) dans le poids σ en coordonnées polaires, on obtient

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| u(t, r, \omega) \left(\frac{\sinh r}{r} \right)^{\alpha+\frac{1}{2}} (\cosh r)^{\beta+\frac{1}{2}} \right|^q r^{n-1} dr d\omega \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $\alpha = \frac{m+k-1}{2}$, $\beta = \frac{k-1}{2}$, $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$; puisque $u = u(t, r)$ est une fonction radiale, ça se réduit à

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| u(t, r) \left(\frac{\sinh r}{r} \right)^{\frac{m+k}{2}(1-\frac{2}{q})} (\cosh r)^{\frac{k}{2}(1-\frac{2}{q})} \right|^q \sinh r^{m+k} \cosh r^k dr \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

et sur les espaces de Damek-Ricci S le volume Riemannien est

$$dV = 2^{m+k} \sinh r^{m+k} \cosh^k dr d\tilde{\omega},$$

où $d\tilde{\omega}$ désigne la mesure de surface sur la sphère unitaire $\partial B(\mathbf{s})$ en \mathbf{s} et $n = \dim S = m + k + 1$. En conclusion, on a

$$= C \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_S \left| u(t, r) \left(\frac{\sinh r}{r} \right)^{\frac{m+k}{2}(1-\frac{2}{q})} (\cosh r)^{\frac{k}{2}(1-\frac{2}{q})} \right|^q dr \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

donc en notant par $w_q(r)$ les poids $\left(\frac{\sinh r}{r} \right)^{\frac{m+k}{2}(1-\frac{2}{q})} (\cosh r)^{\frac{k}{2}(1-\frac{2}{q})}$ on peut conclure

$$= C \|w_q u\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(S))}.$$

De manière analogue, en écrivant explicitement le côté droit de (2.98) et avec des calculs similaires on peut conclure la preuve du théorème 2.3.3.

Dans le cas spécial $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ l'espace de Damek-Ricci est l'espace hyperbolique réel de dimension trois $H^3(\mathbb{R})$. Dans ce cas $m = 2$ et $k = 0$. Pour montrer les estimations dispersives à poids (2.82), on procède comme ci-dessus; remarquons qu'après la transformation (2.86) le potentiel (2.90) n'est plus critique, en effet $V \in \mathcal{C}^\infty[0, \infty)$ et il tend à zéro exponentiellement lorsque $r \rightarrow \infty$, donc en appliquant le résultat de Yajima [314], on se réduit au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v + V(r)v = 0, \\ v(0, x) = v_0, \end{cases} \quad (2.99)$$

qui, de plus, satisfait les estimations dispersives

$$\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{t^{3/2}} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

En utilisant la transformation inverse et en calculant comme avant on obtient

$$\left(\frac{\sinh r}{r} \right) |u(t, x)| \leq \frac{C}{t^{\frac{3}{2}}} \|u_0\left(\frac{r}{\sinh r} \right)\|_{L^1(H^3(\mathbb{R}))},$$

et ça permet de conclure la preuve du théorème 2.3.3.

2.3.2 Estimations ponctuelles du noyau de $e^{\tau\Delta_S}$

Considérons l'opérateur général $e^{\tau\Delta_S}$, où $\tau = |\tau| e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et h_τ son noyau de convolution. Si $\tau \in \mathbb{R}^+$, alors h_τ correspond au noyau de la chaleur et si $\tau = it \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors il correspond au noyau de Schrödinger sur les espaces de Damek-Ricci. On va obtenir des estimations ponctuelles du noyau lorsque $\operatorname{Re} \tau \geq 0$.

Remarquons que, pour tout $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $\operatorname{Re} \tau \geq 0$, on a $e^{\tau\Delta_S} = m_\tau(-\Delta_Q)$, où $m_\tau(v) = e^{-\frac{Q^2\tau}{4}-\tau v}$. Alors en utilisant (1.46), la transformée sphérique de Fourier de h_τ est

$$\mathcal{H}h_\tau(s) = m_\tau(s^2) = e^{-\frac{Q^2\tau}{4}} e^{-\tau s^2},$$

et en appliquant la transformée d'Abel inverse (1.41) et (1.42), on obtient la formule explicite suivante pour le noyau h_τ :

$$h_\tau(r) = \begin{cases} C (|\tau| e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{Q^2\tau}{4}} \mathcal{D}_1^{k/2} \mathcal{D}_2^{m/2}(e^{-\frac{r^2}{4\tau}}) & \text{si } k \text{ pair,} \\ C (|\tau| e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{Q^2\tau}{4}} \int_r^\infty \mathcal{D}_1^{(k+1)/2} \mathcal{D}_2^{m/2}(e^{-\frac{s^2}{4\tau}}) d\nu(s) & \text{si } k \text{ impair,} \end{cases} \quad (2.100)$$

où $\mathcal{D}_1 = -\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r}$ et $\mathcal{D}_2 = -\frac{1}{\sinh(r/2)} \frac{\partial}{\partial r}$. Pour donner une idée du type de calculs faits, on va maintenant démontrer les estimations ponctuelles du noyau h_τ :

Proposition 2.3.1 *Il existe une constante positive C telle que, pour tout $\tau \in \mathbb{C}^*$ avec $\operatorname{Re} \tau \geq 0$ et pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$|h_\tau(r)| \leq \begin{cases} C |\tau|^{-n/2} (1+r)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2\tau+\frac{r^2}{\tau}\}} & \text{si } |\tau| \leq 1+r, \\ C |\tau|^{-3/2} (1+r)^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2\tau+\frac{r^2}{\tau}\}} & \text{si } |\tau| > 1+r. \end{cases} \quad (2.101)$$

Preuve. Dans cette preuve on résume en partie l'analyse du noyau de la chaleur dans [4, Section 5], des (2.42) dans ([6, Proposition 3.1]) et dans [100, 221] pour les espaces hyperboliques réels. Par récurrence on peut prouver que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p+q \geq 1$

$$\mathcal{D}_1^q \mathcal{D}_2^p(e^{-\frac{r^2}{4\tau}}) = e^{-\frac{r^2}{4\tau}} \sum_{j=1}^{p+q} \tau^{-j} a_j(r), \quad (2.102)$$

où a_j sont des combinaisons linéaires finies de produits $f_{p_1, q_1}, \dots, f_{p_j, q_j}$ avec $p_1 + \dots + p_j = p$, $q_1 + \dots + q_j = q$ et

$$f_{p,q}(r) \asymp (1+r) e^{-(p/2+q)r}.$$

Donc $a_j(r) = O((1+r)^j e^{-\frac{(p+2q)}{2}r})$.

Considérons d'abord le cas plus facile de la dimension k paire. En utilisant (2.100) et (2.102), on obtient que

$$\begin{aligned} |h_\tau(r)| &\lesssim |\tau|^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2\tau+\frac{r^2}{\tau}\}} \sum_{j=1}^{(k+m)/2} |\tau|^{-j} (1+r)^j e^{-\frac{(m+2k)}{4}r} \\ &\lesssim |\tau|^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2\tau+\frac{r^2}{\tau}\}} e^{-\frac{Q}{2}r} \left[\frac{1+r}{|\tau|} + \left(\frac{1+r}{|\tau|} \right)^{(n-1)/2} \right]. \end{aligned}$$

Cela implique facilement la conclusion dans ce cas.

Considérons maintenant le cas plus délicat de la dimension k impaire. A partir de (2.100) et (2.102) on obtient

$$|h_\tau(r)| \lesssim \sum_{j=1}^{(k+1+m)/2} |\tau|^{-j} |\tau|^{-1/2} \int_r^\infty ds \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} (1+s)^j \times \\ \times e^{-\frac{m+2(k+1)}{4}s} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2\tau + \frac{s^2}{\tau}\}}.$$

Ici et pendant la preuve, on utilise à plusieurs reprises les estimations élémentaires suivantes :

$$\sinh s \asymp \frac{s}{1+s} e^s, \quad (2.103)$$

et

$$\cosh s - \cosh r = 2 \sinh \frac{s-r}{2} \sinh \frac{s+r}{2} \asymp \frac{s-r}{1+s-r} \frac{s}{1+s} e^s \quad (2.104)$$

ou

$$\cosh s - \cosh r \asymp \begin{cases} \frac{s^2-r^2}{1+r} e^r & \text{if } r \leq s \leq r+1, \\ e^s & \text{if } s \geq r+1. \end{cases} \quad (2.105)$$

En utilisant (2.103) et (2.104), on a

$$|h_\tau(r)| \lesssim |\tau|^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2\tau\}} \int_r^\infty ds \sqrt{\frac{1+s-r}{s-r}} \sqrt{\frac{1+s}{s}} e^{-s/2} \frac{s}{1+s} e^s \times \\ \times \left[\frac{1+s}{|\tau|} + \left(\frac{1+s}{|\tau|} \right)^{n/2} \right] e^{-\frac{Q}{2}s} e^{-\frac{s}{2}} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{s^2}{\tau}\}}. \quad (2.106)$$

Après un changement de variables $s=r+u$, on obtient

$$|h_\tau(r)| \lesssim |\tau|^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2\tau\}} \int_0^\infty du \sqrt{\frac{1+u}{u}} \sqrt{\frac{r+u}{1+r+u}} e^{-\frac{Q}{2}(u+r)} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{u^2+r^2+2ur}{\tau}\}}.$$

En utilisant les inégalités suivantes

$$\frac{\sqrt{r+u}}{\sqrt{1+r+u}} \leq 1, \quad 1+r+u \leq (1+r)(1+u),$$

on a

$$|h_\tau(r)| \lesssim |\tau|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2\tau + \frac{r^2}{\tau}\}} \left\{ \frac{1+r}{|\tau|} + \left(\frac{1+r}{|\tau|} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}. \quad (2.107)$$

Cela nous permet d'obtenir les estimations cherchées lorsque $|\tau| > 1+r$.

Si $|\tau| \leq 1+r$, afin d'obtenir l'estimation (2.101), on doit réduire la puissance $\frac{n}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$. On remplace donc dans (2.100) l'expression suivante

$$\mathcal{D}_1^{(k+1)/2} \mathcal{D}_2^{m/2} (e^{-\frac{s^2}{4\tau}}) = P(\tau, s) + R(\tau, s),$$

et on obtient

$$h_\tau(r) = C (|\tau| e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{Q^2\tau}{4}} \int_r^{+\infty} ds \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} [P(\tau, s) + R(\tau, s)], \quad (2.108)$$

où

$$P(\tau, s) = C \tau^{-\frac{(k+1+m)}{2}+1} s^{\frac{(k+1+m)}{2}-1} \left(-\frac{1}{\sinh s} \right)^{(k+1)/2} \left(-\frac{1}{\sinh s/2} \right)^{m/2} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-\frac{s^2}{4\tau}})$$

et $R(\tau, s) = \sum_{j=1}^{(k+1+m)/2-1} \tau^{-j} a_j(s) e^{-\frac{s^2}{4\tau}}$. Comme ci-dessus, on peut estimer le second terme dans (2.108) de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \left| |\tau|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{Q^2 \tau}{4}} \int_r^\infty ds \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} R(\tau, s) \right| \\ & \lesssim |\tau|^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{Q^2 \tau\}} e^{-\frac{Q}{2}r} \left(\frac{1+r}{|\tau|} \right)^{n/2-1} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\frac{r^2}{\tau}}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Donc, il reste à considérer l'intégrale

$$I(\tau, r) = \int_r^{+\infty} ds \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} P(\tau, s),$$

lorsque $|\tau| \leq 1+r$. Soit

$$I(\tau, r) = I_1(\tau, r) + I_2(\tau, r),$$

en accord avec

$$\int_r^{+\infty} = \int_r^{\sqrt{r^2 + |\tau|}} + \int_{\sqrt{r^2 + |\tau|}}^{+\infty}.$$

Pour traiter la première intégrale I_1 , on différentie $\frac{\partial}{\partial s}(e^{-\frac{s^2}{4\tau}}) = -\frac{s}{2\tau} e^{-\frac{s^2}{4\tau}}$ et on utilise les estimations (2.103), (2.105) avec le fait que s est dans $[r, r+1]$ en obtenant

$$\begin{aligned} |I_1(\tau, r)| & \lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}} (1+r)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}} \int_r^{\sqrt{r^2 + |\tau|}} ds \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} \\ & = |\tau|^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} (1+r)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}}. \end{aligned}$$

En intégrant par parties dans I_2 , on a

$$I_2(\tau, r) = g(\tau, r) + J(\tau, r),$$

où

$$\begin{aligned} g(\tau, r) & \\ & = \tau^{-\frac{n}{2} + 1} \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} s^{\frac{n}{2}-1} \left(-\frac{1}{\sinh s} \right)^{(k+1)/2} \left(-\frac{1}{\sinh s/2} \right)^{m/2} (e^{-\frac{s^2}{4\tau}}) \Big|_{s=\sqrt{r^2 + |\tau|}}^{s=+\infty} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J(\tau, r) & = -\tau^{-\frac{n}{2} + 1} \int_{\sqrt{r^2 + |\tau|}}^{+\infty} ds e^{-\frac{s^2}{4\tau}} \times \\ & \quad \times \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} s^{\frac{n}{2}-1} \left(-\frac{1}{\sinh s} \right)^{(k+1)/2} \left(-\frac{1}{\sinh s/2} \right)^{m/2} \right]. \end{aligned}$$

On estime d'abord le terme de bord $g(\tau, r)$, de la manière suivante

$$\begin{aligned} |g(\tau, r)| & \lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2} + 1} (1 + \sqrt{r^2 + |\tau|})^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}} \\ & \lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} (1+r)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}} \quad \forall |\tau| \leq 1+r. \end{aligned}$$

Alors pour estimer l'intégrale J , on peut l'écrire

$$J(\tau, r) = J_1(\tau, r) + J_2(\tau, r),$$

en accord avec

$$\int_{\sqrt{r^2+|\tau|}}^{+\infty} = \int_{\sqrt{r^2+|\tau|}}^{r+1} + \int_{r+1}^{+\infty}.$$

En calculant les dérivées qui apparaissent dans la première intégrale J_1 et en utilisant les estimations élémentaires $\frac{s \coth s - 1}{\sinh s} \asymp s e^{-s}$, on obtient

$$\begin{aligned} |J_1(\tau, r)| &\lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}+1} \int_{\sqrt{r^2+|\tau|}}^{r+1} ds (1+s)^{n/2-2} s e^{-\frac{Q}{2}s} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{s^2}{\tau}\}} \left\{ e^{-\frac{r}{2}} e^{\frac{s}{2}} \left(\frac{1+r}{s^2-r^2} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{3}{2}r} e^{\frac{3}{2}s} \left(\frac{1+r}{s^2-r^2} \right)^{3/2} \right\} \\ &\lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}} (1+r)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} \int_{\sqrt{r^2+|\tau|}}^{r+1} ds \left\{ \frac{s}{\sqrt{s^2-r^2}} + (1+r) \frac{s}{(s^2-r^2)^{3/2}} \right\} \\ &\lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}} e^{-\frac{Q}{2}r} (1+r)^{\frac{n-1}{2}} \quad \forall |\tau| \leq 1+r. \end{aligned}$$

On peut estimer la deuxième intégrale J_2 comme avant, en faisant un changement de variables $s = r + u$ et en obtenant

$$\begin{aligned} |J_2(\tau, r)| &\lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}+1} \int_{r+1}^{\infty} ds (1+s)^{n/2-2} s e^{-\frac{Q}{2}s} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{s^2}{\tau}\}} \\ &\lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}} \int_1^{\infty} du (1+r+u)^{n/2-2} (u+r) e^{-\frac{Q}{2}(u+r)} \\ &\lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}} (1+r)^{n/2-1} e^{-\frac{Q}{2}r} \\ &\lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}} (1+r)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} \quad \forall |\tau| \leq 1+r. \end{aligned}$$

On a, donc, prouvé que

$$I(\tau, r) = O(|\tau|^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} (1+r)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}}).$$

Alors, le premier terme dans (2.108) est estimé par

$$||\tau|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{Q^2}{4}\tau} I(\tau, r)|| \lesssim |\tau|^{-\frac{n}{2}} (1+r)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\{\frac{r^2}{\tau}\}}, \quad (2.110)$$

qui, combiné avec (2.109), nous permet de conclure la preuve.

En procédant comme dans le Corollaire 2.2.1 ([6, Lemma 3.2]), on peut de nouveau estimer la norme de h_τ dans les espaces de Lorentz $L^{q,\alpha}(S, \lambda)$ comme conséquence des estimations ponctuelles du noyau.

Corollaire 2.3.1 Soit $2 < q < \infty$ et $1 \leq \alpha \leq \infty$. Alors il existe une constante positive C telle que l'estimation du noyau suivante est vérifiée

$$\|h_\tau\|_{L^{q,\alpha}(S, \lambda)} \leq \begin{cases} C |\tau|^{-n/2} e^{-\frac{Q^2}{4}\operatorname{Re}\tau} & \text{si } 0 < |\tau| \leq 1, \\ C |\tau|^{-3/2} e^{-\frac{Q^2}{4}\operatorname{Re}\tau} & \text{si } |\tau| > 1. \end{cases} \quad (2.111)$$

2.3.3 Estimations de Strichartz sans poids sur $M = S$

Considérons le problème homogène de Cauchy pour l'équation linéaire de Schrödinger associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les espaces de Damek-Ricci S

$$\begin{cases} i \partial_t u(t, x) + \Delta_S u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in S, \end{cases} \quad (2.112)$$

dont la solution est

$$u(t, x) = e^{it\Delta_S} f(x) = f * s_t(x),$$

où s_t est le noyau h_{it} pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Comme déjà mentionné, dans [7] on étudie les propriétés dispersives de $e^{it\Delta_S}$, et pour faire ça on suit la stratégie utilisée dans [6], où on appliquait le phénomène de Kunze-Stein. Remarquons, que ce phénomène n'est pas valable pour des fonctions générales sur les espaces de Damek-Ricci [72, 75, 217, 219]. Pour résoudre cette difficulté, on définit certains espaces de fonctions radiales sur S qui ont une "jolie" propriété de convolution.

Définition 2.3.1 Pour $s \in [2, \infty)$, on définit \mathcal{A}_s comme l'espace de toutes les fonctions radiales κ sur S telles que

$$\int_0^\infty dr |\kappa(r)|^{s/2} \phi_0(r) A(r) < \infty,$$

où $A(r)$ est la densité radiale de la mesure gauche, introduite en (1.29). Etant donné κ dans \mathcal{A}_s , posons

$$\|\kappa\|_{\mathcal{A}_s} = \left(\int_0^\infty dr |\kappa(r)|^{s/2} \phi_0(r) A(r) \right)^{2/s}.$$

Pour $s = \infty$ notons par \mathcal{A}_∞ l'espace $L^\infty(S, \lambda)$ des fonctions radiales sur S et par $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\infty}$ la norme L^∞ .

Remarquons que \mathcal{A}_s peut être identifié avec l'espace à poids $L^{s/2}((0, \infty), \phi_0(r) A(r) dr)$.

Théorème 2.3.4 Pour tout $q \in [2, \infty]$ on a

$$L^{q'}(S, \lambda) * \mathcal{A}_q \subset L^q(S, \lambda).$$

Plus précisément, il existe une constante C_q telle que pour toute fonction f dans $L^{q'}(S, \lambda)$ et κ dans \mathcal{A}_q

$$\|f * \kappa\|_{L^q(S, \lambda)} \leq C_q \|\kappa\|_{\mathcal{A}_q} \|f\|_{L^{q'}(S, \lambda)}.$$

Preuve. Le cas $q = 2$ est couvert par [4, Théorème (3.3)]. Lorsque $q = \infty$, en prenant f dans $L^1(S, \lambda)$ et κ dans \mathcal{A}_∞ , on a que pour tout x dans S

$$|f * \kappa(x)| \leq \int_S |f(y)| |\kappa(y^{-1}x)| d\lambda(y) \leq \|f\|_\infty \|f\|_{L^1(S, \lambda)} = \|f\|_{\mathcal{A}_\infty} \|f\|_{L^1(S, \lambda)}.$$

En interpolant entre les cas $q = 2$ et $q = \infty$, on obtient que

$$[L^2(S, \lambda), L^1(S, \lambda)]_\theta * [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_\infty]_\theta \subset [L^2(S, \lambda), L^\infty(S, \lambda)]_\theta = L^q(S, \lambda) \quad (2.113)$$

où $1/q = (1 - \theta)/2$, avec $\theta \in (0, 1)$ (voir [30, Théorème 5.1.1]). De plus, par [30, Théorème 5.1.1]

$$[L^2(S, \lambda), L^1(S, \lambda)]_\theta = L^{q'}(S, \lambda)$$

et

$$[L^1((0, \infty), \phi_0 Adr), L^\infty((0, \infty), \phi_0 Adr)]_\theta = L^{q/2}((0, \infty), \phi_0 Adr).$$

On a alors $[\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_\infty]_\theta = \mathcal{A}_q$, qui combinée avec (2.113) implique la conclusion.

Revenons aux estimations dispersives $L^{\tilde{q}'} \rightarrow L^q$ du propagateur $e^{it\Delta_S}$ sur S , on peut généraliser maintenant le théorème 2.2.2 aux espaces de Damek-Ricci.

Théorème 2.3.5 Soit $2 < q, \tilde{q} \leq \infty$. Alors il existe une constante positive C telle que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'estimation dispersive suivante est vérifiée

$$\|e^{it\Delta_S}\|_{L^{\tilde{q}'}(S,\lambda) \rightarrow L^q(S,\lambda)} \leq \begin{cases} C|t|^{-\max\{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\tilde{q}}\}n} & \text{si } 0 < |t| \leq 1, \\ C|t|^{-\frac{3}{2}} & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

Preuve. ○ Pour $0 < |t| \leq 1$, en appliquant le Corollaire 2.3.1, on obtient

$$\begin{cases} \|e^{it\Delta_S}\|_{L^1(S,\lambda) \rightarrow L^q(S,\lambda)} = \|s_t\|_{L^q(S,\lambda)} \leq C|t|^{-\frac{n}{2}} & \forall q > 2, \\ \|e^{it\Delta_S}\|_{L^{q'}(S,\lambda) \rightarrow L^\infty(S,\lambda)} = \|s_t\|_{L^q(S,\lambda)} \leq C|t|^{-\frac{n}{2}} & \forall q > 2, \\ \|e^{it\Delta_S}\|_{L^2(S,\lambda) \rightarrow L^2(S,\lambda)} = 1. \end{cases}$$

Par interpolation, on peut donc conclure lorsque $|t|$ est petit.

○ Lorsque $|t| > 1$, on applique le Corollaire 2.3.1 et le théorème 2.3.4 en obtenant

$$\begin{cases} \|e^{it\Delta_S}\|_{L^1(S,\lambda) \rightarrow L^q(S,\lambda)} = \|s_t\|_{L^q(S,\lambda)} \leq C|t|^{-\frac{3}{2}} & \forall q > 2, \\ \|e^{it\Delta_S}\|_{L^{q'}(S,\lambda) \rightarrow L^\infty(S,\lambda)} = \|s_t\|_{L^q(S,\lambda)} \leq C|t|^{-\frac{3}{2}} & \forall q > 2, \\ \|e^{it\Delta_S}\|_{L^{q'}(S,\lambda) \rightarrow L^q(S,\lambda)} \leq C_q \|s_t\|_{\mathcal{A}_q} & \forall q > 2. \end{cases} \quad (2.114)$$

Pour tout $2 < q \leq \infty$, on doit majorer la norme \mathcal{A}_q du noyau s_t . Pour cela, on utilise la Proposition 2.3.1, la formule (1.29) et l'inégalité suivante (voir [15, Lemma 1])

$$\phi_0(r) \leq C(1+r)e^{-\frac{Q}{2}r},$$

à partir de cela on en déduit que s_t est dans \mathcal{A}_q et

$$\|s_t\|_{\mathcal{A}_q} \lesssim |t|^{-3/2} \quad \forall |t| > 1.$$

En utilisant les estimations dans (2.114) et par interpolation, on peut conclure la preuve.

En combinant les estimations dispersives dans le théorème 2.3.5 avec l'argument de TT^* comme dans le théorème 2.2.3, on en déduit les estimations de Strichartz pour une famille de couples admissibles plus grande que dans le cas euclidien. Remarquons qu'on retrouve le même triangle d'admissibilité T_n que dans le cas de l'espace hyperbolique et dans ce cas aussi le résultat est vrai sans hypothèses de radialité.

Théorème 2.3.6 Considérons le problème de Cauchy pour l'équation linéaire de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta_S u(t,x) = F(t,x) \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in S. \end{cases}$$

Si $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ appartiennent au triangle admissible

$$T_n = \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{2} \right] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) : \frac{2}{p} + \frac{n}{q} \geq \frac{n}{2} \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (2.115)$$

alors la solution

$$u(t,x) = e^{it\Delta_S} f(x) + \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta_S} F(s,x)$$

vérifie les estimations de Strichartz suivantes

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(S,\lambda))} \lesssim \|f\|_{L^2(S,\lambda)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; L^{\tilde{q}'}(S,\lambda))}. \quad (2.116)$$

Remarque 2.3.2 Les applications concernant le caractère bien posé et la théorie de scattering pour (NLSM), discutées dans le paragraphe 2.2.2, peuvent se généraliser aussi dans ce contexte $M = S$. On va omettre les détails.

2.3.4 Application : l'équation de Schrödinger associée à \mathcal{L}

On va présenter maintenant une intéressante application des estimations de Strichartz (2.116) sur les espaces de Damek-Ricci, concernant l'étude des propriétés dispersives de l'équation de Schrödinger associée au *Laplacien distingué* \mathcal{L} , introduit dans le paragraphe 1.3. Plus précisément, dans [7], on montre que l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ pour la solution du problème de Cauchy homogène associé n'est pas vérifiée, pourtant on trouve des estimations de type Strichartz. En effet, pour une solution du problème de Cauchy non-homogène, à partir de (2.116) et la relation spéciale entre les deux Laplaciens (1.43), on obtient des estimations de Strichartz à poids pour des couples d'admissibilité $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\bar{p}}, \frac{1}{\bar{q}})$ dans le triangle T_n . Remarquons que dans le cas particulier des espaces hyperboliques, D. Müller et C. Thiele dans [235] observent une absence d'effet dispersif analogue pour l'équation des ondes associée à \mathcal{L} et suggèrent que les estimations de Strichartz ne sont pas valables dans ce cas [235, Remark 7.2].

Considérons maintenant le problème de Cauchy homogène pour l'équation de Schrödinger linéaire sur les espaces de Damek-Ricci S associée au *Laplacien distingué* \mathcal{L}

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in S, \end{cases}$$

dont la solution est

$$u(t, x) = f * \sigma_t(x),$$

où σ_t est le noyau de convolution de l'opérateur $e^{it\mathcal{L}}$.

Il est alors intéressant d'observer que l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ pour l'équation de Schrödinger associée à \mathcal{L} n'est pas valable. Pour cela, on montre d'abord dans le Lemma 2.3.2 que le noyau σ_t n'est pas dans L^∞ et ensuite on va compléter la preuve dans la Proposition 2.3.2. Plus précisément, on minore le noyau s_t et on utilise la relation (1.45) entre les noyaux des multiplicateurs de $-\Delta_S$ et $-\mathcal{L}$,

$$\sigma_t = \delta^{1/2} e^{i \frac{\mathcal{Q}^2 t}{4}} s_t, \quad (2.117)$$

où δ est la fonction modulaire sur S .

Lemma 2.3.2 *Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ il existe des constantes positives K et c , avec $c > 1$, telles que*

$$|s_t(r)| \geq K |t|^{-n/2} r^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{\mathcal{Q}}{2} r} \quad \forall r > 1 + c|t|.$$

Preuve. On suppose par simplicité $t > 0$. Considérons d'abord le cas plus facile de la dimension k paire. A partir de l'expression du noyau (2.100) et le développement (2.102), on obtient

$$\begin{aligned} s_t(r) &= C t^{-1/2} e^{i \frac{\mathcal{Q}^2 t}{4}} e^{i \frac{r^2}{4t}} \sum_{j=1}^{(k+m)/2-1} t^{-j} a_j(r) \\ &\quad + C t^{-1/2} t^{-(k+m)/2+1} r^{(k+m)/2-1} \left(-\frac{1}{\sinh r} \right)^{k/2-1} \left(-\frac{1}{\sinh(r/2)} \right)^{m/2} \mathcal{D}_1(e^{i \frac{r^2}{4t}}) \\ &\quad + C t^{-1/2} t^{-(k+m)/2+1} r^{(k+m)/2-1} \left(-\frac{1}{\sinh r} \right)^{k/2} \left(-\frac{1}{\sinh(r/2)} \right)^{m/2-1} \mathcal{D}_2(e^{i \frac{r^2}{4t}}) \\ &= A(t, r) + B(t, r), \end{aligned} \quad (2.118)$$

où $A(t, r)$ correspond au premier terme dans la somme et $B(t, r)$ à la somme des deux derniers termes ci-dessus. En calculant les dérivées qui apparaissent dans $B(t, r)$, on a

$$B(t, r) = C t^{-1/2} t^{-(n-1)/2} \left(\frac{ir}{2} \right)^{(n-1)/2} \left(-\frac{1}{\sinh r} \right)^{k/2} \left(-\frac{1}{\sinh(r/2)} \right)^{m/2} e^{i \frac{r^2}{4t}}.$$

Comme dans la preuve de la Proposition 2.3.1, on voit que

$$A(t, r) = O(t^{-n/2+1} r^{(n-1)/2-1} e^{-\frac{Q}{2}r}) \quad \forall r > 1+t, \quad (2.119)$$

et il existe une constante positive C telle que

$$|B(t, r)| \geq C t^{-n/2} r^{(n-1)/2} e^{-\frac{Q}{2}r} \quad \forall r > 1+t. \quad (2.120)$$

A partir de (2.119) et (2.120), on déduit qu'il existe une constante assez grande c et une constante positive K telles que $|s_t(r)| \geq K t^{-n/2} r^{(n-1)/2} e^{-\frac{Q}{2}r}$, $\forall r > 1+ct$, comme demandé.

Considérons maintenant le cas plus délicat de la dimension k impaire. Comme avant, à partir de (2.100) et (2.102), on peut écrire

$$s_t(r) = \tilde{A}(t, r) + \tilde{B}(t, r), \quad (2.121)$$

où $\tilde{A}(t, r) = C t^{-1/2} \sum_{j=1}^{(k+1+m)/2-1} \int_r^\infty t^{-j} a_j(s) e^{is^2/4t} d\nu(s)$ et

$$\tilde{B}(t, r) = C t^{-1/2} t^{-n/2+1} \int_r^\infty s^{n/2-1} \left(\frac{1}{\sinh s}\right)^{(k+1)/2} \left(\frac{1}{\sinh(s/2)}\right)^{m/2} \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{is^2/4t}\right) d\nu(s). \quad (2.122)$$

Comme dans la preuve de la Proposition 2.3.1, on voit que

$$\tilde{A}(t, r) = O(t^{-(n-1)/2} r^{n/2-1} e^{-\frac{Q}{2}r}). \quad (2.123)$$

Puisque

$$d\nu(s) = \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} = \sinh s \left(2 \sinh \frac{s+r}{2} \sinh \frac{s-r}{2}\right)^{-1/2},$$

le terme principal $\tilde{B}(t, r)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t, r) &= C t^{-(n+1)/2} e^{ir^2/4t} \int_r^\infty ds s \left(\sinh \frac{s+r}{2} \sinh \frac{s-r}{2}\right)^{-1/2} \left(\frac{s}{\sinh s}\right)^{(k-1)/2} \times \\ &\quad \times \left(\frac{s}{\sinh s/2}\right)^{m/2} e^{is^2-r^2/4t} \\ &= C t^{-(n+1)/2} e^{ir^2/4t} \int_r^\infty ds s f_r(s) e^{is^2-r^2/4t}, \end{aligned}$$

où $f_r(s) = \left(\sinh \frac{s+r}{2} \sinh \frac{s-r}{2}\right)^{-1/2} \left(\frac{s}{\sinh s}\right)^{(k-1)/2} \left(\frac{s}{\sinh s/2}\right)^{m/2}$. En faisant un changement de variables $u = \frac{s^2-r^2}{4t}$, l'intégrale devient

$$\tilde{B}(t, r) = C t^{-\frac{n-1}{2}} e^{\frac{ir^2}{4t}} \int_0^{+\infty} du e^{iu} f_r(s(u)).$$

Donc

$$|\tilde{B}(t, r)| \geq |C| t^{-\frac{n-1}{2}} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{+\infty} du e^{iu} f_r(s(u)) \right\},$$

qui peut se couper dans la somme suivante

$$|C| t^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} du \sin u \{f_r(s(u)) - f_r(s(u+\pi))\},$$

et qui, puisque $u \mapsto f_r(s(u))$ est une fonction positive décroissante, peut se minorer par

$$|C| t^{-\frac{n-1}{2}} \int_0^\pi du \sin u \{f_r(s(u)) - f_r(s(u + \pi))\}.$$

Pour estimer la dernière intégrale on peut écrire

$$f_r(s(u)) - f_r(s(u + \pi)) = \int_0^\pi dv \{-f'_r(s(u+v)) s'(u+v)\}.$$

Remarquons que $s(u) = \sqrt{4tu + r^2}$, ainsi $s'(u) = \frac{2t}{s(u)}$. En calculant maintenant les dérivées de $-f'_r$, on a

$$\begin{aligned} -f'_r(s) &= \frac{1}{4} \left(\sinh \frac{s+r}{2} \sinh \frac{s-r}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \sinh s \left(\frac{s}{\sinh s} \right)^{(k-1)/2} \left(\frac{s}{\sinh s/2} \right)^{m/2} \\ &\quad + \left(\sinh \frac{s+r}{2} \sinh \frac{s-r}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{k-1}{2} \left(\frac{s}{\sinh s} \right)^{(k-3)/2} \frac{s \coth s - 1}{\sinh s} \left(\frac{s}{\sinh s/2} \right)^{m/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{s}{\sinh s} \right)^{(k-1)/2} \frac{m}{2} \left(\frac{s}{\sinh s/2} \right)^{m/2-1} \frac{\frac{s}{2} \coth(\frac{s}{2}) - 1}{\sinh \frac{s}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

On utilise maintenant dans (2.124) les estimations élémentaires

$$\sinh s \asymp e^s, \quad \sinh(s/2) \asymp e^{s/2}, \quad s \coth s - 1 \asymp s,$$

et

$$\sinh \frac{s+r}{2} \sinh \frac{s-r}{2} \asymp \frac{s^2 - r^2}{s} e^s,$$

pour obtenir

$$-f'_r(s) \asymp (s^2 - r^2)^{-1/2} s^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}s} [(s^2 - r^2)^{-1} s + 2].$$

En remplaçant $s = s(u+v) = \sqrt{4t(u+v) + r^2}$, on arrive à

$$-f'_r(s(u+v)) \asymp (4t(u+v))^{-1/2} s(u+v)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}s(u+v)} [(4t(u+v))^{-1} s(u+v) + 2]. \quad (2.125)$$

Observons que, dans l'intégrale qui définit $\tilde{B}(t, r)$, on a $1 \leq r \leq s$ et

$$s = r \sqrt{1 + 4(u+v) \frac{t}{r^2}}.$$

Puisque $0 < u+v < 2\pi$ et $r > 1+t$, on déduit

$$s(u+v) \lesssim r \left[1 + \frac{4(u+v) \frac{t}{r^2}}{2} \right] \lesssim r + 2(u+v) \frac{t}{r} \lesssim r + 4\pi.$$

A partir de (2.125) et des estimations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} -f'_r(s(u+v)) s'(u+v) &\asymp (4t(u+v))^{-1/2} r^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} [(4t(u+v))^{-1} r + 2] \frac{2t}{r} \\ &\asymp (4t(u+v))^{-1/2} r^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} [(2(u+v))^{-1} + \frac{4t}{r}] \\ &\asymp (u+v)^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r} \quad \forall r > 1+t. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Donc

$$f_r(s(u)) - f_r(s(u+\pi)) \asymp u^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r},$$

ainsi on obtient

$$|\tilde{B}(t, r)| \geq |C| t^{-\frac{n-1}{2}} \int_0^\pi du \sin u \{ f_r(s(u)) - f_r(s(u + \pi)) \} \geq C t^{-\frac{n}{2}} r^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r}. \quad (2.127)$$

A partir de (2.123) et (2.127), on voit qu'il existe une constante assez grande c et une constante positive K telles que $|s_t(r)| \geq K t^{-\frac{n}{2}} r^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r}$ pour tout $r > 1 + ct$, comme on cherchait.

Proposition 2.3.2 Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :

- (i) le noyau σ_t n'est pas dans $L^\infty(S, \rho)$;
- (ii) l'opérateur $e^{it\mathcal{L}}$ n'est pas borné de $L^1(S, \rho)$ dans $L^\infty(S, \rho)$.

Preuve. Puisque $\sigma_t = \delta^{1/2} e^{i\frac{Q^2 t}{4}} s_t$, en appliquant le Lemma 2.3.2 on déduit qu'il existe des constantes $c > 1$ et $K > 0$ pour les quelles

$$|\sigma_t(x)| \geq K |t|^{-n/2} \delta^{1/2}(x) r(x)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{Q}{2}r(x)} \quad \forall r(x) > 1 + c|t|.$$

Soit $\Omega_t = \{x = (X, Z, a) \in \mathfrak{v} \times \mathfrak{z} \times \mathbb{R}^+ : r(x) > 1 + c|t|, a < 1, |(X, Z)| < 1\}$, en utilisant la formule (1.23), pour tout point (X, Z, a) dans Ω_t , on a

$$e^{r(X, Z, a)} \asymp a^{-1} \quad \text{et} \quad r(X, Z, a) \asymp \log(a^{-1}).$$

Donc pour tout point (X, Z, a) dans Ω_t , on en déduit

$$|\sigma_t(X, Z, a)| \geq C a^{-Q/2} |t|^{-n/2} [\log(a^{-1})]^{\frac{n-1}{2}} a^{Q/2} \geq C |t|^{-n/2} [\log(a^{-1})]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Cela montre ainsi que σ_t n'est pas dans $L^\infty(S, \rho)$ et on a (i).

Soit maintenant ϕ_n une approximation de l'identité, (i.e. fonctions dans $C_c^\infty(S)$ avec support dans la boule centrée à l'identité et de rayon $1/n$ telles que $\|\phi_n\|_{L^1(S, \rho)} = 1$, $0 \leq \phi_n \leq 1$). Supposons que l'opérateur $e^{it\mathcal{L}}$ est borné de $L^1(S, \rho)$ dans $L^\infty(S, \rho)$. Alors il existe une constante M telle que $\|\phi_n * \sigma_t\|_{L^\infty(S, \rho)} \leq M$. Puisque $\phi_n * \sigma_t$ converge vers σ_t presque partout, on déduit que $|\sigma_t| \leq M$ presque partout qui contredit (i). Donc l'opérateur $e^{it\mathcal{L}}$ n'est pas borné de $L^1(S, \rho)$ vers $L^\infty(S, \rho)$.

Même si l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ n'est pas valable, à partir des estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger associée au Laplace-Beltrami (2.116) on va montrer des estimations de Strichartz à poids pour cette équation de Schrödinger associé à \mathcal{L} . Pour cela, pour tout $q \in [2, \infty)$, on introduit les poids δ_q définis par

$$\delta_q = \delta^{1-q/2} = \delta^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}. \quad (2.128)$$

Les poids δ_q apparaissent lorsqu'on relie les normes L^q des fonctions calculées par rapport à la mesure de Haar à gauche ou à droite.

Lemma 2.3.3 Pour tout $q \in [2, \infty)$, on a :

- (i) $\|\delta^{-1/2} f\|_{L^q(S, \lambda)} = \|f\|_{L^q(S, \delta_q \rho)}$ pour tout f dans $L^q(S, \delta_q \rho)$;
- (ii) $\|f\|_{L^q(S, \lambda)} = \|\delta^{1/2} f\|_{L^q(S, \delta_q \rho)}$ pour tout f dans $L^q(S, \lambda)$.

Preuve. Soit f dans $L^q(S, \delta_q \rho)$. On a

$$\begin{aligned} \|\delta^{-1/2} f\|_{L^q(S, \lambda)}^q &= \int \delta^{-q/2} |f|^q d\lambda \\ &= \int \delta^{-q/2} |f|^q \delta d\rho \\ &= \int \delta^{q(1/q-1/2)} |f|^q d\rho \\ &= \|f\|_{L^q(S, \delta_q \rho)}^q. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Cela montre (i). L'identité (ii) est une conséquence directe de la (i).

Théorème 2.3.7 Considérons le problème de Cauchy pour l'équation linéaire de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) = F(t, x) \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in S. \end{cases}$$

Pour tout $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ appartenant au triangle admissible T_n , la solution

$$u(t, x) = e^{it\mathcal{L}}f(x) + \int_0^t ds e^{i(t-s)\mathcal{L}}F(s, x), \quad (2.130)$$

vérifie les estimations de Strichartz à poids suivantes

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(S, \delta_q \rho))} \lesssim \|f\|_{L^2(S, \rho)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; L^{\tilde{q}'}(S, \delta_{\tilde{q}'} \rho))}.$$

Preuve. A partir de (2.117), on déduit que

$$u(t, x) = e^{i\frac{Q^2 t}{4}} f * (\delta^{1/2} s_t)(x) + \int_0^t ds e^{i\frac{Q^2(t-s)}{4}} [F * (\delta^{1/2} s_{(t-s)})](s, x). \quad (2.131)$$

On peut voir facilement que pour toutes fonctions h, g sur S , on a

$$h * (\delta^{1/2} g) = \delta^{1/2} [(\delta^{-1/2} h) * g]. \quad (2.132)$$

En appliquant (2.132) dans (2.131), on obtient

$$e^{-i\frac{Q^2 t}{4}} \delta^{-1/2} u(t, x) = (\delta^{-1/2} f) * s_t(x) + \int_0^t ds e^{-i\frac{Q^2 s}{4}} [\delta^{-1/2} F * s_{(t-s)}](s, x). \quad (2.133)$$

Supposons maintenant que $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ appartiennent au triangle admissible T_n , introduit dans (2.115). En utilisant le Lemma 2.3.3 et le théorème 2.3.6, on trouve

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(S, \delta_q \rho))} &= \|\delta^{-1/2} u\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q(S, \lambda))} \\ &\lesssim \|\delta^{-1/2} f\|_{L^2(S, \lambda)} + \|\delta^{-1/2} F\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; L^{\tilde{q}'}(S, \lambda))} \\ &= \|f\|_{L^2(S, \rho)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; L^{\tilde{q}'}(S, \delta_{\tilde{q}'} \rho))}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

comme on voulait.

2.4 Perspectives

Comme évoqué dans le rappel du cas euclidien, l'étude du comportement global des équations de Schrödinger a beaucoup progressé récemment, mais de nombreuses questions restent ouvertes. On a mis en lumière ci-dessus une influence un peu inattendue de la courbure négative sur les propriétés dispersives qui nous a permis d'établir que toute non-linéarité est de courte portée sur l'espace hyperbolique. La courbure négative a aussi un effet favorable sur les estimations de type Morawetz comme remarqué par Ionescu-Staffilani [171] qui permet d'arriver à des résultats de scattering dans H^1 pour toute non-linéarité sous-critique *défocalisante*. Il reste cependant de nombreuses questions ouvertes dans l'étude de l'influence de la courbure sur le comportement qualitatif de NLS à données grandes, certaines déjà évoquées auparavant. Par exemple une piste intéressante semble être l'extension des résultats de Dodson ([102], [103]) au moins au cas de l'espace hyperbolique. En ce qui concerne le résultat de scattering dans L^2 , est-ce que la courbure négative permet de l'obtenir pour toutes les non-linéarités sous-critiques ? Dans le cas *focalisant*, l'existence et la stabilité orbitale des ondes solitaires sur l'espace hyperbolique a récemment

été étudié par Christianson et Marzuola [62]. Les questions de stabilité asymptotiques semblent très intéressantes à étudier vu les résultats de scattering bien meilleurs que dans le cas euclidien mentionnés ci-dessus. Il reste aussi des questions intéressantes dans l'étude des effets régularisants locaux et de leur application aux équations de Schrödinger avec dérivées.

Récemment les problèmes de Schrödinger maps et wave maps à valeurs dans l'espace hyperbolique ou les sphères ont été très étudiés ([286], [277], [204]). Une piste aussi intéressante serait d'étudier ce type de problèmes dans le cas où l'espace de départ est l'espace hyperbolique. D'ailleurs des phénomènes intéressants dans cette direction ont été obtenus par exemple dans [208] pour les wave maps en dimension 2.

Les problèmes considérés ci-dessus ont aussi une extension naturelle aux espaces symétriques de rang quelconque, qui constituent une classe de variétés riemannniennes non-compactes à courbure négative, et dont les espaces hyperboliques réels sont un cas particulier. Grâce à la richesse de leur structure, on dispose sur ces espaces d'une théorie de Fourier précise, même si elle présente de grandes difficultés techniques ([129], [158], [161]). On se propose d'obtenir des estimations dispersives du noyau de Schrödinger dans ce cadre, en faisant appel à l'analyse de Fourier sphérique et en particulier au comportement asymptotiques des fonctions sphériques. Cela constitue un travail en cours [9] avec Anker, Meda (Université Milano Bicocca) et Vallarino (Politecnico Torino) qui s'inscrit dans la continuation d'un projet franco-italien GALILEE. Notre premier objectif est d'établir une estimation dispersive optimale de la norme $L^1\text{-}L^\infty$ de $e^{it\Delta_M}$, qui revient à montrer une estimation optimale de la norme L^∞ du noyau de Schrödinger s_t .

On a montré que si $|t| > 1$

$$\|s_t\|_\infty \lesssim |t|^{-\nu/2}, \quad (2.135)$$

où ν est la pseudo-dimension, qui dépend du rang ℓ et du nombre des racines positives indivisibles, et donc de la structure algébrique du groupe G . La démonstration de cette estimation présente un haut niveau de difficulté technique : elle a été obtenue en utilisant la formule de la transformation sphérique inverse et des estimations fines des fonctions sphériques et de leurs dérivées ([158], [161]). Dans l'estimation dispersive (2.135) on voit paraître une puissance de $|t|$ différente de celle qui intervient dans le cas euclidien (qui dépend de la dimension topologique de l'espace). Ce nouveau phénomène dépend de la géométrie et de la structure algébrique des espaces symétriques. Le même phénomène avait été déjà montré dans le cas des espaces hyperboliques réels dans [6], mais avec une technique différente (application de la formule d'inversion de la transformée d'Abel) qui ne peut pas être adaptée au cas général de rang arbitraire qui on étudie dans ce projet.

Il nous reste à prouver une estimation dispersive pour temps petit. On s'attend une estimation de type euclidien

$$\|s_t\|_\infty \lesssim |t|^{-n/2} \quad \forall |t| < 1.$$

On est arrivé à montrer telle estimation dans des cas particuliers (rang $\ell = 1$, cas complexes), mais on n'est pas encore arrivé à la montrer en toute généralité.

Le premier objectif de notre travail est donc celui de prouver l'estimation dispersive en temps petit sur un espace symétrique quelconque. On se propose après de combiner l'estimation L^∞ du noyau avec la conservation de l'énergie pour en déduire des estimations de Strichartz et les appliquer à l'étude de l'équation de Schrödinger semi-linéaire.

D'autre part, j'avais obtenu dans [249] des estimations dispersives (et de type Strichartz) pour l'équation de Schrödinger sur certains produits de variétés, pour lesquels on dispose des estimations dispersives de chaque facteur. Parmi les applications de ce résultat, il y avait l'équation de Schrödinger pour deux particules en interaction sur \mathbb{R}^{2n}

$$iu_t - \Delta_{x,y} u + V(x-y)u = 0$$

et l'équation de Schrödinger sur le produit de deux espaces hyperboliques $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$. Cela contient un cas d'espaces symétriques de rang 2, parmi les autres qui dépendent de la configuration du système des racines liée à la structure algébrique de l'espace symétrique.

Enfin, comme déjà évoqué, la théorie pour (NLS) sur les variétés compactes a été aussi très étudié dans les dernières années. En particulier, Burq, Gérard et Tzvetkov dans [47] ont développé la théorie locale dans des espaces de Sobolev avec régularité basse. De tels résultats ne demandent aucune hypothèse sur la variété, mais il ne sont pas optimaux (par rapport à la perte de dérivées). Pour certaines variétés (essentiellement les sphères de dimension 3) ce type de résultat a été amélioré récemment par Herr, Tataru, Tzvetkov [162] (pour traiter le cas H^1 -critique).

J'envisage d'étudier ce type de problèmes dans le cadre de certains quotients de groupes de Lie qui engendrent des variétés compactes et possède une analyse de Fourier assez riche. Par exemple, on espérerait se rapprocher des résultats classiques de Bourgain sur le tore en améliorant les estimations de Strichartz ou leur version multilinéaires et en réduisant la perte de dérivées.

3. EQUATION DES ONDES

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de Cauchy pour l'équation des ondes semi-linéaire suivant

$$(NLW) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F(u), \\ u(0) = f, \\ \partial_t u(0) = g \end{cases}$$

qui a été intensivement étudiée à partir des années 1970 en lien avec ses applications importantes en Physique-Mathématique. L'équation des ondes est une équation d'évolution de type hyperbolique, une des ses caractéristiques importantes est donc la vitesse de propagation finie. Ici, la fonction u est une fonction à valeurs réelles et dépend de deux variables, temps et espace. La variable d'espace $x \in M$ peut être prise selon les cas, dans \mathbb{R}^n , un domaine de \mathbb{R}^n , ou plus généralement une variété riemannienne avec le Laplacien naturel. Comme déjà discuté dans le chapitre 2, des non-linéarités $F(u)$ intéressantes dans le modèle semi-linéaire, sont les non-linéarités de *type puissance*, qui vérifient (2.1) avec "au besoin" de conditions de régularité sur F . Dans ce cas, l'énergie

$$E(u, \partial_t u) = \int_M |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 - G(u) dx \quad (3.1)$$

où G est telle que $G'(u) = F(u)$ est conservée. On parle d'équation *défocalisante* si G est négative et d'équation *focalisante* si G est positive. Si on se restreint à des non-linéarités polynomiales homogènes, les possibilités sont $F(u) = \pm |u|^\gamma$ et $F(u) = \pm |u|^{\gamma-1} u$, avec $\gamma > 1$. Seules les $F(u) = -|u|^{\gamma-1} u$ sont *défocalisantes* et les $F(u) = |u|^{\gamma-1} u$ sont *focalisantes*. Comme précédemment, les questions naturelles associées à ce type de problème de Cauchy non-linéaire concernent aussi la régularité minimale des données initiales pour obtenir l'existence et unicité locale ou globale des solutions, la description de la formation de singularités ou la description du comportement asymptotique, le scattering, l'existence des opérateurs d'onde, l'existence de structures particulières stables comme les ondes solitaires.

On va d'abord rappeler les résultats bien connus dans le cas classique de l'espace euclidien \mathbb{R}^n et ensuite on présentera certaines généralisations dans le contexte de variétés riemannienne non-compactes.

3.1 Le cadre euclidien \mathbb{R}^n

3.1.1 Propriétés dispersives

Pour une description détaillée du sujet on renvoie le lecteur aux textes de [267], [276], [130].

Commençons par énoncer quelques résultats classiques concernant le problème de Cauchy (NLW) local. On rappelle que :

Définition 3.1.1 Soit $s \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy (NLW) est localement bien posé dans $H^s(M) \times H^{s-1}(M)$ si pour tout borné B de $H^s(M) \times H^{s-1}(M)$, il existe $T > 0$ et un espace de Banach X_T , avec inclusion continue dans $C([-T, +T]; H^s(M)) \times C^1([-T, +T]; H^{s-1}(M))$, tel que

- pour toute donnée initiale $(f, g) \in B$, (NLW) a une unique solution $u \in X_T$;

- le flot $(f, g) \mapsto u$ est (uniformément) continu de B dans X_T .

(NLW) est globalement bien posé si ces propriétés sont vérifiées avec $T = \infty$.

De plus, on dira que le problème de Cauchy (NLW) est mal posé dans $H^s(M) \times H^{s-1}(M)$ si le flot $(f, g) \mapsto u$ n'est pas (uniformément) continu de B dans X_T .

Considérons le problème de Cauchy linéaire non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F, \\ u(0) = f, \\ \partial_t u(0) = g \end{cases}$$

en utilisant la transformation de Fourier, on a formellement l'expression

$$u(t, x) = (\cos tD)f(x) + \frac{\sin tD}{D}g(x) + \int_0^t ds \frac{\sin(t-s)D}{D}F(s, x), \quad \text{où } D = \sqrt{-\Delta}.$$

En utilisant un théorème de point fixe et la formule ci-dessus, on a le résultat classique que le problème de Cauchy non-linéaire avec des non-linéarités de type puissance assez régulières (NLW) est localement bien posé dans $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ pour $s > n/2$. La question intéressante naturelle est : étant donnée une non-linéarité $F(u)$ (la moins régulière possible) dans (NLW) , quel est l'indice de régularité minimale s pour lequel le problème de Cauchy non-linéaire est bien posé dans $H^s \times H^{s-1}$? Au vu des quantités conservées (3.1), il semble particulièrement intéressant de travailler dans $\dot{H}^1 \times L^2$ comme espace de résolution. Dans ce cas aussi, on peut remarquer que pour les non-linéarités modèle puissance homogène, il y a un changement d'échelle qui laisse invariant l'équation non-linéaire : si $u(t, x)$ est une solution de (NLW) , alors $u_\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}}u(\lambda t, \lambda x)$ est aussi solution. Le seul espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ invariant par ce changement d'échelle correspond à $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{\gamma-1}$, appelé indice critique. De manière générale on s'attend à ce qu'un problème de Cauchy non-linéaire soit bien posé pour $s \geq s_c$ et mal posé si $s < s_c$. Effectivement, grâce aux propriétés de scaling Ponce-Sideris [257] donnent un contre-exemple pour montrer que (NLW) est mal posé si $s < s_c$, comme aussi dans le cas précédent. Mais, de plus, (NLW) vérifie aussi les symétries de Lorentz

$$u(t, x) \rightarrow u\left(\frac{t - vx_1}{(1 - |v|^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{x_1 - vt}{(1 - |v|^2)^{\frac{1}{2}}}, x_2, \dots, x_n\right)$$

pour toute vitesse v , $-1 < v < 1$. Ainsi, certaines combinaisons de ces symétries avec les propriétés de scaling suggèrent aussi que (NLW) est bien posé pour $s \geq s_{conf} := \frac{n+1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}$ et mal posé si $s < s_{conf}$. En effet, pour les non-linéarités du type $F(u) = |u|^\gamma$ et $F(u) = |u|^{\gamma-1}u$, Ponce-Sideris [257] et Lindblad-Sogge [214] améliorent les résultats concernant le caractère mal posé du problème non-linéaire et ils montrent que (NLW) est mal posé si

$$s < \begin{cases} s_{conf} = \frac{n+1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}, & \text{si } \gamma \leq \frac{n+3}{n-1}, \\ s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{\gamma-1}, & \text{si } \gamma \geq \frac{n+3}{n-1}. \end{cases}$$

L'endpoint $(\gamma_{conf}, s_{conf}) = (\frac{n+3}{n-1}, \frac{1}{2})$ s'appelle point conforme. Il faut quand même souligner que dans ce contexte il y a encore des questions intéressantes ouvertes concernant l'étude du caractère mal posé et/ou bien posé de (NLW) (pour des non-linéarités de *type puissance générales*). Remarquons qu'en ce qui concerne le caractère mal posé pour les non-linéarités *défocalisantes*, la situation est encore plus ouverte car on sait montrer que (NLW) est mal posé seulement si $s < s_c$ (voir [60]). Ces considérations font remarquer aussi que l'étude du caractère bien posé ou mal posé de (NLW) selon la régularité optimale s des données initiales est beaucoup plus complexe

par rapport au cas de l'équation de Schrödinger et on rappellera plus tard les résultats les plus connus concernant le caractère bien posé. En tout cas, pour améliorer l'indice de régularité s par rapport à $\frac{n}{2}$, il faut utiliser de manière plus subtile les propriétés dispersives de l'équation linéaire. La situation en ce qui concerne aussi les estimations dispersives est plus délicate. Même si déjà connus dans certains cas, la première analyse complète avait été faite en 1971 par von Wahl ([310]), qui avait montré que la solution de l'équation des ondes en dimension $n \geq 2$

$$\square u \equiv (\partial_t^2 - \Delta)u = 0, \quad u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = g$$

satisfait l'estimation dispersive suivante :

$$|u(t, x)| \leq C (1+t)^{-\frac{n-1}{2}} \|g\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^n)}$$

pour $N = N(n)$ assez grand et où $W^{N,1}$ sont les espaces de Sobolev classiques. Cette estimation a été améliorée, étendue et raffinée par plusieurs auteurs, en particulier par Brenner (qui a introduit l'utilisation des espaces de Besov), Pecher, Kapitanski, Ginibre et Velo (voir les références [177], [139]), pour prendre la forme optimale, par rapport à la perte de dérivées, suivante :

$$|u(t, x)| \leq C t^{-\frac{n-1}{2}} \|g\|_{\dot{B}_{1,1}^{\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.2)$$

où $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov *homogeneous Besov space* sur \mathbb{R}^n défini, en utilisant la théorie de Littlewood-Paley, par

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^q = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\phi_j(\sqrt{-\Delta})f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \quad (3.3)$$

où ϕ_0 est une fonction régulière dont le support est dans $[1/2, 2]$ et $\phi_j(r) = \phi_0(2^{-j}r)$, $j \in \mathbb{Z}$, de telle sorte que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j(|x|) = 1 \quad \text{for } x \neq 0.$$

L'estimation dispersive (3.2) s'obtient facilement à partir de sa version optimale tronquée en fréquences :

$$\left| \phi_0(\sqrt{-\Delta}/\lambda) e^{it\sqrt{-\Delta}} f \right| \lesssim \lambda^{\frac{d+1}{2}} \cdot |t|^{-\frac{d-1}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (3.4)$$

Comme précédemment remarqué, il est possible de déduire de (3.4) aussi les *estimations de Strichartz*. Rappelons que l'estimation initialement prouvé par Strichartz [281] n'est en fait qu'un cas spécial, dont la preuve est basée sur des techniques d'analyse harmonique, comme le théorème d'interpolation complexe de Stein. Ces estimations ont été développées et raffinées par Ginibre et Velo [139] au moyen des outils abstraits d'analyse fonctionnelle pour obtenir une description complète en excluant les cas limites, autrement dit *endpoints*. Ces cas ont été étudiés par Keel et Tao [185] qui ont donné une forme complète de ces estimées.

On considère donc maintenant le problème de Cauchy linéaire non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = F(t, x) \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t u(0, x) = g(x), \end{cases} \quad (3.5)$$

Nous avons les estimations suivantes :

Théorème 3.1.1 Soient $(p, q), (\tilde{p}, \tilde{q}) \in [2, \infty] \times [2, \infty)$ deux couples $\frac{n-1}{2}$ -admissibles, c'est-à-dire

$$\frac{2}{p} + \frac{n-1}{q} \leq \frac{n-1}{2}, \quad \frac{2}{\tilde{p}} + \frac{n-1}{\tilde{q}} \leq \frac{n-1}{2}, \quad n \geq 3 \quad (3.6)$$

tels que pour $s = s(p, q)$ et $\tilde{s} = s(\tilde{p}, \tilde{q})$ la condition suivante, qui vient de l'analyse dimensionnelle, est vérifiée

$$s(p, q) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) + \max \{ 0, \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} \} = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) & \text{si } \frac{1}{p} = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \\ n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} & \text{si } \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right). \end{cases}$$

Soit $I = [0, T]$ ou \mathbb{R} , $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $g \in \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ et $F \in L^{\tilde{p}'}(I, \dot{H}_{\tilde{q}'}^{s+\tilde{s}-1}(\mathbb{R}^n))$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution de (3.5) les estimations de Strichartz sont vérifiées

$$\|u\|_{C(I, \dot{H}^s(\mathbb{R}^n))} + \|\partial_t u\|_{C(I, \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{L^p(I, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \left(\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I, \dot{H}_{\tilde{q}'}^{s+\tilde{s}-1}(\mathbb{R}^n))} \right), \quad (3.7)$$

$$\text{où } \|u\|_{L^p(I, L^q(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 3.1.1 Cette estimation reste vraie pour l'endpoint $(p, q) = (2, \frac{2(n-1)}{n-3})$ en dimension $n \geq 4$, mais elle est fausse en dimension $n = 3$. Le couple $(p, q) = (2, \infty)$, endpoint en dimension $n = 3$, est exclu par le contre-exemple donné dans [285] par Tao.

Le point clé de la preuve est de démontrer les estimations de Strichartz pour le groupe $e^{it\sqrt{-\Delta}}$. On utilise le même schéma que dans le cas de Schrödinger, on veut d'abord interpoler entre la conservation de l'énergie et une inégalité dispersive pour obtenir des estimations dispersives duales $L^q - L^{q'}$ avec $1 < q \leq 2$, puis utiliser l'argument TT^* . La difficulté technique supplémentaire, vient de l'estimation dispersive qui n'est pas une estimation $L^\infty - \dot{H}_1^{\frac{n+1}{2}}$. Pour résoudre ce problème, on utilise la théorie de Littlewood-Paley, et on montre d'abord une version localisée $L^1 \rightarrow L^\infty$, dont on déduit les estimations dispersives duales. Plus précisément, on part donc de l'estimation dispersive localisée en fréquences

$$\|e^{it\sqrt{-\Delta}} \phi_j(\sqrt{-\Delta}) f\|_{L^\infty} \lesssim \frac{2^{j\frac{n+1}{2}}}{|t|^{\frac{n-1}{2}}} \|\phi_j(\sqrt{-\Delta}) f\|_{L^1},$$

et en interpolant avec l'estimation d'énergie, on en déduit

$$\|e^{it\sqrt{-\Delta}} \phi_j(\sqrt{-\Delta}) f\|_{L^q} \lesssim \frac{2^{j\frac{n+1}{2}(1-\frac{2}{q})}}{|t|^{\frac{n-1}{2}(1-\frac{2}{q})}} \|\phi_j(\sqrt{-\Delta}) f\|_{L^{q'}}$$

pour $1 \leq q' \leq 2$. En utilisant l'équivalence

$$\|h\|_{L^r} \sim \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\phi_j(\sqrt{-\Delta}) h(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^r}$$

pour $1 < r < \infty$ et l'inégalité de Minkowski (car $1 < q' \leq 2$ et $q \in [2, +\infty)$), on obtient les estimations dispersives duales suivantes

$$\begin{aligned} \|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^q} &\lesssim \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\phi_j(\sqrt{-\Delta})e^{it\sqrt{-\Delta}}f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q} \lesssim \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\phi_j(\sqrt{-\Delta})e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^q}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{n-1}{2}(1-\frac{2}{q})}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2j\frac{(n+1)}{2}(1-\frac{2}{q})} \|\phi_j(\sqrt{-\Delta})f\|_{L^{q'}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{n-1}{2}(1-\frac{2}{q})}} \|f\|_{\dot{H}_{q'}^s}, \end{aligned}$$

pour $1 < q' \leq 2$ et $s = \frac{(n+1)}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right)$. On peut ensuite conclure la preuve, comme vu précédemment pour l'équation de Schrödinger, en utilisant la stratégie développée par Ginibre Velo [139] et Keel Tao [185] combinée avec certaines injections de Sobolev.

Les *inegalités de type Morawetz*, qui donnent des bornes espace-temps globales sont un outil puissant pour comprendre le comportement global des solutions dans le cas défocalisant. On rappelle que Perthame et Vega [246] ont établi des estimations de type Morawetz

$$\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(t, x)|^{\gamma+1}}{|x|} dx dt \lesssim E.$$

pour l'équation des ondes sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n en dimension $n \geq 3$ avec énergie E donnée par (3.1). On verra dans la suite que des estimations similaires et même meilleures grâce à la courbure négative peuvent être établies sur l'espace hyperbolique.

L'équation des ondes perturbée par un potentiel est aussi très étudiée. Comme remarqué précédemment dans le cas de Schrödinger, l'ajout d'un potentiel peut très fortement affecter les propriétés dispersives. En ce qui concerne l'équation des ondes perturbée par un potentiel suffisamment décroissant à l'infini, Beals et Strauss ont montré des estimations dispersives avec des potentiels positifs (ou petits) et dans la classe de Schwarz ([25], [27]). Dans ce cas aussi, plusieurs progrès ont été fait pour relaxer les hypothèses sur le potentiel par Yajima, Cuccagna, Georgiev et Visciglia, Goldberg ([314], [85], [132], [29]). Pour une forme générale de potentiels, en dimension 3 les meilleurs résultats pour obtenir les estimations dispersives demandent des potentiels dans la classe de Kato (voir [247], [96]).

Comme pour l'équation de Schrödinger, il est aussi possible de démontrer directement des estimations de Strichartz pour des potentiels plus singuliers mais vérifiant des conditions supplémentaires, le cas critique du potentiel $\frac{\alpha}{|x|^2}$ a été étudié par Burq, Planchon, Stalker et Tahvilard-Zadeh ([46], [45]).

Comme déjà évoqué, pour des potentiels croissants à l'infini les estimations dispersives sont valables seulement en temps petit, car le spectre est discret. Un exemple modèle de ce type de comportement est l'oscillateur harmonique $V(x) = |x|^2$.

Je vais maintenant présenter un travail [97], en collaboration avec Piero D'Ancona et Fulvio Ricci, dans lequel on étudie les propriétés dispersives pour l'équation des ondes associées à l'opérateur d'Hermite et au "twisted Laplacien". Cet opérateur est très important en analyse harmonique et l'intérêt en EDP vient du fait qu'il peut être vu comme une perturbation du Laplacien par un oscillateur harmonique et un potentiel magnétique.

3.1.2 Estimations dispersives pour l'équation des ondes associée au "Laplacien twisté"

L'opérateur d'Hermite $H = -\Delta + |x|^2$ sur \mathbb{R}^d et le "Laplacien twisté"

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left[(\partial_{x_j} - iy_j)^2 - (\partial_{y_j} + ix_j)^2 \right]. \quad (3.8)$$

sur \mathbb{R}^{2d} sont tous les deux très étudiés en raison de leurs propriétés spectrales remarquables et de leur signification géométrique. En effet, on peut les voir comme des opérateurs de Schrödinger perturbés par des champs électromagnétiques, mais ils sont aussi intimement liés au sous-Laplacien sur le groupe de Heisenberg \mathbb{H}^d qui peut être défini comme la variété $\mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$ avec la structure de groupe de Lie

$$(z, t) \cdot (w, s) = \left(z + w, t + s + \frac{1}{2} \operatorname{Im} zw \bar{w} \right).$$

En coordonnées $(z, t) \simeq (x, y, t)$, le sous-Laplacien \mathcal{L} s'écrit

$$\mathcal{L} = -\Delta_{x,y} - \frac{1}{4}(|x|^2 + |y|^2)\partial_t^2 - \sum_{j=1}^d (x_j \partial_{y_j} - y_j \partial_{x_j})\partial_t.$$

Le "Laplacien twisté" L est alors relié à \mathcal{L} via

$$Lf(z) = e^{-it}\mathcal{L}(e^{it}f(z))$$

sur les fonctions $f(z)$ ne dépendant pas de la variable t . D'autre part, si on considère la transformée de Fourier sur le groupe à valeur opérateur

$$\hat{f}(\lambda) = \int f(z, t)\pi_\lambda(z, t)dzdt, \quad f \in L^1(\mathbb{H}^d)$$

où $\pi_\lambda(z, t)$ est pour tout $(z, t) \in \mathbb{H}^d$ l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$\pi_\lambda(z, t)\phi(\xi) = e^{i\lambda(t+x \cdot \xi + x \cdot y/2)}\phi(\xi + y),$$

l'opérateur d'Hermite satisfait alors l'identité

$$\widehat{\mathcal{L}f}(1) = \hat{f}(1)H.$$

On renvoie à la littérature classique sur le sujet [294] pour plus de détails.

Du point de vue de la théorie spectrale, H et L sont des opérateurs autoadjoints positifs sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ avec les domaines naturels $D(H) = \{f \in L^2: Hf \in L^2\}$, $D(L) = \{f \in L^2: Lf \in L^2\}$. Le spectre est discret avec un bas du spectre strictement positif. En effet,

$$\sigma(H) = \sigma(L) = \{d + 2k: k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Les sous-espaces propres correspondantes pour H sont de dimension finie et engendrés par les fonctions d'Hermite

$$h_\alpha = (-1)^{|\alpha|} e^{\frac{|x|^2}{2}} \partial_x^\alpha e^{-|x|^2}, \quad Hh_\alpha = (n + 2|\alpha|)h_\alpha.$$

En ce qui concerne L , les sous espaces-propres sont de dimension infinie avec la base

$$f_{\alpha,\beta} = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} e^{\frac{|z|^2}{4}} \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta e^{-\frac{|z|^2}{2}}, \quad Lf_{\alpha,\beta} = (d + 2|\alpha|)f_{\alpha,\beta},$$

où on a utilisé la notation complexe

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\nabla_x - i\nabla_y) \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\nabla_x + i\nabla_y).$$

Dans les deux cas, on utilisera la notation P_k pour la projection orthogonale sur le sous espace propre de la valeur propre $d+2k$. On rappelle que les estimations L^p optimales pour les opérateurs P_k ont été obtenus par Koch et Tataru [200], [199]. De plus, dans le cas du *Laplacien twisté*, les projections P_k ont une représentation simple en utilisant les fonctions de Laguerre normalisées

$$\varphi_k(x, y) = e^{-\frac{|x|^2+|y|^2}{2}} L_k^{(d-1)}\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{2}\right)$$

(i.e. $\|\varphi_k\|_{L^\infty} \leq \varphi_k(0) = 1$) et l'opérateur de *convolution twisté*

$$\varphi \times f = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(xy'-x'y)} \varphi(x-x', y-y') f(x', y') dx' dy'.$$

Remarquons que cette normalisation n'est pas la normalisation la plus standard, mais par souci de simplicité, on gardera la notation L_k^d pour les polynômes de Laguerre. Avec ces notations, on a

$$P_k f = \binom{k+d-1}{d-1} \varphi_k \times f.$$

Les groupes $e^{itH} f$, $e^{itL} f$ correspondent aux équations de Schrödinger

$$iu_t + Hu = 0, \quad iu_t + Lu = 0 \tag{3.9}$$

avec la donnée initiale f . Les propriétés dispersives peuvent être déduites de la représentation explicite

$$e^{itH} f(x) = \frac{C}{(\sin 2t)^{d/2}} \int e^{\frac{2(|x|^2+|x'|^2)\cos(2t)-2xx'}{i\sin(2t)}} f(x') dx' \tag{3.10}$$

qui est une version de la *formule de Mehler*, et

$$e^{itL} f(x, y) = \frac{C}{(\sin 2t)^d} \int e^{\frac{2|x-x'|^2+|y-y'|^2}{i\tan(2t)}} e^{i(xy'-x'y)} f(x', y') dx' dy'. \tag{3.11}$$

qui peut être obtenue par prolongement du noyau de la chaleur correspondant (voir [232]). On a alors en temps petit, l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ standard

$$|e^{itH} f| \lesssim (\sin 2t)^{-d/2} \|f\|_{L^1}, \quad |e^{itL} f| \lesssim (\sin 2t)^{-d} \|f\|_{L^1}. \tag{3.12}$$

Remarquons que les deux flots sont périodiques en temps avec une première refocalisation en $t = \pi/2$. On ne peut donc pas espérer d'estimations dispersives globales en temps. Cependant, pour les temps petits, $|t| \leq T$ ($T < \pi/2$, le comportement est identique à celui de l'équation de Schrödinger libre). En conséquence, l'argument usuel de Ginibre-Velo [139] et Keel-Tao [185] rappelé dans la première partie s'applique et les estimations de Strichartz locales sont donc vrai pour les couples admissibles habituels. On peut aussi mentionner que pour les équations de Schrödinger

$$iu_t - (\nabla - iA(t, x))^2 u + V(t, x)u = 0$$

perturbées par des potentiels électriques sous-quadratiques $V(t, x)$ et des potentiels magnétiques sous-linéaires $A(t, x)$, un parametrix a été construit par K.Yajima dans [315]. Les résultats ci-dessus peuvent donc être vus comme des cas particuliers de ce résultat général.

Il est ensuite naturel d'étudier les groupes $e^{it\sqrt{H}}f$, $e^{it\sqrt{L}}f$, qui servent à décrire les solutions de l'équation des ondes

$$u_{tt} + Hu = 0, \quad u_{tt} + Lu = 0 \quad (3.13)$$

via les identités usuelles ($A = H$ ou L)

$$\cos(t\sqrt{A}) = \frac{e^{it\sqrt{A}} + e^{-it\sqrt{A}}}{2}, \quad \frac{\sin(t\sqrt{A})}{\sqrt{A}} = \frac{e^{it\sqrt{A}} - e^{-it\sqrt{A}}}{2i\sqrt{A}}. \quad (3.14)$$

Ces opérateurs ont été très étudiés, la plupart des travaux concernent des extensions des estimations L^p optimales bien connues du cas euclidien

$$(1 - \Delta)^{-\alpha/2} e^{it\sqrt{-\Delta}} : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d) \quad (3.15)$$

qui est vraie dès que

$$\alpha \geq (d-1)|p^{-1} - 2^{-1}|, \quad 1 < p < \infty$$

et aussi de l'espace de Hardy réel \mathcal{H}^1 vers L^1 . Les bornes (3.15) ont été montrées par Peral [244] et Miyachi [230] et étendues dans plusieurs directions, par exemple les équations hyperboliques générales et les FIO [28], [265]; l'équation des ondes associé à l'opérateur de Hermite [295]; et le cas du sous-Laplacien sur \mathbb{H}^d [18], [234], [233]. Tie et Wong [297] ont montré la propagation à vitesse finie dans le cas du Laplacien twisté.

Dans [97], notre but a été d'étudier les propriétés dispersives locales des groupes $e^{it\sqrt{H}}f$ et $e^{it\sqrt{L}}f$. Comme rappelé précédemment, pour l'équation des ondes sur l'espace euclidien, l'estimation dispersive optimale est plus agréable à présenter sous une forme tronquée en fréquence. Nous avons obtenu : pour les groupes des ondes associés à H et L :

Théorème 3.1.2 *Soit $0 < T < \pi/2$. Soit $\phi_0(r)$ régulière et supportée dans $[1/2, 2]$, notons par A soit l'opérateur d'Hermite H sur \mathbb{R}^d soit le Laplacien twisté L sur \mathbb{R}^{2d} . Nous avons pour le groupe des ondes pour A , les estimations dispersives (avec $n = d$ pour H et $n = 2d$ pour L) :*

$$|\phi_0(\lambda^{-1}\sqrt{A})e^{it\sqrt{A}}f| \lesssim \lambda^{\frac{n+1}{2}} \cdot |t|^{-\frac{n-1}{2}} \|f\|_{L^1}, \quad \lambda > 0, \quad |t| \leq T. \quad (3.16)$$

Remarque 3.1.2 La preuve du Théorème 3.1.2 est basée sur une formule du subordination introduite par Müller et Seeger [233]; cette méthode est assez robuste et peut être adaptée à des situations bien plus générales, par exemple pour les opérateurs perturbés par des potentiels avec croissance sous quadratique pour la partie électrique et croissance sous linéaire pour la partie magnétique. En particulier, on peut montrer une estimation dispersive optimale locale en temps (i.e., identique à celle de l'équation des ondes libres) pour toute équation des ondes perturbée par un champ magnétique constant

$$u_{tt} - \sum_j (\partial_j - ia_j x_j)^2 u = 0.$$

Remarque 3.1.3 En sommant sur les fréquences dyadiques, on obtient une estimation du type (3.2) dans un espace de Besov modifié basé sur les opérateurs H ou L à la place du Laplacien $-\Delta$:

$$\|f\|_{B_{1,1}^s(A)} = \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{js} \|\phi_j(\sqrt{A})f\|_{L^1}, \quad A = H \text{ ou } L.$$

Ici les fréquences possibles sont minorées puisque le spectre est positif et discret, on peut donc enlever de la somme les termes pour lesquels $j \leq 0$ (en supposant de plus que $\phi_0(r) = 1$ sur $[1, 3/2]$). Ainsi la norme Besov modifiée non homogène coïncide avec la norme homogène $B_{1,1}^s(A)$. Pour une étude détaillée des espaces $B_{p,q}^s(H)$, $B_{p,q}^s(L)$, on renvoie à to [240], [114], [111]. Une question naturelle est de comparer les normes de ces espaces modifiés avec celles des espaces standards (3.3). Nous n'avons pas étudié cette question dans l'article.

La démonstration du Théorème 3.1.2 est basée sur une réduction au groupe de Schrödinger correspondant. Cela donne un résultat très précis pour les temps petits, mais il y a aussi un défaut important. En effet, le groupe de Schrödinger est périodique en temps et donc pour avoir une estimation dispersive de type $L^1 - L^\infty$ à $t = \pi/2$, la meilleure estimation devient celle donnée par l'inégalité de Bernstein c'est à dire l'injection de Sobolev localisée en fréquences

$$\|\phi_0(\lambda^{-1}\sqrt{L})\exp(i\pi L/2)f\|_{L^\infty} \equiv \|\phi_0(\lambda^{-1}\sqrt{L})f\|_{L^\infty} \lesssim \lambda^{2d}\|f\|_{L^1}$$

En conséquence notre méthode s'effondre à $t = \pi/2$ et la condition $|t| \leq T < \pi/2$ devient nécessaire dans l'énoncé. Cependant, il est clair que le groupe des ondes n'est pas périodique mais plutôt quasipériodique, cela peut être précisé au moins pour des données initiales contenant un nombre fini de fréquences. On ne s'attend donc pas à ce qu'une refocalisation soit possible pour $t \neq 0$. On va maintenant se restreindre au Laplacien twisté L , mais on va aussi étudier les groupes associés à des puissances fractionnaires plus générales :

$$\exp(itL^\nu)f, \quad 0 < \nu < 1,$$

qui représentent la solution du problème de Cauchy

$$iu_t + L^\nu u = 0, \quad u(0, x) = f(x).$$

Pour $\nu = 1/2$, nous retrouvons le groupe des ondes. Le principal avantage dans ce cas, est que le groupe peut être représenté assez explicitement par

$$e^{itL^\nu} L^{-\alpha} f = \sum_{k \geq 0} \frac{e^{it(d+2k)\nu}}{(d+2k)^\alpha} \binom{k+d-1}{d-1} \varphi_k \times f \quad (3.17)$$

avec les notations introduites précédemment. Nous avons aussi montré :

Théorème 3.1.3 *Soit $d \geq 2$. Pour tout $0 < \nu < 1$, $d > \alpha > d - \min\{\nu, 1 - \nu\}$, on a l'estimation*

$$\|e^{itL^\nu} L^{-\alpha} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})} \leq C \left(|t|^{\frac{\alpha-d}{\nu}} + |t| \right) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})} \quad \text{for } t \neq 0. \quad (3.18)$$

Pour mieux analyser le résultat, on peut se focaliser sur le cas $\nu = 1/2$. Si on applique l'estimation (3.18) à une fonction tronquée à la fréquence λ , en utilisant de nouveau les inégalités de Bernstein du Lemma 2.1 dans [97], on obtient

$$\left| \phi_0(\lambda^{-1}\sqrt{L}) e^{it\sqrt{L}} f \right| \lesssim \lambda^{2\alpha} \cdot \left(|t|^{2(\alpha-d)} + |t| \right) \|f\|_{L^1}, \quad d > \alpha > d - 1/2. \quad (3.19)$$

On peut comparer ceci avec l'estimation dispersive du théorème 3.1.2 qui s'écrit ($|t| \leq T < \pi/2$, $C = C(T)$)

$$\left| \phi_0(\lambda^{-1}\sqrt{L}) e^{it\sqrt{L}} f \right| \lesssim \lambda^{2\alpha} \cdot |t|^{2(\alpha-d)} \|f\|_{L^1}, \quad \alpha = \frac{d}{2} + \frac{1}{4}$$

et avec l'injection de Sobolev (pour tout t)

$$\left| \phi_0(\lambda^{-1}\sqrt{L}) e^{it\sqrt{L}} f \right| \lesssim \lambda^{2\alpha} \cdot |t|^{2(\alpha-d)} \|f\|_{L^1}, \quad \alpha = d.$$

Ainsi pour les temps petits (3.19) est une interpolation entre les estimations dispersives optimales et l'injection de Sobolev. Cependant, (3.19) est vérifiée pour tout t avec $t \neq 0$, et donc constitue une amélioration par rapport à l'injection de Sobolev qui peut-être vue comme une mesure de la non-refocalisation des ondes en temps grands.

3.1.3 Applications au problème de Cauchy

Revenons au cas euclidien et à l'étude du problème non-linéaire de Cauchy pour (NLW). De nouveau, les résultats concernant le caractère localement bien posé sont basés sur l'utilisation de la formule de Duhamel et le théorème du point fixe de Banach. En effet, on considère l'application $\Phi : v \rightarrow u$, définie par

$$\Phi(v)(t) = (\cos tD)f(x) + \frac{\sin tD}{D}g(x) + \int_0^t ds \frac{\sin(t-s)D}{D}F(v(s)), \quad (3.20)$$

où $u = \Phi(v)$ est donc la solution de l'équation linéaire

$$\partial_t^2 u - \Delta u = F(v), \quad u(0, x) = f(x), \quad \partial_t u(0, x) = g.$$

Il s'agit de montrer qu'il existe une boule B d'un espace de Banach X_T telle que $\Phi : B \rightarrow B$ soit une contraction, c'est-à-dire

$$\|\Phi(v)\|_{X_T} \leq \|f\|_{H^s} + \|g\|_{H^{s-1}} + \phi(R, T)\|v\|_{X_T},$$

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{X_T} \leq \phi(R, T)\|v - w\|_{X_T},$$

où ϕ est une fonction continue croissante par rapport à chaque argument, $\phi(0, 0) = 0$ et R est le rayon de la boule B . En choisissant bien le rayon de la boule et le temps T , on peut conclure dans deux cas :

- on prend T suffisamment petit, on obtient que (NLW) est localement bien posé pour toute donnée initiale dans $H^s \times H^{s-1}$; remarquons que le temps d'existence dépend seulement de la norme de la donnée initiale et il est uniforme sur les bornés de $H^s \times H^{s-1}$.
- si les données initiales sont en norme petite et ϕ ne dépend pas de T , on gagne $T = +\infty$ et on obtient que (NLW) est globalement bien posé dans $H^s \times H^{s-1}$.

Si les non-linéarités sont peu régulières, on peut raffiner un peu l'argument en montrant que Φ vérifie une propriété de contraction du type

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{Y_T} \leq \phi(R, T)\|v - w\|_{Y_T}$$

où Y_T est un autre espace de Banach tel que $X_T \subset Y_T$ avec inclusion continu. Il faut alors travailler un peu plus pour montrer la continuité du flot pour la topologie de X_T .

Comme mentionné précédemment, en prenant $X_T = \mathcal{C}([0, T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0, T], H^{s-1})$ pour $s > n/2$, en utilisant des arguments classiques d'estimations d'énergie et de Moser, on obtient immédiatement que le problème de Cauchy est localement bien posé dans $H^s \times H^{s-1}$, $s > n/2$. Pour obtenir des résultats de régularité minimale et donc abaisser l'indice de régularité s avec l'espoir de descendre au niveau de la seule quantité conservée (3.1), on utilise de manière cruciale les estimations de Strichartz précédentes dans l'argument du point fixe et cela conduit à prendre des espaces de Banach X_T du type $X_T = \mathcal{C}([0, T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0, T], H^{s-1}) \cap L^p([0, T], H_q^\sigma)$, bien choisi. Cette question de déterminer la régularité $s = s(\gamma, n)$ pour laquelle (NLW) est localement bien posé dans $H^s \times H^{s-1}$ a été étudiée pour des non-linéarités de *type puissance* (2.1) (avec au besoin de conditions de régularité sur F) par plusieurs auteurs ([26], [179], [214], [213], [185], [287]). Linbladd et Sogge dans [214] montrent que (NLW) est localement bien posé dans $H^s \times H^{s-1}$, si $s \geq \max(s_{conf}, s_c)$ lorsque $\gamma > \gamma_0 = \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2+4}$, $n \geq 3$ et $\gamma_0 = 3$, $n = 2$. Ces résultats avaient déjà été montrés indépendamment avec d'autres méthodes par Kapitanski [179] et ils sont analogues à ceux de Cazenave-Weinstein obtenus pour l'équation de Schrödinger. Toutefois, comme mentionné avant, grâce aux contre-exemples dans [214], qui permettent d'étudier aussi le caractère mal posé de (NLW), Linbladd et Sogge montrent l'optimalité de leur résultats pour des non-linéarités *focalisantes* lorsque $\gamma > \gamma_0$; mais pour des non-linéarités *défocalisantes*

on ne connaît pas l'optimalité, car le caractère de (NLW) dans le régime $s_c < s < s_{conf}$ reste un problème ouvert. Lorsque $\gamma < \gamma_0$ et $n \geq 3$, Lindblad et Sogge montrent que (NLW) est localement bien posé dans $H^s \times H^{s-1}$ si $s \geq \frac{n+1}{4} \left(1 - \frac{n+5}{(2n\gamma-n-1)}\right)$, mais ensuite ce résultat a été amélioré par Tao dans [287] en descendant à $s > s_{tao}$ où $s_{tao} = \frac{n}{4} - \frac{3}{4(\gamma-1)}$ (sauf l'endpoint $\tilde{\gamma}_0 = \frac{n+3-\sqrt{n^2-2n+33}}{8}$, qui est l'intersection de la dernière courbe de régularité avec celle qui vient de la régularité conforme s_{conf}). L'optimalité de ce dernier résultat reste aussi une question ouverte. Remarquons que l'endpoint $\gamma_0 = \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2+4}$ avec $s = s_0 = \frac{n-3}{2(n-1)}$ a été étudié séparément, Keel-Tao dans [185] ont montré le caractère localement bien posé en ce point pour $n \geq 4$ en utilisant dans l'argument de point fixe l'estimation de Strichartz sur l'endpoint. En dimension $n = 3$, $\gamma_0 = 2$ et $s = 0$, dans [213] on montre que (NLW) est mal posé. On peut résumer les résultats connus concernant le caractère localement bien (ou mal posé) décrits ci-dessus dans les figures suivantes :

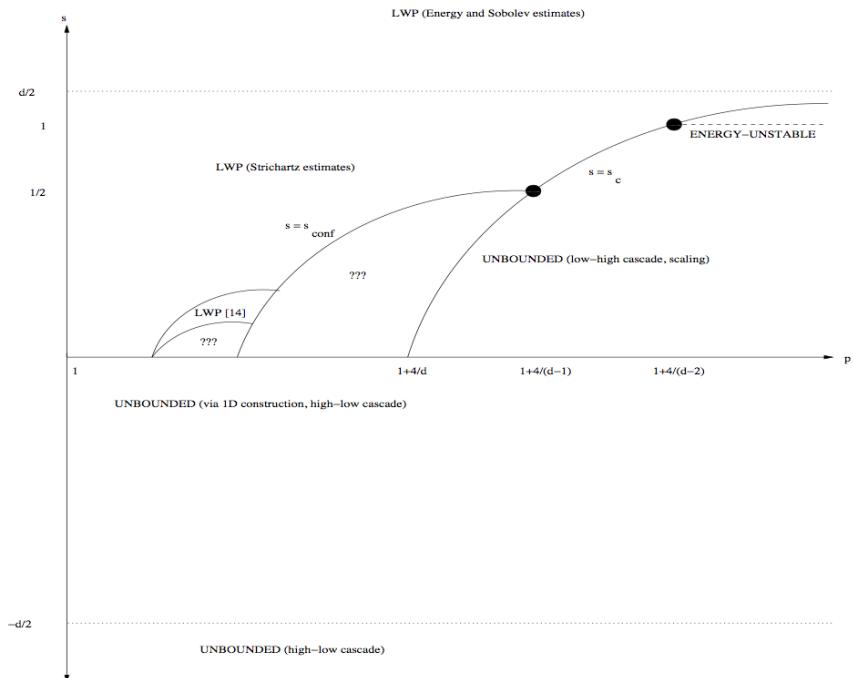


Fig. 3.1: NLW défocalisante sur \mathbb{R}^n en dimension $n \geq 3$

Encore une fois, dans les cas critiques $s = s_c \geq s_{conf}$, (NLW) a un caractère localement bien posé dans $H^s \times H^{s-1}$, mais le temps d'existence de la solution locale dépend de la donnée initiale de façon plus compliquée (ne dépend pas que de sa norme) et la continuité du flot a lieu dans une topologie plus faible. Les points $a = (s, \gamma_c) = (1, 1 + \frac{4}{n-2})$ et $b = (s, \gamma_{conf}) = (\frac{1}{2}, \frac{n+3}{n-1})$ représentent respectivement les bien connus problèmes H^1 -critique (i.e. $H^1 \times L^2$) et conformément invariant $H^{\frac{1}{2}}$ (i.e. $H^{\frac{1}{2}} \times H^{-\frac{1}{2}}$).

Dans le cas des non-linéarités $F(u)$ générales de *type puissance* (2.1), il y a plusieurs résultats concernant l'existence globale et l'unicité à données initiales petites (voir [214], [292], [255]). Après le premier important résultat de John [173] en dimension $n=3$, Strauss a conjecturé dans [278] que (NLW) est globalement bien posé pour données initiales petites (à support compact dans

$H^1 \times L^2$) si les puissances vérifient

$$\gamma > \gamma_{\text{strauss}}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \frac{2}{n-1}} \quad (n \geq 2). \quad (3.21)$$

La partie négative de la conjecture a été montré par Sideris [273], il a prouvé l'explosion en temps fini pour des *données génériques* quand $\gamma < \gamma_{\text{strauss}}(n)$ (et des non-linéarités satisfaisant $F(u) \gtrsim |u|^\gamma$). La partie positive de la conjecture a aussi été montrée en dimension quelconque en plusieurs étapes : [196], [214], [131], [94].

Une preuve alternative aux résultats de Georgiev, Lindblad et Sogge [131], a été donnée par Tataru dans [292], son idée est de se ramener à un problème sur l'espace hyperbolique et d'exploiter les meilleures propriétés dispersives. La partie délicate de la preuve est en fait l'obtention des estimations dispersives sur l'espace hyperbolique, l'application au problème non-linéaire étant très simple à implémenter. Le cas critique de l'exposant de Strauss $\gamma = \gamma_{\text{strauss}}(n)$ est plus délicat et Tataru obtient seulement un caractère presque globalement bien posé, dans le sens où le temps d'existence est exponentiellement long.

En ce qui concerne les données grandes, les problèmes d'existence globale et de scattering, ou d'explosion en temps fini sont considérés plus subtils. Puisque la quantité importante conservée est l'énergie (3.36), pour ce type de questions il est donc naturel de travailler avec la régularité $\dot{H}^1 \times L^2$. Pour des non-linéarités *défocalisantes*, dans le cas sous-critique $\gamma < \gamma_c$ (NLW) est globalement bien posé dans $\dot{H}^1 \times L^2$, le cas critique $\gamma_c = 1 + \frac{4}{n-2}$ a été résolu par Grillakis et Shatah-Struwe ([149] [150], [268], [269]). De plus, de manière analogue à l'équation de Schrödinger, en utilisant des estimations de type Morawetz le scattering a été montré dans le cas critique (Shatah-Struwe, Grillakis) et dans certaines cas sous-critique avec des hypothèses supplémentaires (en dimension 3 ([109], [189], [271]) et $n \geq 4$ ([138], [164])). Pour des non-linéarités *focalisantes*, puisque l'énergie E peut devenir négative la situation est plus délicate. Le cas focalisant d'énergie critique a été le sujet de plusieurs articles récents comme [187] (dimension $3 \leq n \leq 5$) et [108], [110] (dimension 3). Les cas énergie sous-critique ($\gamma < \gamma_c$) ou énergie super-critique ($\gamma > \gamma_c$) ont aussi été considéré, particulièrement en dimension 3, habituellement sous l'hypothèse supplémentaire qu'une norme de Sobolev critique de la solution reste bornée, dans les articles [109], [189], [194] (super-critique en dimension 3), [42] (super-critique, dimensions plus grandes), [195] (super-critique en toute dimension) et [164], [271] (sous-critique).

Visiblement l'étude du caractère bien posé ou mal posé de (NLW), selon le type de non-linéarités et la régularité minimale des données initiales, est complexe et il y a encore beaucoup de questions intéressantes à résoudre et qui demandent l'utilisation d'autres outils d'analyse même dans le contexte euclidien. Par exemple, en revenant à l'étude au caractère localement bien ou mal posé de (NLW) avec des non-linéarités *défocalisantes* dans le régime des données initiales avec $s_c < s < \max(s_{tao}, s_{conf})$, ils restent des problèmes ouverts. Et aussi, comme déjà évoqué, pour des questions concernant le caractère globalement bien posé à données petites ou grandes dans $H^s \times H^{s-1}$ lorsque $s_c < s < 1$ (sous l'espace de la norme de l'énergie). Il y a quand même d'importants résultats pour certaines non-linéarités *défocalisantes* de (NLW) à données grandes dans ce régime. En effet, en utilisant la méthode I introduite par Bourgain (pour l'équation de Schrödinger en dimension 2, [39]), Kenig, Ponce et Vega dans [191] ont établi le caractère globalement bien posé de (NLW) sous l'espace de la norme de l'énergie pour des données grandes (en particulier, dans $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$, avec $\frac{3}{4} < s < 1$ en dimension 3). Ensuite, Gallagher et Planchon dans [125] ont démontré à nouveau ce résultat avec une preuve plus simple inspiré par un travail dans le contexte de l'équation de Navier-Stokes (voir aussi [126]). Cela a été généralisé par [228] en toute dimension $n \geq 4$.

3.2 Equations des ondes sur variétés non-compactes

Dans le cadre d'une variété riemannienne M l'équation des ondes associée à l'opérateur de Laplace Beltrami est

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_g u(t, x) = F(u), \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x), \end{cases} \quad (3.22)$$

Une propriété très importante de l'équation des ondes qui la distingue de Schrödinger est la propagation à vitesse finie. Une conséquence de cette propriété en ce qui concerne les estimations de Strichartz et le problème de Cauchy local est que l'indice critique de régularité s_c de \mathbb{R}^n est aussi valable sur une variété compacte ([47], [178]). Il y a donc très peu d'effet de la géométrie dans ce cadre sur ces questions. D'autre part, comme pour Schrödinger, des effets géométriques apparaissent sur le comportement qualitatif des solutions globales, la théorie KAM pour ces EDP est par exemple très étudiée ([83], [81], [205], et d'autres). C'est donc dans le cadre non-compact que l'influence de la géométrie (et donc particulièrement de la géométrie à l'infini et de la courbure négative) sur les propriétés dispersives des équations d'ondes en lien avec l'étude des équations semi-linéaires et leur comportement en temps long a été très étudié dans la littérature. Ces études, en plus de leur intérêt par elles mêmes ont permis de manière remarquable d'obtenir des importantes applications sur \mathbb{R}^n (voir par exemple [292]). Remarquons qu'en courbure négative (avec des hypothèses sur la géométrie à l'infini), l'inégalité de Poincaré est vérifiée et donc le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ est contenu dans $[\rho^2, +\infty)$ avec $\rho > 0$ (voir par exemple [266] et chapitre 4 pour des hypothèses précises sur la géométrie de M), l'équation ci-dessus (3.22) est donc plutôt du type d'une équation de Klein-Gordon. Une variante de cette équation, appelée équation des ondes *shiftée*,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - (\Delta_g + \rho^2) u(t, x) = F(u), \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x) \end{cases} \quad (3.23)$$

est donc très étudiée aussi. C'est cette équation qui est la généralisation naturelle de l'équation des ondes sur \mathbb{R}^n et qui a été étudiée par Tataru [292] dans le cadre de l'espace hyperbolique.

Dans ce chapitre, nous allons présenter nos résultats sur ce type d'équation. Dans un premier travail [12], nous avons étudié l'équation *shiftée* sur l'espace hyperbolique, l'étude a ensuite été généralisée aux espaces de Damek-Ricci $M = S$ dans [11]. Des résultats sur l'équation de type Klein-Gordon (3.22) ont aussi été obtenus dans le contexte radial dans mon travail [253] et ensuite sans hypothèses de radialité dans [10]. Nous allons discuter plus en détails nos résultats sur l'espace hyperbolique qui sont techniquement un peu plus simple à présenter.

3.2.1 Equation des ondes "shiftée" sur les espaces hyperboliques

Considérons donc le problème de Cauchy linéaire associé à l'équation des ondes "shiftée" sur $M = \mathbb{H}^n$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - (\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2) u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x). \end{cases} \quad (3.24)$$

A notre connaissance, l'équation des ondes semi-linéaire a d'abord été étudiée par J. Fontaine [121, 120] en dimension $n=3$ et $n=2$. Le travail sans doute le plus célèbre à propos de (3.24) est dû à D. Tataru. Dans [292], il a obtenu des estimations dispersives pour les opérateurs $\frac{\sin(t\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2})}{\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2}}$

et $\cos(t\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2})$ agissant sur des espaces de Sobolev inhomogènes et les a ensuite transférées de \mathbb{H}^n à \mathbb{R}^n pour obtenir des résultats de problèmes de Cauchy bien posés pour l'équation des ondes semi-linéaires euclidienne (voir aussi [130]). Des résultats complémentaires ont été obtenus par A. Ionescu [170] qui a étudié les estimations de Sobolev $L^q \rightarrow L^q$ pour les opérateurs ci-dessus sur tous les espaces hyperboliques.

Bien que Tataru ait démontré des estimations avec décroissance exponentielle en temps, elles ne sont pas suffisantes pour obtenir des estimations de Strichartz sur les espaces hyperboliques. Dans [12], on a obtenu une plage plus grande d'estimations de Strichartz comparé au cas Euclidien et ainsi déduit de meilleurs résultats pour le problème de Cauchy. Pour cela il nous faut des estimations de type $L^q - L^{q'}$ pour l'opérateur e^{itD} . Nous avons obtenu des estimations avec décroissance polynomiale en temps qui reflètent le fait que le multiplicateur de Fourier associé à cet opérateur n'est pas analytique dans une bande du plan complexe contrairement à $\cos tD$ et $\frac{\sin tD}{D}$. Pour tenir compte des pertes de dérivées et des comportements différents en hautes et basses fréquences, nous allons en fait étudier les opérateurs $W_t^{(\sigma,\tau)} = D^{-\tau} \tilde{D}^{\tau-\sigma} e^{itD}$, où $D = (-\Delta_{\mathbb{H}^n} - \rho^2)^{1/2}$, $\tilde{D} = (-\Delta_{\mathbb{H}^n} + \tilde{\rho}^2 - \rho^2)^{1/2}$ avec $\tilde{\rho} > \rho$, et σ, τ des exposants appropriés. On obtiendra donc des estimations de type dispersif dans les espaces de Sobolev mixtes introduits précédemment. Comme dans le cas de Schrödinger, une étape cruciale est l'étude du noyau de ces opérateurs. On en déduira ensuite les estimations dispersives $L^{q'} \rightarrow L^q$ pour ces opérateurs $W_t^{(\sigma,\tau)}$, quand $2 < q < \infty$ en utilisant la théorie de l'interpolation complexe et le phénomène de Kunze-Stein [72, 71, 169]. Les estimations de Strichartz en découleront finalement par un argument de TT^* . Ensuite, on a généralisé ce résultat [12] aux espaces de Damek-Ricci et on renvoie directement au travail [11].

3.2.2 Estimations du noyau

On commence donc par étudier le noyau de convolution radial $w_t^{(\sigma,\tau)}$ de l'opérateur $W_t^{(\sigma,\tau)} = D^{-\tau} \tilde{D}^{\tau-\sigma} e^{itD}$. Par la formule d'inversion de la transformée de Fourier sphérique

$$w_t^{(\sigma,\tau)}(r) = \text{const.} \int_0^{+\infty} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\lambda}.$$

Contrairement au cas euclidien, ce noyau a des comportements différents selon que t est petit ou grand et donc nous ne pouvons pas utiliser de changement d'échelle. On va utiliser la décomposition

$$\begin{aligned} w_t^{(\sigma,\tau)}(r) &= w_{t,0}^{(\sigma,\tau)}(r) + w_{t,\infty}^{(\sigma,\tau)}(r) \\ &= \text{const.} \int_0^2 d\lambda \chi_0(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\lambda} \\ &\quad + \text{const.} \int_1^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\lambda} \end{aligned}$$

où χ_0 et χ_∞ sont des fonctions de troncature régulières sur $[0, +\infty)$ telles que $1 = \chi_0 + \chi_\infty$, $\chi_0 = 1$ sur $[0, 1]$ et $\chi_\infty = 1$ sur $[2, +\infty)$. On va d'abord estimer $w_{t,0}^{(\sigma,\tau)}$ et ensuite une variante de $w_{t,\infty}^{(\sigma,\tau)}$. Le noyau de $w_{t,\infty}^{(\sigma,\tau)}$ a en fait une singularité logarithmique sur la sphère $r = t$ quand $\sigma = \frac{n+1}{2}$. On va donc contourner ce problème en considérant une famille analytique d'opérateurs

$$\widetilde{W}_{t,\infty}^{(\sigma,\tau)} = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \chi_\infty(D) D^{-\tau} \tilde{D}^{\tau-\sigma} e^{itD}$$

dans la bande verticale $0 \leq \text{Re } \sigma \leq \frac{n+1}{2}$ et les noyaux correspondants

$$\widetilde{w}_{t,\infty}^{(\sigma,\tau)}(r) = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \int_1^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} e^{it\lambda} \varphi_\lambda(r). \quad (3.25)$$

Notons que la fonction Gamma qui apparaît naturellement dans la théorie des distributions de Riesz permettra de traiter le point au bord $\sigma = \frac{n+1}{2}$ alors que la fonction exponentielle permet d'avoir une borne à l'infini dans la bande verticale. Remarquons aussi qu'une fois multiplié par $\chi_\infty(D)$, l'opérateur $D^{-\tau} \tilde{D}^{\tau-\sigma}$ se comporte comme $\tilde{D}^{-\sigma}$.

Estimation de $w_t^0 = w_{t,0}^{(\sigma,\tau)}$.

Théorème 3.2.1 Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\tau < 2$. On a l'estimation ponctuelle suivante pour le noyau $w_t^0 = w_{t,0}^{(\sigma,\tau)}$:

(i) Supposons que $|t| \leq 2$. Alors, pour tout $r \geq 0$,

$$|w_t^0(r)| \lesssim \varphi_0(r).$$

(ii) Supposons que $|t| \geq 2$.

(a) si $0 \leq r \leq \frac{|t|}{2}$, alors

$$|w_t^0(r)| \lesssim |t|^{\tau-3} \varphi_0(r).$$

(b) si $r \geq \frac{|t|}{2}$, alors

$$|w_t^0(r)| \lesssim (1 + |r - |t||)^{\tau-2} e^{-\rho r}.$$

Preuve. Rappelons que

$$w_t^0(r) = \text{const.} \int_0^2 d\lambda \chi_0(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\lambda}. \quad (3.26)$$

Par symétrie, on peut supposer que $t > 0$.

(i) Comme conséquence des estimations (1.12) et (1.18) on a que

$$|w_t^0(r)| \lesssim \int_0^2 d\lambda \lambda^{2-\tau} \varphi_0(r) \lesssim \varphi_0(r).$$

(ii) On montre d'abord (a) en substituant dans (3.26) la première représentation intégrale de φ_λ dans (1.11) et en se ramenant à de l'analyse de Fourier sur \mathbb{R} . Plus précisément,

$$w_t^0(r) = \int_K dk e^{-\rho H(a-rk)} \int_0^2 d\lambda \chi_0(\lambda) a(\lambda) e^{i\{t-H(a-rk)\}\lambda},$$

où $a(\lambda) = |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}}$, à une constante positive près. Selon les estimations (1.18) et le Lemma A.1 dans Appendix A dans [12], l'intégrale interne est majorée par

$$\{t - H(a-rk)\}^{\tau-3} \leq (t-r)^{\tau-3} \asymp t^{\tau-3}.$$

Puisque

$$\int_K dk e^{-\rho H(a-rk)} = \varphi_0(r),$$

on conclut que

$$|w_t^0(r)| \lesssim t^{\tau-3} \varphi_0(r).$$

On montre ensuite (b) en substituant dans (3.26) le développement de Harish-Chandra (1.13) de φ_λ et en se ramenant de nouveau à de l'analyse de Fourier sur \mathbb{R} . Précisément, on a

$$w_t^0(r) = (2 \sinh r)^{-\rho} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kr} \{ I_k^{+,0}(t, r) + I_k^{-,0}(t, r) \}, \quad (3.27)$$

où

$$I_k^{\pm,0}(t,r) = \int_0^2 d\lambda \chi_0(\lambda) a_k^\pm(\lambda) e^{i(t\pm r)\lambda}$$

et

$$a_k^\pm(\lambda) = \mathbf{c}(\mp\lambda)^{-1} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} \Gamma_k(\pm\lambda).$$

En utilisant le Lemma A.1 dans [12] et les estimations (1.16) pour Γ_k et ses dérivées, on obtient

$$|I_k^{+,0}(t,r)| \lesssim (1+k)^\nu (t+r)^{\tau-2} \leq (1+k)^\nu r^{\tau-2}$$

et

$$|I_k^{-,0}(t,r)| \lesssim (1+k)^\nu (1+|r-t|)^{\tau-2}.$$

On conclut la preuve en sommant ces estimations dans (3.27).

Estimation de $\tilde{w}_t^\infty = \tilde{w}_{t,\infty}^{(\sigma,\tau)}$.

Théorème 3.2.2 *On a l'estimation ponctuelle suivante pour le noyau $\tilde{w}_t^\infty = \tilde{w}_{t,\infty}^{(\sigma,\tau)}$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ fixé et uniformément dans $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$:*

(i) *Supposons que $0 < |t| \leq 2$.*

$$(a) \text{ Si } 0 \leq r \leq 3, \text{ alors } |\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim \begin{cases} |t|^{-\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \geq 3, \\ |t|^{-\frac{1}{2}}(1 - \log |t|) & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

(b) *Si $r \geq 3$, alors $\tilde{w}_t^\infty(r) = O(r^{-\infty} e^{-\rho r})$.*

(ii) *Supposons que $|t| \geq 2$. Alors*

$$|\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim (1+|r-|t||)^{-\infty} e^{-\rho r} \quad \forall r \geq 0.$$

Proof of Theorem 3.2.2.ii. Rappelons qu'à une constante positive près

$$\tilde{w}_t^\infty(r) = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \int_1^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\lambda}.$$

Par symétrie, on peut de nouveau supposer que $t > 0$. Si $0 \leq r \leq \frac{t}{2}$, on reprend la preuve du théorème 3.2.1.ii.a, en utilisant le Lemma A.2 à la place du Lemma A.1 dans [12] pour obtenir

$$|\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim (t-r)^{-\infty} \varphi_0(r) \lesssim t^{-\infty} e^{-\rho r}. \quad (3.28)$$

Si $r \geq \frac{t}{2}$, on reprend la preuve du théorème 3.2.1.ii.b en écrivant le développement suivant

$$\tilde{w}_t^\infty(r) = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} (\sinh r)^{-\rho} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kr} \{ I_k^{+,0}(t,r) + I_k^{-,0}(t,r) \}, \quad (3.29)$$

où

$$I_k^{\pm,0}(t,r) = \int_0^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) a_k^\pm(\lambda) e^{i(t\pm r)\lambda}$$

et

$$a_k^\pm(\lambda) = \mathbf{c}(\mp\lambda)^{-1} \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} \Gamma_k(\pm\lambda).$$

Grâce à l'expression (1.14) des \mathbf{c} -fonctions et les estimations (1.16) des coefficients Γ_k , il s'ensuit que $\chi_\infty a_k^\pm$ est un symbole d'ordre

$$d = \begin{cases} -1 & \text{si } k=0, \\ -2 & \text{si } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

En appliquant le Lemma A.2 dans [12], on obtient les estimations suivantes des $I_k^{\pm,\infty}(t,r)$, sauf $I_0^{-,\infty}(t,r) : \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists C_N \geq 0$,

$$|I_k^{+,\infty}(t,r)| \leq C_N |\sigma|^N (1+k)^\nu (t+r)^{-N} \leq C_N |\sigma|^N (1+k)^\nu r^{-N}, \quad (3.30)$$

$$|I_k^{-,\infty}(t,r)| \leq C_N |\sigma|^N (1+k)^\nu (1+|r-t|)^{-N}. \quad (3.31)$$

En ce qui concerne $I_0^{-,\infty}(t,r)$, du Lemma A.2 dans [12] découlent les estimations

$$|I_0^{-,\infty}(t,r)| \leq \begin{cases} C_N |\sigma|^N |r-t|^{-N} & \text{if } |r-t| \geq 1, \\ C \left(1 + \log \frac{1}{|r-t|}\right) & \text{if } |r-t| \leq 1. \end{cases} \quad (3.32)$$

Le deuxième cas peut être raffiné en utilisant le Lemma A.3 dans [12]. Pour cela, calculons le comportement asymptotique du symbole $a_0^-(\lambda)$, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(\lambda)^{-1} &= \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(2\rho)} \frac{\Gamma(i\lambda+\rho)}{\Gamma(i\lambda)} = \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(2\rho)} e^{-\rho} \left(\frac{i\lambda+\rho}{i\lambda}\right)^{i\lambda-\frac{1}{2}} (i\lambda+\rho)^\rho \{1 + O(\lambda^{-1})\} \\ &= e^{i\frac{\rho\pi}{2}} \lambda^\rho \{1 + O(\lambda^{-1})\}, \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Stirling

$$\Gamma(\xi) = \sqrt{2\pi} \xi^{\xi-\frac{1}{2}} e^{-\xi} \{1 + O(|\xi|^{-1})\}.$$

D'autre part, on a

$$\lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} = \lambda^{-\sigma} \{1 + O(|\sigma|\lambda^{-2})\}.$$

On obtient donc

$$a_0^-(\lambda) = c_0 \lambda^{-1-i \operatorname{Im} \sigma} + b_0(\lambda) \quad \text{avec} \quad |b_0(\lambda)| \leq C |\sigma| \lambda^{-2}.$$

Comme annoncé, comme conséquence du Lemma A.3 on obtient que

$$|I_0^{-,\infty}(t,r)| \leq C \frac{|\sigma|^2}{|\operatorname{Im} \sigma|} \quad \text{si } |r-t| \leq 1. \quad (3.33)$$

En combinant (3.28), (3.29), (3.30), (3.31), (3.32) et (3.33), on conclut que

$$|\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim (1+|r-t|)^{-\infty} e^{-\rho r} \quad \forall r \geq \frac{t}{2}.$$

□

Remarque 3.2.1 Le noyau $w_t^\infty(r)$ peut être estimé de la même manière, sauf que

$$|w_t^\infty(r)| \lesssim e^{-\rho t} \log \frac{1}{|r-t|}$$

quand r est proche de $|t|$.

Passons maintenant aux estimations en temps petit dans le théorème 3.2.2.

L'estimation (i.a) est de nature locale et donc similaire à celle du cas euclidien. On a donné la preuve dans l'appendice de l'article. Il reste à prouver l'estimation (i.b).

Démonstration de théorème 3.2.2.i.b. Ici, $0 < |t| \leq 2$ et $r \geq 3$. Par symétrie, on peut supposer de nouveau que $t > 0$. On va maintenant utiliser la transformée d'Abel inverse donnée par les formules (1.19) et (1.20). À des constantes positives près, on peut récrire le noyau (3.25) en utilisant la transformée de Fourier sphérique inverse de la manière suivante :

$$\tilde{w}_t^\infty(r) = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}-\sigma)} \mathcal{A}^{-1} g_t(r),$$

où

$$g_t(r) = 2 \int_1^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} e^{it\lambda} \cos \lambda r.$$

On va séparer $2 \cos \lambda r = e^{i\lambda r} + e^{-i\lambda r}$ et décomposer $g_t(r) = g_t^+(r) + g_t^-(r)$ de telle sorte que

$$g_t^\pm(r) = \int_1^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} e^{i(t\pm r)\lambda}.$$

Cas 1 : Supposons que $n=2m+1$ est impair. Tout d'abord, on peut développer

$$\left(\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^m = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell^\infty(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\ell.$$

Comme les coefficients $\alpha_\ell^\infty(r)$ sont combinaisons linéaires des produits

$$\left(\frac{1}{\sinh r} \right) \times \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{\ell_2} \left(\frac{1}{\sinh r} \right) \times \cdots \times \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{\ell_m} \left(\frac{1}{\sinh r} \right),$$

avec $\ell_2 + \dots + \ell_m = m - \ell$, et $\frac{1}{\sinh r} = 2 \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(2j+1)r}$ est $O(e^{-r})$, ainsi que ses dérivées, on déduit que $\alpha_\ell^\infty(r)$ est $O(e^{-mr})$ quand $r \rightarrow +\infty$. Considérons ensuite

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\ell g_t^\pm(r) = \int_1^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) \lambda^{-\tau} (\lambda^2 + \tilde{\rho}^2)^{\frac{\tau-\sigma}{2}} (\pm i\lambda)^\ell e^{i(t\pm r)\lambda}.$$

Selon le Lemma A.2 dans [12], pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_N \geq 0$ tel que

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\ell g_t^\pm(r) \right| \leq C_N |\sigma|^N (r \pm t)^{-N}.$$

En conclusion,

$$|\tilde{w}_t^\infty(r)| = C \left(\frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^m (g_t^+ + g_t^-)(r) \leq C_N r^{-N} e^{-\frac{n-1}{2}r} \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Cas 2 : Supposons que $n=2m$ est pair. Selon le Cas 1, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_N \geq 0$ tel que

$$\left| \left(\frac{1}{\sinh s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^m g_t(s) \right| \leq C_N |\sigma|^N s^{-N} e^{-ms} \quad \forall s \geq 3.$$

En estimant,

$$\begin{aligned} \cosh s - \cosh r &= 2 \sinh \frac{s+r}{2} \sinh \frac{s-r}{2} \gtrsim e^r \sinh \frac{s-r}{2}, \\ \sinh s &\lesssim e^s, \quad e^{-(m-1)s} \leq e^{-(m-1)r}, \quad s^{-N} \leq r^{-N}, \end{aligned}$$

et en effectuant le changement de variables $s=r+u$, on déduit que

$$\begin{aligned} |\tilde{w}_t^\infty(r)| &\lesssim \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}-\sigma)} \int_r^{+\infty} ds \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} \left| \left(\frac{1}{\sinh s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^m g_t(s) \right| \\ &\leq C_N \int_r^{+\infty} ds \frac{\sinh s}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} s^{-N} e^{-ms} \\ &\leq C_N r^{-N} e^{-(m-\frac{1}{2})r} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\sinh \frac{u}{2}}} \leq C_N r^{-N} e^{-\frac{n-1}{2}r}. \end{aligned}$$

□

3.2.3 Estimations dispersives

Dans ce paragraphe, on obtient les estimations $L^{q'} \rightarrow L^q$ pour l'opérateur $D^{-\tau} \tilde{D}^{\tau-\sigma} e^{itD}$ qui joueront un rôle crucial dans l'obtention des estimations de Strichartz. On peut décomposer le noyau $w_t = w_t^0 + w_t^\infty$ comme précédemment. On va traiter la contribution de w_t^0 , en utilisant l'estimation ponctuelle obtenue précédemment et le critère suivant basé sur le phénomène de Kunze-Stein.

Lemma 3.2.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction radiale mesurable κ sur \mathbb{H}^n , pour tout $2 \leq q, \tilde{q} < \infty$ et $f \in L^{q'}(\mathbb{H}^n)$, on a*

$$\|f * \kappa\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^{\tilde{q}'}} \left\{ \int_0^{+\infty} dr (\sinh r)^{n-1} \varphi_0(r)^\mu |\kappa(r)|^Q \right\}^{\frac{1}{Q}}.$$

où $\mu = \frac{2 \min\{q, \tilde{q}\}}{q + \tilde{q}}$ et $Q = \frac{q\tilde{q}}{q + \tilde{q}}$ (1).

Preuve. Cette estimation s'obtient par interpolation entre la version suivante [163] du phénomène de Kunze-Stein

$$\|f * \kappa\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2} \int_0^{+\infty} dr (\sinh r)^{n-1} \varphi_0(r) |\kappa(r)|$$

et les inégalités élémentaires

$$\|f * \kappa\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|\kappa\|_{L^q}, \quad \|f * \kappa\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{\tilde{q}'}} \|\kappa\|_{L^{\tilde{q}}}.$$

Pour la deuxième partie w_t^∞ , on reprend l'approche euclidienne qui consiste à interpoler analytiquement entre les estimations $L^2 \rightarrow L^2$ et $L^1 \rightarrow L^\infty$ pour la famille d'opérateurs

$$\widetilde{W}_{t,\infty}^{(\sigma,\tau)} = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \chi_\infty(D) D^{-\tau} \tilde{D}^{\tau-\sigma} e^{itD} \quad (3.34)$$

dans la bande verticale $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{n+1}{2}$.

Estimations dispersives en temps petit

Théorème 3.2.3 *Supposons que $0 < |t| \leq 2$, $2 < q < \infty$, $0 \leq \tau < \frac{3}{2}$ et $\sigma \geq (n+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Alors,*

$$\|D^{-\tau} \tilde{D}^{\tau-\sigma} e^{itD}\|_{L^{q'} \rightarrow L^q} \lesssim \begin{cases} |t|^{-(n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} & \text{si } n \geq 3, \\ |t|^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} (1 - \log |t|)^{1 - \frac{2}{q}} & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Preuve. On sépare la preuve en deux parties correspondant à la décomposition du noyau $w_t = w_t^0 + w_t^\infty$. En appliquant le Lemma 3.2.1 et en utilisant les estimations ponctuelles dans le théorème 3.2.1.i, on obtient

$$\begin{aligned} \|f * w_t^0\|_{L^q} &\lesssim \left\{ \int_0^{+\infty} dr (\sinh r)^{n-1} \varphi_0(r) |w_t^0(r)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}} \|f\|_{L^{q'}} \\ &\lesssim \left\{ \int_0^{+\infty} dr (1+r)^{1+\frac{q}{2}} e^{-\rho r(\frac{q}{2}-1)} \right\}^{\frac{2}{q}} \|f\|_{L^{q'}} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{q'}} \quad \forall f \in L^{q'}. \end{aligned}$$

1. Remarquons que $\frac{1}{Q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}}$ et $\mu + Q > 2$.

Pour la seconde partie, on considère la famille analytique (3.34). Si $\operatorname{Re} \sigma = 0$, alors

$$\|f * \tilde{w}_t^\infty\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2.$$

Si $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$, on déduit des estimations ponctuelles dans le théorème 3.2.2.i que

$$\|f * \tilde{w}_t^\infty\|_{L^\infty} \lesssim |t|^{-\frac{n-1}{2}} \|f\|_{L^1} \quad \forall f \in L^1.$$

Par interpolation on conclut pour $\sigma = (n+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ que

$$\|f * w_t^\infty\|_{L^q} \lesssim |t|^{-(n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \|f\|_{L^{q'}} \quad \forall f \in L^{q'}.$$

Estimations dispersives en temps grands

Théorème 3.2.4 *Supposons que $|t| \geq 2$, $2 < q < \infty$, $0 \leq \tau < \frac{3}{2}$ et que $\sigma \geq (n+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$. Alors*

$$\|D^{-\tau} \tilde{D}^{\tau-\sigma} e^{itD}\|_{L^{q'} \rightarrow L^q} \lesssim |t|^{\tau-3}.$$

Preuve. On sépare la démonstration en trois parties correspondant à la décomposition

$$w_t = \mathbb{1}_{B(0, \frac{|t|}{2})} w_t^0 + \mathbb{1}_{\mathbb{H}^n \setminus B(0, \frac{|t|}{2})} w_t^\infty + w_t^\infty.$$

Estimation 1 : En appliquant le Lemma 3.2.1 et en utilisant les estimations ponctuelles dans le théorème 3.2.1.ii.a, on obtient

$$\begin{aligned} \|f * \{\mathbb{1}_{B(0, \frac{|t|}{2})} w_t^0\}\|_{L^q} &\lesssim \left\{ \int_0^{\frac{|t|}{2}} dr (\sinh r)^{n-1} \varphi_0(r) |w_t^0(r)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}} \|f\|_{L^{q'}} \\ &\lesssim \underbrace{\left\{ \int_0^{+\infty} dr (1+r)^{1+\frac{q}{2}} e^{-\rho r(\frac{q}{2}-1)} \right\}^{\frac{2}{q}}}_{<+\infty} |t|^{\tau-3} \|f\|_{L^{q'}} \quad \forall f \in L^{q'}. \end{aligned}$$

Estimation 2 : En appliquant le Lemma 3.2.1 et en utilisant les estimations ponctuelles dans le théorème ii.b, on obtient

$$\begin{aligned} \|f * \{\mathbb{1}_{\mathbb{H}^n \setminus B(0, \frac{|t|}{2})} w_t^0\}\|_{L^q} &\lesssim \left\{ \int_{\frac{|t|}{2}}^{+\infty} dr (\sinh r)^{n-1} \varphi_0(r)^{\frac{2}{q}} |w_t^0(r)|^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{2}{q}} \|f\|_{L^{q'}} \\ &\lesssim \underbrace{\left\{ \int_{\frac{|t|}{2}}^{+\infty} dr r e^{-(\frac{q}{2}-1)\rho r} \right\}^{\frac{2}{q}}}_{\lesssim |t|^{-\infty}} \|f\|_{L^{q'}} \quad \forall f \in L^{q'}. \end{aligned}$$

Estimation 3 : Pour l'estimation de la norme $L^{q'} \rightarrow L^q$ de $f \mapsto f * w_t^\infty$, on peut utiliser le Lemma 3.2.1 et les estimations ponctuelles de w_t^∞ (voir la Remarque 3.2.1). Alors que

$$\int_0^{|t|-1} dr (\sinh r)^{n-1} \varphi_0(r) |w_t^\infty(r)|^{\frac{q}{2}} \quad \text{et} \quad \int_{|t|+1}^{+\infty} dr (\sinh r)^{n-1} \varphi_0(r) |w_t^\infty(r)|^{\frac{q}{2}}$$

sont $O(|t|^{-\infty})$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{|t|-1}^{|t|+1} dr (\sinh r)^{n-1} \varphi_0(r) |w_t^\infty(r)|^{\frac{q}{2}}$$

est finie dès que $\sigma > \frac{n+1}{2} - \frac{2}{q}$, ce qui est trop grand comparé à l'exposant critique $(n+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. A la place, on utilise l'interpolation pour la famille analytique (3.34). Si $\operatorname{Re} \sigma = 0$, alors

$$\|f * \tilde{w}_t^\infty\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2.$$

Si $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$, on déduit du théorème 3.2.2.ii que

$$\|f * \tilde{w}_t^\infty\|_{L^\infty} \lesssim |t|^{-\infty} \|f\|_{L^1} \quad \forall f \in L^1.$$

Par interpolation, on conclut pour $\sigma = (n+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ que

$$\|f * w_t^\infty\|_{L^q} \lesssim |t|^{-\infty} \|f\|_{L^{q'}} \quad \forall f \in L^{q'}.$$

En prenant $\tau = 1$ dans les théorèmes 3.2.3 et 3.2.4, on obtient en particulier les estimations dispersives suivantes

Corollaire 3.2.1 Soit $2 < q < \infty$ et $\sigma \geq (n+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Alors,

$$\|\tilde{D}^{-\sigma+1} \frac{e^{itD}}{D}\|_{L^{q'} \rightarrow L^q} \lesssim \begin{cases} |t|^{-(n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} & \text{si } 0 < |t| \leq 2, \\ |t|^{-2} & \text{si } |t| \geq 2, \end{cases}$$

avec $|t|^{-(n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}$ remplacé par $|t|^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}(1 - \log |t|)^{1-\frac{2}{q}}$ en dimension $n=2$.

3.2.4 Estimations de Strichartz

On supposera que $n \geq 3$ dans toute cette section, le cas de la dimension deux sera discuté dans la remarque finale. Considérons l'équation des ondes linéaires non-homogènes sur \mathbb{H}^n :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - (\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2) u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x), \end{cases} \quad (3.35)$$

dont la solution est donnée par la formule de Duhamel

$$u(t, x) = (\cos t D_x) f(x) + \frac{\sin t D_x}{D_x} g(x) + \int_0^t ds \frac{\sin(t-s) D_x}{D_x} F(s, x).$$

Rappelons que l'on obtient par la conservation de l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{H}^n} dx \{ |\partial_t u(t, x)|^2 + |D_x u(t, x)|^2 \}, \quad (3.36)$$

pour les solutions du problème de Cauchy homogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - (\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2) u = 0, \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x). \end{cases} \quad (3.37)$$

que pour tout temps $t \in \mathbb{R}$

$$\|\partial_t u(t, x)\|_{L_x^2}^2 + \|D_x u(t, x)\|_{L_x^2}^2 = \|g\|_{L^2}^2 + \|Df\|_{L^2}^2.$$

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\tau < \frac{3}{2}$. En appliquant l'opérateur $\tilde{D}^\sigma D^\tau$ à (3.37), on déduit que

$$\|\partial_t \tilde{D}_x^\sigma D_x^\tau u(t, x)\|_{L_x^2}^2 + \|\tilde{D}_x^\sigma D_x^{\tau+1} u(t, x)\|_{L_x^2}^2 = \|\tilde{D}^\sigma D^\tau g\|_{L^2}^2 + \|\tilde{D}^\sigma D^{\tau+1} f\|_{L^2}^2,$$

ce qui peut être récrit en termes d'espaces de Sobolev sous la forme

$$\|\partial_t u(t, \cdot)\|_{H^{\sigma, \tau}}^2 + \|u(t, \cdot)\|_{H^{\sigma, \tau+1}}^2 = \|g\|_{H^{\sigma, \tau}}^2 + \|f\|_{H^{\sigma, \tau+1}}^2. \quad (3.38)$$

Définition 3.2.1 Un couple (p, q) est appelé admissible si $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ appartient au triangle

$$T_n = \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}) \mid \frac{2}{p} + \frac{n-1}{q} \geq \frac{n-1}{2} \right\}. \quad (3.39)$$

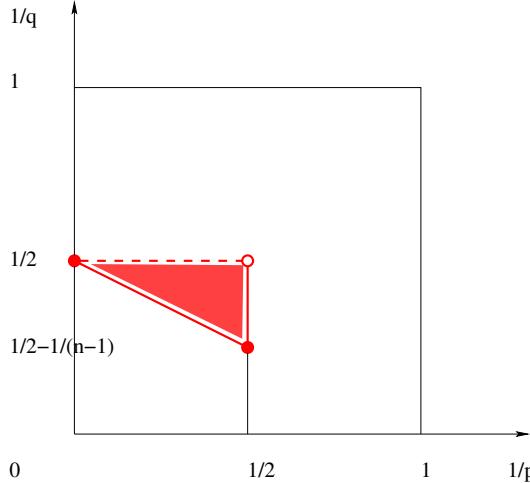


Fig. 3.2: Admissibilité en dimension $n \geq 4$

Remarque 3.2.2 Observons que l'endpoint $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1})$ est inclus dans le triangle T_n en dimension $n \geq 3$ mais pas en dimension $n = 3$.

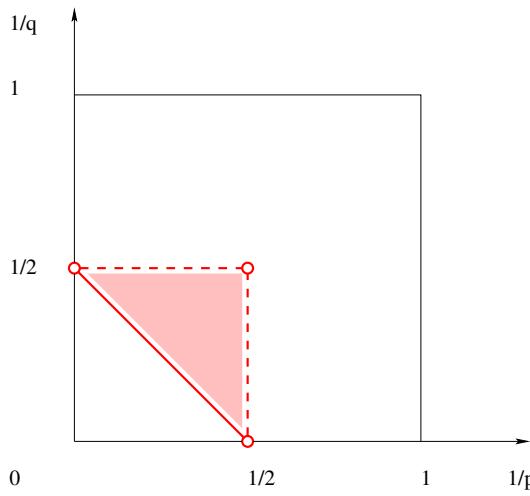


Fig. 3.3: Admissibilité en dimension $n = 3$

Théorème 3.2.5 Soit (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) deux couples admissibles. Alors, on a l'estimation de Strichartz suivante pour les solutions du problème de Cauchy (1.22) :

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}; L^q)} \lesssim \|f\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}} + \|g\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; H_{\tilde{q}}^{\sigma+\tilde{\sigma}-1})}, \quad (3.40)$$

où $\sigma \geq \frac{(n+1)}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$ et $\tilde{\sigma} \geq \frac{(n+1)}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right)$. De plus,

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}})} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}})} \\ & \lesssim \|f\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}} + \|g\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; H_{\tilde{q}'}^{\sigma+\tilde{\sigma}-1})}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Preuve. Considérons l'opérateur

$$Tf(t, x) = \tilde{D}_x^{-\sigma+\frac{1}{2}} \frac{e^{\pm it D_x}}{\sqrt{D_x}} f(x),$$

initialement défini de $L^2(\mathbb{H}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{H}^n))$, et son adjoint formel

$$T^*F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \tilde{D}_x^{-\sigma+1/2} \frac{e^{\mp is D_x}}{\sqrt{D_x}} F(s, x),$$

initialement défini de $L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{H}^n))$ dans $L^2(\mathbb{H}^n)$. En suivant le principe de la méthode TT^* , il faut d'abord montrer la continuité $L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{H}^n)) \rightarrow L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))$ de l'opérateur

$$TT^*F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \tilde{D}_x^{-2\sigma+1} \frac{e^{\pm i(t-s) D_x}}{D_x} F(s, x)$$

et de sa version tronquée

$$\mathcal{T}F(t, x) = \int_{-\infty}^t ds \tilde{D}_x^{-2\sigma+1} \frac{e^{\pm i(t-s) D_x}}{D_x} F(s, x),$$

pour tout couple admissible (p, q) et pour tout $\sigma \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$, et ensuite découpler les indices.

Supposons que le couple admissible (p, q) n'est pas l'endpoint $(2, 2 \frac{n-1}{n-3})$. On peut alors déduire du Corollaire 3.2.1 que les normes $\|TT^*F(t, x)\|_{L_t^p L_x^q}$ et $\|\mathcal{T}F(t, x)\|_{L_t^p L_x^q}$ sont majorées par

$$\left\| \int_{0 < |t-s| < 1} ds |t-s|^{-\alpha} \|F(s, x)\|_{L_x^{q'}} \right\|_{L_t^p} + \left\| \int_{|t-s| \geq 1} ds |t-s|^{-2} \|F(s, x)\|_{L_x^{q'}} \right\|_{L_t^p}, \quad (3.42)$$

où $\alpha = (n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) \in (0, 1)$. D'une part, le noyau de convolution $|t-s|^{-2} \mathbb{1}_{\{|t-s| \geq 1\}}$ définit clairement un opérateur borné de $L^{p_1}(\mathbb{R})$ dans $L^{p_2}(\mathbb{R})$, pour tout $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, en particulier, de $L^{p'}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$, puisque $p \geq 2$. D'autre part, le noyau de convolution $|t-s|^{-\alpha} \mathbb{1}_{\{0 < |t-s| < 1\}}$ avec $0 < \alpha < 1$ définit un opérateur boné de $L^{p_1}(\mathbb{R})$ dans $L^{p_2}(\mathbb{R})$, pour tout $1 < p_1, p_2 < \infty$ tels que $0 \leq \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \leq 1 - \alpha$, en particulier de $L^{p'}(\mathbb{R})$ vers $L^p(\mathbb{R})$, puisque $p \geq 2$ et $\frac{2}{p} \geq \alpha$.

Pour l'endpoint $(p, q) = (2, 2 \frac{n-1}{n-3})$, on a $\alpha = 1$. L'argument précédent s'effondre donc, mais il peut être remplacé par l'analyse plus raffiné de Keel et Tao [185]. Notons qu'il y a un problème seulement dans la première partie de (3.42) et pas dans la deuxième qui fait intervenir un noyau de convolution intégrable sur \mathbb{R} .

Ainsi, TT^* et \mathcal{T} sont bornés de $L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{H}^n))$ dans $L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))$, pour tout couple admissible (p, q) . En conséquence, T^* est borné de $L^{p'}(\mathbb{R}; L^{q'}(\mathbb{H}^n))$ vers $L^2(\mathbb{H}^n)$ et T est borné de $L^2(\mathbb{H}^n)$ vers $L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))$. En particulier,

$$\|(\cos t D_x) f(x)\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\tilde{D}_x^{-\sigma+\frac{1}{2}} D_x^{-\frac{1}{2}} e^{\pm it D_x} \tilde{D}_x^{\sigma-\frac{1}{2}} D_x^{\frac{1}{2}} f(x)\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}},$$

et

$$\|\frac{\sin t D_x}{D_x} g(x)\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\tilde{D}_x^{-\sigma+\frac{1}{2}} D_x^{-\frac{1}{2}} e^{\pm it D_x} \tilde{D}_x^{\sigma-\frac{1}{2}} D_x^{-\frac{1}{2}} g(x)\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|g\|_{H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}}.$$

On peut ensuite découpler les indices. Soit $(p, q) \neq (\tilde{p}, \tilde{q})$ deux couples admissibles et soit $\sigma \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$, $\tilde{\sigma} \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right)$. Puisque T et T^* sont continus, l'opérateur

$$TT^*F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \tilde{D}_x^{-\sigma-\tilde{\sigma}+1} \frac{e^{\pm i(t-s)D_x}}{D_x} F(s, x)$$

est borné de $L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}; L^{\tilde{q}'}(\mathbb{H}^n))$ vers $L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n))$. Selon [61], ce résultat reste vrai pour l'opérateur tronqué

$$\mathcal{T}F(t, x) = \int_{-\infty}^t ds \tilde{D}_x^{-\sigma-\tilde{\sigma}+1} \frac{e^{\pm i(t-s)D_x}}{D_x} F(s, x)$$

et donc pour

$$\tilde{\mathcal{T}}F(t, x) = \int_0^t ds \tilde{D}_x^{-\sigma-\tilde{\sigma}+1} \frac{\sin(t-s)D_x}{D_x} F(s, x)$$

tant que p et \tilde{p} ne valent pas 2 tous les deux. Pour traiter le cas restant $p = \tilde{p} = 2$ et $2 < q \neq \tilde{q} \leq 2 \frac{n-1}{n-3}$, on combine l'approche bilinéaire de Keel et Tao [185] avec nos estimations précédentes.

3.2.5 Equation des ondes "non-shiftée" sur les espaces hyperboliques

On considère maintenant l'équation des ondes associée à l'opérateur de Laplace Beltrami sur \mathbb{H}^n :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_{\mathbb{H}^n} u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x), \end{cases} \quad (3.43)$$

Comme déjà mentionné, l'opérateur $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ est positif sur $L^2(\mathbb{H}^n)$ et son spectre L^2 est la demi-droite $[\rho^2, +\infty)$, avec $\rho = \frac{n-1}{2}$. L'équation précédente est donc plutôt du type d'une équation de Klein-Gordon. On peut considérer une famille générale d'équations de Klein-Gordon sur l'espace hyperbolique sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta_x u(t, x) + c u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x), \end{cases} \quad (3.44)$$

où

$$c \geq -\rho^2 = -\frac{(n-1)^2}{4} \quad (3.45)$$

est constant. Dans le cas limite $c = -\rho^2$, (3.44) on retrouve l'équation des ondes *shiftée*.

Dans [253], j'avais obtenu des estimations de Strichartz à poids globales pour l'équation (3.43) avec des données radiales sur les espaces de Damek-Ricci et donc en particulier sur les espaces hyperboliques. La stratégie est la même utilisée pour l'équation de Schrödinger et qui a déjà expliqué avant dans le paragraphe 2.3.1.

L'équation des ondes *non-shiftée* (3.43) a aussi été étudiée sur l'espace hyperbolique de dimension 3 par Metcalfe et Taylor dans [227], qui ont prouvé des estimations dispersives et de Strichartz avec applications à la théorie de Cauchy globale à données petites pour l'équation des ondes semi-linéaire. Jean-Philippe Anker et moi, dans [10], nous avions généralisé ce résultat à tout dimension : on va décrire ici les résultats obtenus dans l'étude de la famille d'équations de Klein-Gordon (3.44) dans le cas où $c > -\rho^2$ et en dimension $n \geq 2$, ce qui contient le cas particulier $c=0$ et $n=3$ considéré dans [227]. Pour énoncer les résultats, il sera plus agréable de récrire la constante (3.45) comme suit :

$$c = \kappa^2 - \rho^2 \quad \text{avec} \quad \kappa > 0, \quad (3.46)$$

et d'introduire l'opérateur

$$D = \sqrt{-\Delta - \rho^2 + \kappa^2}, \quad (3.47)$$

ainsi que

$$\tilde{D} = \sqrt{-\Delta - \rho^2 + \tilde{\kappa}^2}, \quad (3.48)$$

où $\tilde{\kappa} > \rho$ est une autre constante fixée. Ainsi notre famille d'équations de Klein-Gordon devient

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - D_x^2 u(t, x) = F(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x), \end{cases} \quad (3.49)$$

l'équation des ondes (3.43) correspondant au choix $\kappa = \rho$ et l'équation *shiftée* au cas limite $\kappa = 0$.

On va maintenant présenter les résultats obtenus dans [10] en les énonçant en dimension $n \geq 3$ par souci de clarté. En analysant de nouveau précisément le noyau de l'opérateur de demi-onde

$$W_t^\sigma = \tilde{D}^{-\sigma} e^{itD}$$

on a obtenu des estimations dispersives qui combinent les estimations en temps petit de [12] pour les ondes *shiftée* et les estimations en temps grand de [6] pour l'équation de Schrödinger. Cela correspond à l'intuition usuelle pour les équations de type Klein-Gordon. Plus précisément on a

$$\|W_t^\sigma\|_{L^q \rightarrow L^{q'}} \lesssim \begin{cases} |t|^{-(n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\frac{3}{2}} & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

où $2 < q < \infty$ et $\sigma \geq (n+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Notons que nous ne traitons pas le cas limite $q=\infty$, pour lequel Metcalfe et Taylor [227] ont obtenu une estimation $H^1 \rightarrow BMO$ en dimension $n=3$.

Des estimations dispersives précédentes nous déduisons les estimations de Strichartz suivantes :

Théorème 3.2.6

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n} u\|_{L^p(I; H^{-\sigma, q}(\mathbb{H}^n))} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{H}^n)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I; H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}(\mathbb{H}^n))}$$

pour une solution u de (3.49). Ici, $I \subseteq \mathbb{R}$ peut être n'importe quel intervalle de temps,

$$\sigma \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad \tilde{\sigma} \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right),$$

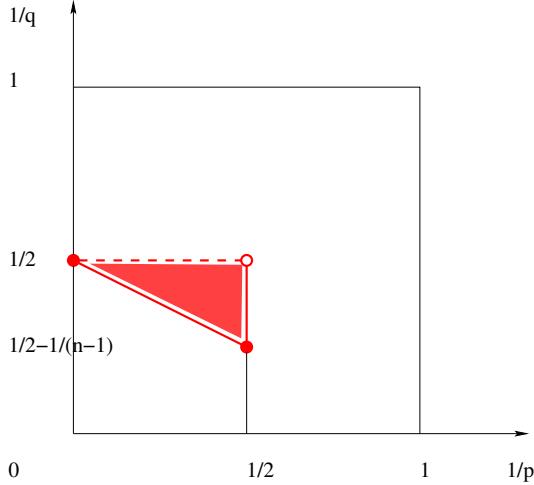
et les couples $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$, $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ appartiennent au triangle

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in (0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}) \mid \frac{1}{p} \geq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \cup \left\{ (0, \frac{1}{2}) \right\}. \quad (3.50)$$

Ces estimations sont similaires à celles de [12] pour l'équation *shiftée*, elles ne font cependant intervenir que les espaces de Sobolev standards. Notons encore que le domaine d'admissibilité des couples pour \mathbb{H}^n est beaucoup plus grand que celui de \mathbb{R}^n , qui correspond au côté inférieur du triangle.

En utilisant les injections de Sobolev, le théorème 3.2.6 peut être étendu à tous les couples $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{\tilde{p}}, \frac{1}{\tilde{q}})$ dans le carré

$$\left[0, \frac{1}{2} \right] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \cup \left\{ (0, \frac{1}{2}) \right\}. \quad (3.51)$$

Fig. 3.4: Admissibilité en dimension $n \geq 4$

Corollaire 3.2.2 Soit (p, q) , (\tilde{p}, \tilde{q}) deux couples admissibles dans le carré et soit $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{R}$. Supposons que $\sigma \geq \sigma(p, q)$, où

$$\sigma(p, q) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) + \max \left\{ 0, \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} \right\} = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) & \text{si } \frac{1}{p} \geq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \\ n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} & \text{si } \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \end{cases}$$

et de même $\tilde{\sigma} \geq \sigma(\tilde{p}, \tilde{q})$. Alors les solutions du problème de Cauchy (3.49) satisfont les estimations de Strichartz

$$\|\nabla_{\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n} u\|_{L^p H^{-\sigma, q}} \lesssim \|f\|_{H^1} + \|g\|_{L^2} + \|F\|_{L^{\tilde{p}'} H^{\tilde{\sigma}, \tilde{q}'}} \quad (3.52)$$

ce qui revient à

$$\begin{aligned} & \|\tilde{D}_x^{-\sigma+1/2} u(t, x)\|_{L_t^p L_x^q} + \|\tilde{D}_x^{-\sigma-1/2} \partial_t u(t, x)\|_{L_t^p L_x^q} \\ & \lesssim \|D_x^{1/2} f(x)\|_{L_x^2} + \|D_x^{-1/2} g(x)\|_{L_x^2} + \|\tilde{D}_x^{\tilde{\sigma}-1/2} F(t, x)\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{q}'}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Remarque 3.2.3 Le théorème 3.2.6 et le Corollaire 3.2.2 sont aussi vrais en dimension $n=3$ avec des démonstrations analogues. Notons que l'endpoint $(p, q)=(2, \infty)$ est exclu. Ces résultats sont vrais en particulier pour l'équation des ondes (3.43) en dimension 3 et contiennent les estimations de Strichartz obtenues par Metcalfe et Taylor dans [227, Section 4] pour la région d'admissibilité plus petite

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} \leq 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \right\}.$$

Remarque 3.2.4 L'analyse du noyau peut aussi être menée en dimension 2 sauf pour le premier noyau de convolution dans (3.42), qui devient

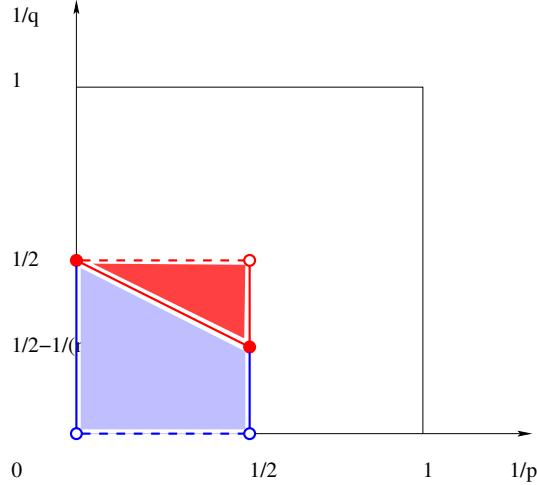
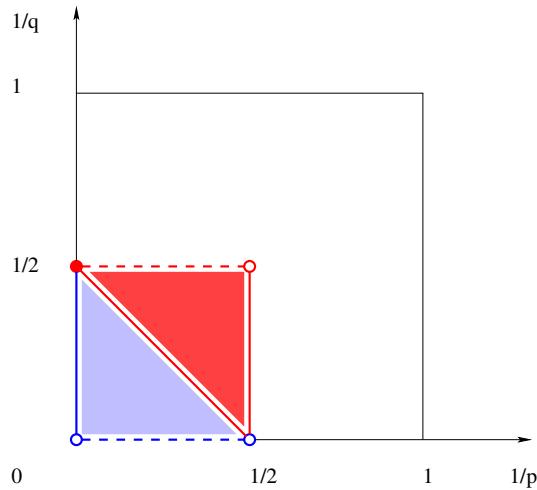
$$|t-s|^{-\alpha} (1 - \log |t-s|)^{\beta} \mathbb{1}_{\{0 < |t-s| < 1\}},$$

avec $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ et $\beta = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$. Le domaine d'admissibilité du théorème 3.2.6 devient

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{2} \right] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

et l'inégalité $\sigma \geq \sigma(p, q)$, respectivement $\tilde{\sigma} \geq \sigma(\tilde{p}, \tilde{q})$ dans le Corollaire 3.2.2 devient stricte dans le triangle

$$\left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in \left(0, \frac{1}{4} \right) \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \right\}.$$

Fig. 3.5: Cas $n \geq 4$ Fig. 3.6: Cas $n = 3$

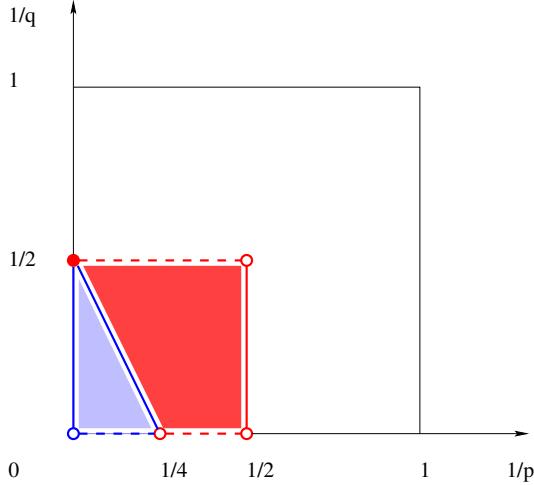
Estimations du noyau

Dans ce paragraphe, on va donner les principales étapes pour les estimations ponctuelles du noyau de convolution radial w_t^σ de l'opérateur $W_t^\sigma = \tilde{D}^{-\sigma} e^{itD}$, avec des exposants $\sigma \in \mathbb{R}$ adaptés. De nouveau, par inversion de la transformée de Fourier sphérique, on a

$$w_t^\sigma(r) = \text{const.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}}.$$

On utilise encore la décomposition

$$\begin{aligned} w_t^\sigma(r) &= w_t^{\sigma,0}(r) + w_t^{\sigma,\infty}(r) \\ &= \text{const.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \chi_0(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}} \\ &\quad + \text{const.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}} \end{aligned}$$

Fig. 3.7: Cas $n=2$

en utilisant des fonctions de troncature régulières χ_0 et χ_∞ sur \mathbb{R} telles que

$$\chi_0(\lambda) + \chi_\infty(\lambda) = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \chi_0(\lambda) = 1 & \forall |\lambda| \leq \kappa, \\ \chi_\infty(\lambda) = 1 & \forall |\lambda| \geq \kappa+1. \end{cases}$$

On va d'abord estimer $w_t^{\sigma,0}$. Comme précédemment, on contourne le problème de la singularité logarithmique du noyau $w_t^{\sigma,\infty}$ sur la sphère $r = t$ quand $\sigma = \frac{n+1}{2}$ en introduisant la famille d'opérateurs analytiques

$$\widetilde{W}_t^{\sigma,\infty} = \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}-\sigma)} \chi_\infty(D) \widetilde{D}^{-\sigma} e^{itD}$$

dans la bande verticale $0 \leq \operatorname{Re} \sigma \leq \frac{n+1}{2}$ et les noyaux correspondants

$$\widetilde{w}_t^{\sigma,\infty}(r) = \text{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}-\sigma)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}}. \quad (3.54)$$

De nouveau, la fonction (qui apparaît naturellement dans la théorie des distributions de Riesz) permet de traiter le point au bord $\sigma = \frac{n+1}{2}$, alors que la fonction exponentielle donne une borne dans la bande verticale.

3.2.6 Estimations de $w_t^0 = w_t^{\sigma,0}$.

Théorème 3.2.7 Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. Pour w_t^0 , on a les estimations ponctuelles suivantes :

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$, on a

$$|w_t^0(r)| \lesssim \varphi_0(r).$$

(ii) Supposons que $|t| \geq 2$. Alors pour tout $0 \leq r \leq \frac{|t|}{2}$, on a

$$|w_t^0(r)| \lesssim |t|^{-\frac{3}{2}} (1+r) \varphi_0(r).$$

Preuve. Rappelons que

$$w_t^0(r) = \text{const.} \int_{-\kappa-1}^{\kappa+1} d\lambda \chi_0(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}}. \quad (3.55)$$

Par symétrie, on peut supposer $t > 0$.

(i) Des estimations (1.12) et (1.18), on déduit que

$$|w_t^0(r)| \lesssim \int_{-\kappa-1}^{\kappa+1} d\lambda \lambda^2 \varphi_0(r) \lesssim \varphi_0(r).$$

On montre (ii) en substituant dans (3.55) la première représentation intégrale de φ_λ dans (1.11) et en se ramenant à de l'analyse de Fourier sur \mathbb{R} . Plus précisément,

$$w_t^0(r) = \int_K dk e^{-\rho H(a-rk)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda a(\lambda) e^{it(\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} - \frac{H(a-rk)\lambda}{t})},$$

où $a(\lambda) = \text{const. } \chi_0(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}}$. Puisque

$$\int_K dk e^{-\rho H(a-rk)} = \varphi_0(r)$$

et $|H(a-rk)| \leq r$, il reste à estimer l'intégrale oscillante

$$I(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda a(\lambda) e^{it(\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} - \frac{x\lambda}{t})}$$

par $|t|^{-\frac{3}{2}}(1+|x|)$. On obtient cela par la méthode de la phase stationnaire. On utilise le Lemma A.1 dans l'Appendice A puisque l'hypothèse (3.99) est vérifiée grâce à (1.18).

3.2.7 Estimation de $\tilde{w}_t^\infty = \tilde{w}_t^{\sigma, \infty}$.

Théorème 3.2.8 Pour le noyau \tilde{w}_t^∞ , on a les estimations ponctuelles suivantes, uniformes dans $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$:

(i) Supposons que $|t| \geq 2$. Alors pour tout $r \geq 0$, on a

$$|\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim |t|^{-\infty}.$$

(ii) Supposons que $0 < |t| \leq 2$.

(a) Si $r \geq 3$, alors $\tilde{w}_t^\infty(r) = O(r^{-1} e^{-\rho r})$.

(b) Si $0 \leq r \leq 3$, alors $|\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim \begin{cases} |t|^{-\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \geq 3, \\ |t|^{-\frac{1}{2}}(1 - \log |t|) & \text{si } n = 2. \end{cases}$

Par symétrie, on peut de nouveau supposer $t > 0$ dans toute la preuve du théorème 3.2.8.

Démonstration du théorème 3.2.8.i. Par parité, on a

$$\tilde{w}_t^\infty(r) = 2 \operatorname{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \int_0^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \varphi_\lambda(r) e^{it\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}}. \quad (3.56)$$

Si $0 \leq r \leq \frac{t}{2}$, on reprend la preuve du théorème 3.2.7.ii, en utilisant le Lemma A.2 à la place du Lemma A.1 et on conclut que

$$|\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim t^{-\infty} \varphi_0(r). \quad (3.57)$$

Si $r \geq \frac{t}{2}$, on substitue dans (3.56) le développement de Harish-Chandra (1.13) de $\varphi_\lambda(r)$ et on se ramène ainsi à de l'analyse de Fourier sur \mathbb{R} . Le but est donc d'estimer le développement

$$\tilde{w}_t^\infty(r) = (\sinh r)^{-\rho} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kr} \{ I_k^{+, \infty}(t, r) + I_k^{-, \infty}(t, r) \} \quad (3.58)$$

contenant les intégrales oscillantes

$$I_k^{\pm,\infty}(t, r) = \int_0^{+\infty} d\lambda a_k^{\pm}(\lambda) e^{i(t\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} \pm r\lambda)}$$

avec les amplitudes

$$a_k^{\pm}(\lambda) = 2 \text{ const. } \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \chi_{\infty}(\lambda) \mathbf{c}(\mp\lambda)^{-1} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \Gamma_k(\pm\lambda).$$

Notons que $a_k^{\pm}(\lambda)$ est un symbole d'ordre

$$d = \begin{cases} -1 & \text{si } k=0, \\ -2 & \text{si } k \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

uniformément pour $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$. Cela provient de l'expression (1.14) des \mathbf{c} -fonctions et de l'estimation (1.16) des coefficients Γ_k . Les intégrales

$$I_k^{\pm,\infty}(t, r) = O(k^\nu) \quad (3.59)$$

s'estiment donc facilement quand $k > 0$, tandis que $I_0^{+, \infty}(t, r)$ et spécialement $I_0^{-, \infty}(t, r)$ demandent plus de travail. Pour cette dernière, on intègre d'abord par parties

$$I_0^{+, \infty}(t, r) = \int_0^{+\infty} d\lambda a_0^+(\lambda) e^{it\phi(\lambda)},$$

en utilisant $e^{it\phi(\lambda)} = \frac{1}{it\phi'(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{it\phi(\lambda)}$ et les propriétés suivantes $\phi(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} + \frac{r}{t}\lambda$:

- $\phi'(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}} + \frac{r}{t} \geq \frac{r}{t} \geq \frac{1}{2}$,
- $\phi''(\lambda) = \kappa^2 (\lambda^2 + \kappa^2)^{-\frac{3}{2}}$ est un symbole d'ordre -3 .

On obtient de cette manière

$$I_0^{+, \infty}(t, r) = O(r^{-1}) \quad (3.60)$$

et en fait par intégrations par parties répétées

$$I_0^{+, \infty}(t, r) = O(r^{-\infty}).$$

Passons à la dernière intégrale que nous réécrivons comme suit :

$$I_0^{-, \infty}(t, r) = \int_0^{+\infty} d\lambda a_0^-(\lambda) e^{it(\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} - \lambda)} e^{i(t-r)\lambda}.$$

Après des intégrations par parties basées sur $e^{i(t-r)\lambda} = \frac{1}{i(t-r)} \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{i(t-r)\lambda}$ et en utilisant le fait que

$$\psi(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} - \lambda = \frac{\kappa^2}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} + \lambda} \quad (3.61)$$

est un symbole d'ordre -1 , on obtient

$$I_0^{-, \infty}(t, r) = O\left(\frac{t}{|r-t|}\right). \quad (3.62)$$

Cette estimation est suffisante pour notre but, tant que r ne s'approche pas de t . Si $|r-t| \leq 1$, on sépare

$$e^{it\psi(\lambda)} = 1 + O(t\psi(\lambda))$$

et

$$I_0^{-, \infty}(t, r) = \int_0^{+\infty} d\lambda a_0^-(\lambda) e^{i(t-r)\lambda} + O(t) \quad (3.63)$$

de la même manière. La dernière intégrale a déjà été estimé dans [7] à la fin de la preuve du Théorème 4.2.ii :

$$\int_0^{+\infty} d\lambda a_0^-(\lambda) e^{i(t-r)\lambda} = O(1). \quad (3.64)$$

En combinant ces estimations (3.59), (3.60), (3.62), (3.63), (3.64), on déduit de (3.58) que

$$|\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim e^{-\rho r} t \lesssim t^{-\infty} \quad \forall r \geq \frac{t}{2} \geq 1,$$

uniformément pour $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$. Cela conclut la démonstration du théorème 3.2.8.i. \square

Passons aux estimations en temps petit du théorème 3.2.8.

Démonstration du théorème 3.2.8.ii.a. Pour $0 < t \leq 2$ et $r \geq 3$, on peut reprendre la démonstration du théorème 3.2.8.i dans le cas $r \geq t+1 \geq \frac{t}{2}$. En utilisant le développement (3.58) et les estimations (3.59), (3.60), (3.62), on obtient

$$|\tilde{w}_t^\infty(r)| \lesssim r^{-1} e^{-\rho r},$$

uniformément pour $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$. Cela conclut la démonstration du théorème 3.2.8.ii.a. \square

Démonstration du théorème 3.2.8.ii.b. On récrit (3.56) comme suit :

$$\tilde{w}_t^\infty(r) = 2 \operatorname{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \int_0^{+\infty} d\lambda \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{it\psi(\lambda)} e^{it\lambda} \varphi_\lambda(r) \quad (3.65)$$

$$= \int_0^{+\infty} d\lambda a(\lambda) e^{it\lambda} \varphi_\lambda(r) + \int_0^{+\infty} d\lambda b(\lambda) e^{it\lambda} \varphi_\lambda(r), \quad (3.66)$$

où ψ est donné par (3.61),

$$a(\lambda) = 2 \operatorname{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}}$$

est un symbole d'ordre $\frac{n-3}{2}$, uniformément pour $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$, et

$$b(\lambda) = 2 \operatorname{const.} \frac{e^{\sigma^2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} - \sigma)} \chi_\infty(\lambda) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} (\lambda^2 + \tilde{\kappa}^2)^{-\frac{\sigma}{2}} \{ e^{it\psi(\lambda)} - 1 \}$$

est un symbole d'ordre $\frac{n-5}{2}$, uniformément pour $0 < t \leq 2$ et $\sigma \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \sigma = \frac{n+1}{2}$. La première intégrale dans (3.66) a été étudiée dans [7, Appendix C] et estimée par

$$C \begin{cases} t^{-\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \geq 3, \\ t^{-\frac{1}{2}}(1 - \log |t|) & \text{if } n = 2. \end{cases}$$

La deuxième intégrale est plus facile à estimer par exemple par $C t^{-\frac{n-2}{2}}$. Cela conclut la démonstration du théorème 3.2.8.ii.b. \square

Remarque 3.2.5 En ce qui concerne les estimations locales du noyau des ondes, on aurait pu utiliser la paramétrice d'Hadamard [166, § 17.4] plutôt que l'analyse sphérique.

Remarque 3.2.6 L'analyse du noyau ci-dessus est aussi valable pour les opérateurs $D^{-\sigma} \tilde{D}^{-\tilde{\sigma}} e^{itD}$, si on suppose $\operatorname{Re} \sigma + \operatorname{Re} \tilde{\sigma} = \frac{n+1}{2}$ dans le théorème 3.2.8.

Applications

On va présenter maintenant les résultats, qui ont été déduit sur \mathbb{H}^n , pour l'étude du caractère bien posé et de scattering du problème de Cauchy semi-linéaire (NLWM), avec des non-linéarités de type puissance (2.1).

Quand $\gamma < \gamma_\infty$, défini ci-dessous, on obtient la même courbe de régularité que dans le cas euclidien. Il faut toutefois souligner que puisque nos estimations de Strichartz sont vraies pour une famille plus grande de couples admissibles, elles sont suffisantes pour étudier le problème par un argument de point fixe ; dans le cas euclidien, ce problème a été résolu par différentes méthodes dépendant de la plage d'admissibilité des puissances γ contenues dans la nonlinéarité et de la régularité des données initiales. Ici, nous pouvons donc démontrer les résultats par un argument de point fixe dans des espaces plus classiques.

Considérons donc le problème de Cauchy nonlinéaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - (\Delta_{\mathbb{H}^n} + \rho^2) u(t, x) = F(u(t, x)) \\ u(0, x) = f(x) \\ \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x), \end{cases} \quad (3.67)$$

avec une nonlinéarité de type puissance $F(u)$. On rappelle que cela signifie pour nous que

$$|F(u)| \leq C |u|^\gamma \quad \text{et} \quad |F(u) - F(v)| \leq C (|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1}) |u - v| \quad (3.68)$$

pour des constantes $C \geq 0$ et $\gamma > 1$.

Le degré de régularité σ requis pour le caractère localement bien posé de (3.67) dans $H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \times H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ dépend de γ est représenté sur la figure 4 ci-dessous. Sur celle-ci

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n}, & \gamma_2 &= \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2 + 4} = 1 + \frac{2}{\frac{n-1}{2} + \frac{2}{n-1}}, & \gamma_{\text{conf}} &= \frac{n+3}{n-1} = 1 + \frac{4}{n-1}, \\ \gamma_3 &= \frac{n^2 + 5n - 2 + \sqrt{n^4 + 2n^3 + 21n^2 - 12n + 4}}{2n^2 - 2n} = 1 + \frac{\sqrt{4n + (\frac{n-6}{2} - \frac{2}{n-1})^2} - (\frac{n-6}{2} - \frac{2}{n-1})}{n}, \\ \gamma_4 &= \frac{n^2 + 2n - 5}{n^2 - 2n - 1} = 1 + \frac{2}{\frac{n-1}{2} - \frac{1}{n-1}}, & \gamma_\infty &= \min\{\gamma_3, \gamma_4\} = \begin{cases} \gamma_3 & \text{si } n=4, 5 \\ \gamma_4 & \text{si } n \geq 6 \end{cases} \end{aligned}$$

et les courbes C_1, C_2, C_3 sont données par

$$C_1(\gamma) = \frac{n+1}{4} \left(1 - \frac{n+5}{2n\gamma - n-1} \right), \quad C_2(\gamma) = \frac{n+1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad C_3(\gamma) = \frac{n}{2} - \frac{2}{\gamma-1}.$$

Théorème 3.2.9 Soit $n \geq 4$ et supposons que $F(u)$ satisfait (3.68). Alors l'équation (3.67) est localement bien posé dans $H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \times H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ dans les cas suivants :

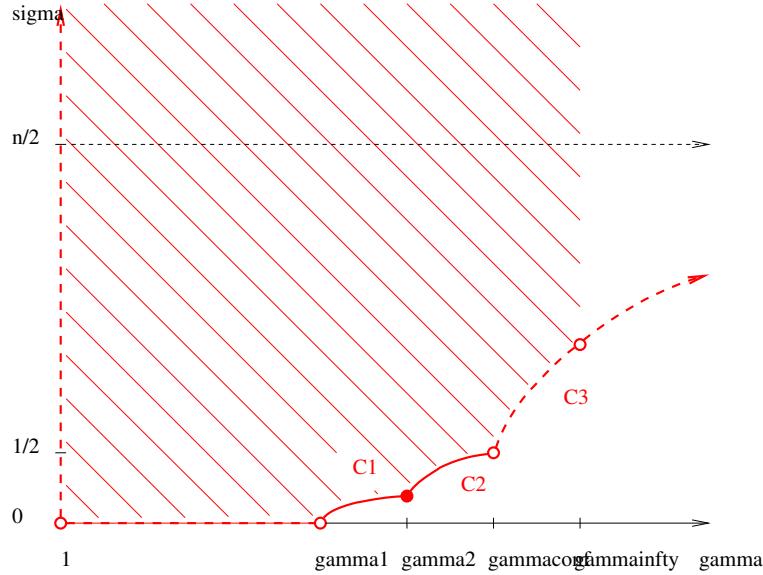
- (A) $1 < \gamma \leq \gamma_1$ et $\sigma > 0$;
- (B) $\gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2$ et $\sigma \geq C_1(\gamma)$;
- (C) $\gamma_2 \leq \gamma < \gamma_{\text{conf}}$ et $\sigma \geq C_2(\gamma)$;
- (D) $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma < \gamma_\infty$ et $\sigma > C_3(\gamma)$.

Plus précisément, avec un type de nonlinéarité et un indice de régularité vérifiant une des conditions ci-dessus, il existe un temps positif T et une unique solution u de (3.67) telle que

$$u \in C([-T, T]; H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{H}^n)) \cap L^{p_0}([-T, T]; L^{q_0}(\mathbb{H}^n)),$$

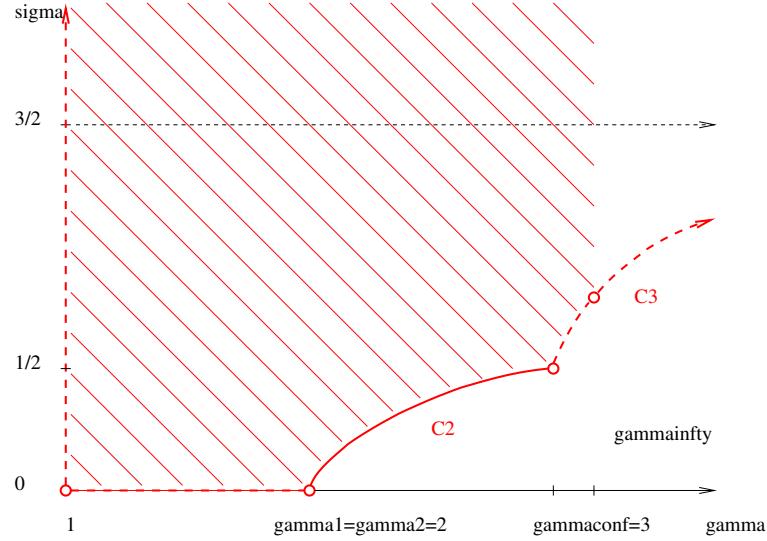
pour un couple admissible (p_0, q_0) adapté, et

$$\partial_t u \in C([-T, T]; H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^n)).$$

Fig. 3.8: Régularité en dimension $n \geq 4$

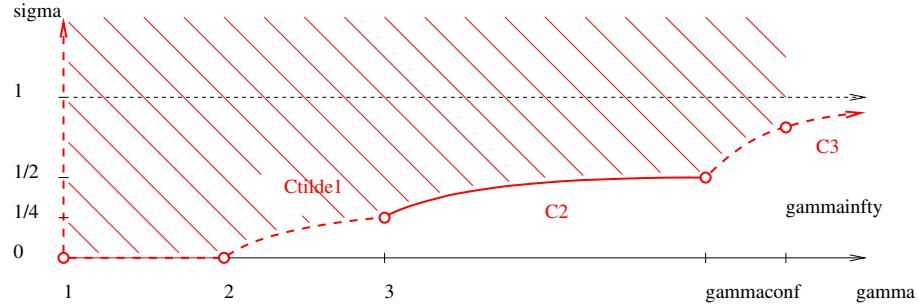
Remarque 3.2.7 Remarquons qu'en dimension trois, les estimations de Strichartz sont valables dans le triangle T_3 sans l'endpoint (voir remarque 3.2.2). En utilisant les arguments ci-dessus, on prouve que (3.67) est localement bien posé dans $H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \times H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ si

- $1 < \gamma \leq \gamma_1 = 2$ et $\sigma > 0$;
- $2 < \gamma < \gamma_{\text{conf}} = 3$ et $\sigma \geq C_2(\gamma) = 1 - \frac{1}{\gamma-1}$;
- $3 \leq \gamma < \gamma_3 = \frac{11+\sqrt{73}}{6}$ et $\sigma > C_3(\gamma) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\gamma-1}$.

Fig. 3.9: Régularité en dimension $n = 3$

Remarque 3.2.8 En dimension $n = 2$, les estimations de Strichartz sont valables dans la région T_2 (voir remarque 3.2.4). En suivant le même schéma de preuve on obtient que (3.67) est localement bien posé dans $H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \times H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ si

- $1 < \gamma \leq 2$ et $\sigma > 0$;
- $2 \leq \gamma \leq 3$ et $\sigma > \tilde{C}_1(\gamma) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma}$;
- $3 < \gamma < \gamma_{\text{conf}} = 5$ et $\sigma \geq C_2(\gamma) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\gamma-1}$;
- $5 \leq \gamma < \gamma_3 = 3 + \sqrt{6}$ et $\sigma > C_3(\gamma) = 1 - \frac{2}{\gamma-1}$.

Fig. 3.10: Régularité en dimension $n=2$

Récemment ce résultat, dans le contexte de non-linéarités $F(u) = \pm|u|^{\gamma-1}u$, a été complété par Staffilani et Shen seulement en dimension $2 \leq n \leq 6$. Dans le cas $\sigma \geq C_3(\gamma)$ ils couvrent une plage d'exposants γ un peu plus grande. Par exemple en dimension $4 \leq n \leq 6$, leur résultat est valable pour $\gamma_\infty \leq \gamma < 1 + \frac{4}{n-2}$.

Les conséquences plus frappantes des nouvelles estimations de Strichartz sont celles qui concernent le caractère globalement bien posé et le scattering de (NLWM) à données petites "de régularité minimale".

Les énoncés des résultats utilisent les puissances suivantes

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 + \frac{3}{n}, \quad \gamma_2 = 1 + \frac{2}{\frac{n-1}{2} + \frac{2}{n-1}}, \quad \gamma_{\text{conf}} = 1 + \frac{4}{n-1}, \\ \gamma_3 &= \begin{cases} \frac{\frac{n+6}{2} + \frac{2}{n-1} + \sqrt{4n + (\frac{6-n}{2} + \frac{2}{n-1})^2}}{n} & \text{si } n \leq 5, \\ 1 + \frac{2}{\frac{n-1}{2} - \frac{1}{n-1}} & \text{si } n \geq 6, \end{cases} \\ \gamma_4 &= \begin{cases} 1 + \frac{4}{n-2} & \text{si } n \leq 5, \\ \frac{n-1}{2} + \frac{3}{n+1} - \sqrt{(\frac{n-3}{2} + \frac{3}{n+1})^2 - 4 \frac{n-1}{n+1}} & \text{si } n \geq 6, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.69)$$

et les courbes suivantes

$$\sigma_1(\gamma) = \frac{n+1}{4} - \frac{(n+1)(n+5)}{8n} \frac{1}{\gamma - \frac{n+1}{2n}}, \quad \sigma_2(\gamma) = \frac{n+1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad \sigma_3(\gamma) = \frac{n}{2} - \frac{2}{\gamma-1}. \quad (3.70)$$

n	γ_1	γ_2	γ_{conf}	γ_3	γ_4
3	2	2	3	$\frac{11+\sqrt{73}}{6} \simeq 3,26$	5
4	$\frac{7}{4} = 1,75$	$\frac{25}{13} \simeq 1,92$	$\frac{7}{3} \simeq 2,33$	$\frac{5}{2} \simeq 2,5$	3
5	$\frac{8}{5} \simeq 1,6$	$\frac{9}{5} \simeq 1,8$	2	$\frac{6+\sqrt{21}}{5} \simeq 2,12$	$\frac{7}{3} \simeq 2,33$
6	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{49}{29} \simeq 1,69$	$\frac{9}{5} = 1,8$	$\frac{43}{23} \simeq 1,87$	2
≥ 7	$< \gamma_2$	$< \gamma_{\text{conf}}$	$< \gamma_3$	$< \gamma_4$	< 2

Théorème 3.2.10 Supposons que la non-linéarité F satisfait

$$|F(u)| \leq C |u|^\gamma, \quad |F(u) - F(v)| \leq C (|u|^{\gamma-1} + |v|^{\gamma-1}) |u - v|. \quad (3.71)$$

Alors, en dimension $n \geq 3$, l'équation (3.67) est globalement bien posée pour des données initiales petites dans $H^{\sigma, \frac{1}{2}}(\mathbb{H}^n) \times H^{\sigma-1, -\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^n)$ dès que

$$\begin{cases} \sigma = 0^+ & \text{si } 1 < \gamma \leq \gamma_1, \\ \sigma = \sigma_1(\gamma) & \text{si } \gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2, \\ \sigma = \sigma_2(\gamma) & \text{si } \gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}, \\ \sigma = \sigma_3(\gamma) & \text{si } \gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_4, \end{cases} \quad (3.72)$$

où $\sigma = 0^+$ signifie tout $\sigma > 0$ suffisamment proche de 0. Plus précisément, dans chaque cas, il existe $2 \leq p, q < \infty$ et $\delta, \varepsilon > 0$ tels que pour toute donnée initiale $(f, g) \in H^{\sigma, \frac{1}{2}}(\mathbb{H}^n) \times H^{\sigma-1, -\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^n)$ avec norme $\leq \delta$, le problème de Cauchy pour (3.67) a une unique solution u de norme plus petite que ε dans l'espace de Banach

$$X = C(\mathbb{R}; H^{\sigma, \frac{1}{2}}(\mathbb{H}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}; H^{\sigma-1, -\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^n)) \cap L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n)).$$

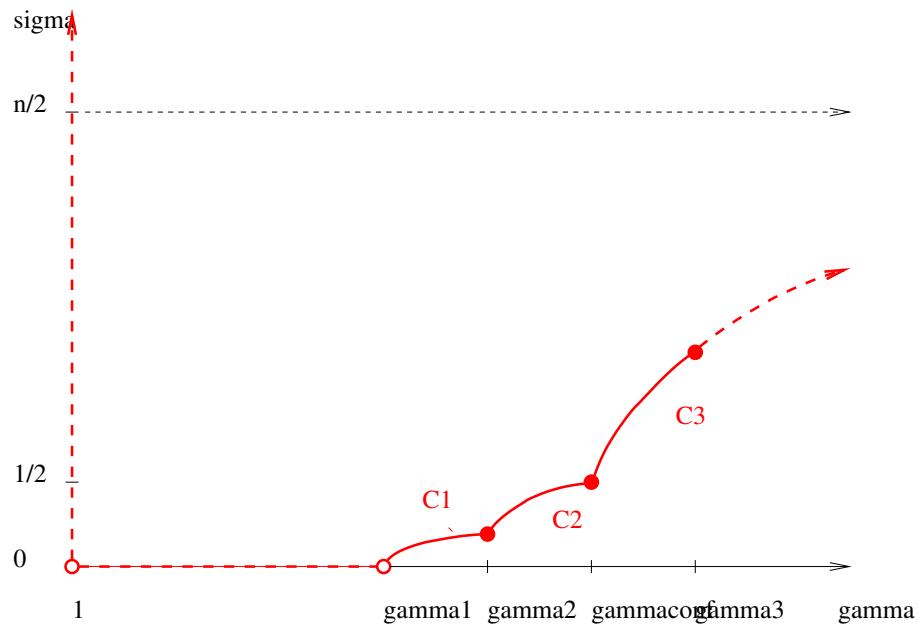


Fig. 3.11: Regularité pour GWP sur \mathbb{H}^n en dimension $n \geq 3$

Remarque 3.2.9 En dimension $n=3$, γ_1 coïncide avec γ_2 , les deuxièmes et troisièmes conditions dans (3.72) se réduisent à

$$\sigma \geq \sigma_2(\gamma) \quad \text{if } \gamma_1 = \gamma_2 < \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$$

et il n'y a pas de courbe C_1 dans la figure 3.11.

Comme rappelé avant, le caractère globalement bien posé (NLW) sur \mathbb{R}^n demande souvent plus de régularité des donnée initiales (par exemple dans $H^1 \times L^2$) et/ou aussi de localisation (données à support compact). De plus, les solutions régulières d'amplitude petite explosent ou pas selon la puissance des non-linéarités γ plus petite ou plus grande de l'exposant de Strauss γ_{straus}

défini dans (3.21). De manière spectaculaire grâce à la plus large admissibilité des estimations de Strichartz, il n'y a pas ce type de restriction sur \mathbb{H}^n . En effet, on établit précisément les courbes de régularité des données initiales pour obtenir un caractère globalement bien posé pour (NLWM) avec des non-linéarités peu régulières et on voit que l'exposant de Strauss n'est pas pertinent. Notre résultat complète le fameux résultat de Tataru [292] qui traitait le cas des non-linéarité avec puissance $\gamma > \gamma_{\text{conf}}$ dans $H^1 \times L^2$ en utilisant les estimations dispersives à décroissance exponentielle en temps combinées avec des arguments classiques d'énergie. De manière analogue à l'équation de Schrödinger, en utilisant l'argument de Cauchy dans $H^{\sigma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \times H^{\sigma-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ et les estimations sur l'opérateur T^* , on obtient la propriété de scattering à données petites dans cette espace.

Remarque 3.2.10 Remarquons que sur les espaces de Damek-Ricci, dans [11] on obtient le même type d'applications pour le problème non-linéaire (NLW).

Remarque 3.2.11 Nous avons aussi étudié le problème de Cauchy pour l'équation de type Klein-Gordon dans [10], le cadre fonctionnel est un peu plus simple puisqu'on peut travailler directement avec les espaces de Sobolev classiques. Nous y avons obtenu des résultats du même type que ceux présentés ci-dessus. En fait, la formulation présentée ci-dessus pour le caractère globalement bien posé tient compte d'une amélioration dans la formulation des estimations de Strichartz remarquée dans [10] qui permet d'obtenir un meilleur résultat non-linéaire.

Preuve. [Démonstration du théorème 3.2.10 pour $1 < \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$] On reprend la méthode de point fixe basée sur les estimations de Strichartz. Posons $u = \Phi(v)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + D_x^2 u(t, x) = F(v(t, x)), \\ u(0, x) = f(x), \quad \partial_t|_{t=0} u(t, x) = g(x), \end{cases} \quad (3.73)$$

qui est donnée par la formule de Duhamel :

$$u(t, x) = (\cos t D_x) f(x) + \frac{\sin t D_x}{D_x} g(x) + \int_0^t ds \frac{\sin(t-s) D_x}{D_x} F(s, x).$$

D'une part, selon le théorème 3.2.6, on a l'estimation de Strichartz

$$\begin{aligned} & \|u(t, x)\|_{L_t^\infty H_x^\sigma} + \|\partial_t u(t, x)\|_{L_t^\infty H_x^{\sigma-1}} + \|u(t, x)\|_{L_t^p L_x^q} \\ & \lesssim \|f(x)\|_{H_x^\sigma} + \|g(x)\|_{H_x^{\sigma-1}} + \|F(v(t, x))\|_{L_t^{\tilde{p}'} H_x^{\sigma+\tilde{\sigma}-1, \tilde{q}'}} \end{aligned}$$

lorsque

$$\begin{cases} (p, q) \text{ et } (\tilde{p}, \tilde{q}) \text{ sont des couples admissibles ;} \\ \sigma \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right) \text{ et } \tilde{\sigma} \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right). \end{cases}$$

D'autre part, par notre hypothèse (3.71) sur la non-linéarité et par l'injection de Sobolev (Proposition 1.2.1), on a

$$\|F(v(t, x))\|_{L_t^{\tilde{p}'} H_x^{\sigma+\tilde{\sigma}-1, \tilde{q}'}} \lesssim \|v(t, x)|^\gamma\|_{L_t^{\tilde{p}'} H_x^{\sigma+\tilde{\sigma}-1, \tilde{q}'}} \lesssim \|v(t, x)|^\gamma\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{Q}'}} \lesssim \|v(t, x)\|_{L_t^{\gamma \tilde{p}'} L_x^{\gamma \tilde{Q}'}}^\gamma,$$

dès que

$$\sigma + \tilde{\sigma} \leq 1, \quad 1 < \tilde{Q}' \leq \tilde{q}' < \infty \quad \text{et} \quad \frac{n}{\tilde{Q}'} - \frac{n}{\tilde{q}'} \leq 1 - \sigma - \tilde{\sigma}. \quad (3.74)$$

Pour rester dans le même espace fonctionnel, on demande en outre que

$$\gamma \tilde{p}' = p \quad \text{et} \quad \gamma \tilde{Q}' = q.$$

En résumé,

$$\begin{aligned} & \|u(t, x)\|_{L_t^\infty H_x^\sigma} + \|\partial_t u(t, x)\|_{L_t^\infty H_x^{\sigma-1}} + \|u(t, x)\|_{L_t^p L_x^q} \\ & \leq C \left\{ \|f(x)\|_{H_x^\sigma} + \|g(x)\|_{H_x^{\sigma-1}} + \|v\|_{L_t^p L_x^q}^\gamma \right\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

si l'ensemble des conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } (p, q) \text{ et } (\tilde{p}, \tilde{q}) \text{ sont des couples admissibles ;} \\ \text{(b) } \sigma \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \tilde{\sigma} \geq \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right), \sigma + \tilde{\sigma} \leq 1 ; \\ \text{(c) } \frac{\gamma}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} = 1 ; \\ \text{(d) } 1 \leq \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \leq 1 + \frac{1-\sigma-\tilde{\sigma}}{n} ; \\ \text{(e) } q > \gamma . \end{array} \right. \quad (3.76)$$

Pour un tel choix, Φ envoie l'espace de Banach

$$X = C(\mathbb{R}; H^\sigma(\mathbb{H}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}; H^{\sigma-1}(\mathbb{H}^n)) \cap L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{H}^n)),$$

muni de la norme

$$\|u\|_X = \|u(t, x)\|_{L_t^\infty H_x^\sigma} + \|\partial_t u(t, x)\|_{L_t^\infty H_x^{\sigma-1}} + \|u\|_{L_t^p L_x^q},$$

dans lui même. Montrons que Φ est une contraction dans la boule

$$X_\varepsilon = \{u \in X \mid \|u\|_X \leq \varepsilon\},$$

dès que $\varepsilon > 0$ et $\|f\|_{H^\sigma} + \|g\|_{H^{\sigma-1}}$ sont suffisamment petits. Soit $v, \tilde{v} \in X$ et $u = \Phi(v)$, $\tilde{u} = \Phi(\tilde{v})$. En reprenant les arguments menant à (3.75) et en utilisant de plus l'inégalité de Hölder, on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_X & \leq C \|F(v) - F(\tilde{v})\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{Q}'}} \\ & \leq C \|\{|v|^{\gamma-1} + |\tilde{v}|^{\gamma-1}\}|v - \tilde{v}|\|_{L_t^{\tilde{p}'} L_x^{\tilde{Q}'}} \\ & \leq C \{\|v\|_{L_t^p L_x^q}^{\gamma-1} + \|\tilde{v}\|_{L_t^{\tilde{p}} L_x^{\tilde{q}}}^{\gamma-1}\} \|v - \tilde{v}\|_{L_t^p L_x^q} \\ & \leq C \{\|v\|_X^{\gamma-1} + \|\tilde{v}\|_X^{\gamma-1}\} \|v - \tilde{v}\|_X. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ainsi, si on suppose $\|v\|_X \leq \varepsilon$, $\|\tilde{v}\|_X \leq \varepsilon$ et $\|f\|_{H^\sigma} + \|g\|_{H^{\sigma-1}} \leq \delta$, alors (3.75) et (3.77) donnent

$$\|u\|_X \leq C\delta + C\varepsilon^\gamma, \quad \|\tilde{u}\|_X \leq C\delta + C\varepsilon^\gamma \quad \text{et} \quad \|u - \tilde{u}\|_X \leq 2C\varepsilon^{\gamma-1} \|v - \tilde{v}\|_X.$$

Donc on a

$$\|u\|_X \leq \varepsilon, \quad \|\tilde{u}\|_X \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u - \tilde{u}\|_X \leq \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_X$$

si $C\varepsilon^{\gamma-1} \leq \frac{1}{4}$ et $C\delta \leq \frac{3}{4}\varepsilon$. On conclut alors en utilisant le point fixe de Banach dans l'espace métrique complet X_ε .

Il reste à vérifier que l'ensemble des conditions (3.76) peuvent être satisfaites dans les différents cas (3.72). Remarquons que l'on peut supposer les inégalités suivantes dans (3.76.b) :

$$\sigma = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma} = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right).$$

Ainsi (3.76) se réduit à l'ensemble de conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } (p, q) \text{ et } (\tilde{p}, \tilde{q}) \text{ sont des couples admissibles ;} \\ \text{(b) } \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \geq \frac{n-1}{n+1} ; \\ \text{(c) } \frac{\gamma}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} = 1 ; \\ \text{(d.i) } \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \geq 1 ; \\ \text{(d.ii) } \left(\frac{2n}{n-1} \gamma - \frac{n+1}{n-1} \right) \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{n+1}{n-1} ; \\ \text{(e) } q > \gamma . \end{array} \right. \quad (3.78)$$

On va discuter ces conditions d'abord en grandes dimensions et ensuite en petites dimensions.

► Supposons que $n \geq 6$.

On remarque d'abord que $\gamma_{\text{conf}} < 2$. Comme $\gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$ et $q > 2$, (3.78.e) est trivialement satisfaite.

Ensuite on affirme que (3.78.a) et (3.78.c) se réduisent à la seule condition

$$\frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \geq \frac{\gamma+1}{2} - \frac{2}{n-1} \quad (3.79)$$

dans le carré

$$R = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} \right]. \quad (3.80)$$

Plus précisément, si (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) sont des couples admissibles satisfaisant (3.78.c), alors $(\frac{1}{q}, \frac{1}{\tilde{q}})$ est un point dans le carré R satisfaisant (3.79). Réciproquement, si $(\frac{1}{q}, \frac{1}{\tilde{q}}) \in R$ satisfait (3.79), alors, il existe une famille à un paramètre de couples admissibles (p, q) et (\tilde{p}, \tilde{q}) satisfaisant (3.78.c). Toutes ces affirmations peuvent se déduire des figures suivantes

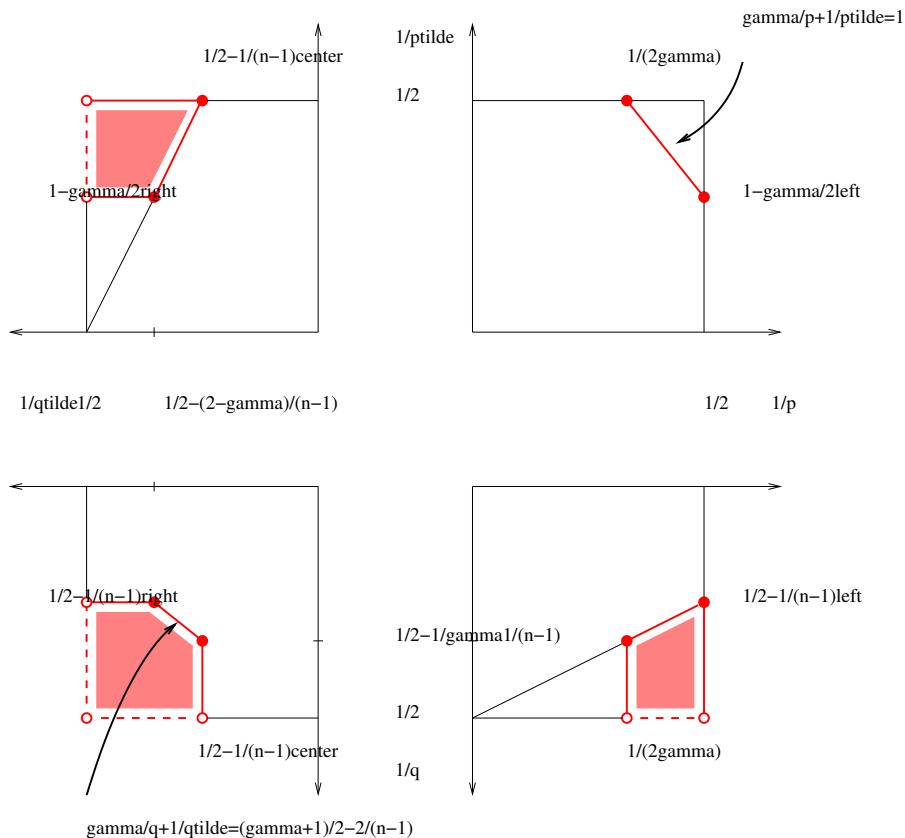


Fig. 3.12: Cas $\gamma < 2$

Troisièmement, comme $\gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$, (3.79) est en fait une conséquence de (3.78.d.i).

Quatrièmement, on affirme que (3.78.b) se déduit de (3.78.d.i) et (3.78.d.ii). En effet considérons les trois droites

$$\begin{cases} (\text{b}) & \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{n-1}{n+1} \\ (\text{d.i}) & \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1 \\ (\text{d.ii}) & \left(\frac{2n}{n-1} \gamma - \frac{n+1}{n-1} \right) \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{n+1}{n-1} \end{cases} \quad (3.81)$$

dans le plan de coordonnées $(\frac{1}{q}, \frac{1}{\bar{q}})$. D'une part, elles se croisent en un même point dont les coordonnées sont

$$\begin{cases} \frac{1}{q_1} = \frac{2}{n+1} \frac{1}{\gamma-1}, \\ \frac{1}{\bar{q}_1} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{\gamma-1}. \end{cases} \quad (3.82)$$

D'autre part, les coefficients de $\frac{1}{q}$ apparaissent en ordre croissant dans (3.81) :

$$1 < \gamma < \frac{2n}{n-1} \gamma - \frac{n+1}{n-1}.$$

Ainsi, (3.78.b) est une conséquence de (3.78.d.i) et (3.78.d.ii), qui définissent le secteur S de sommet $(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{\bar{q}_1})$ et de côtés (3.81.d.i), (3.81.d.ii) dessinés sur la Figure 3.13.

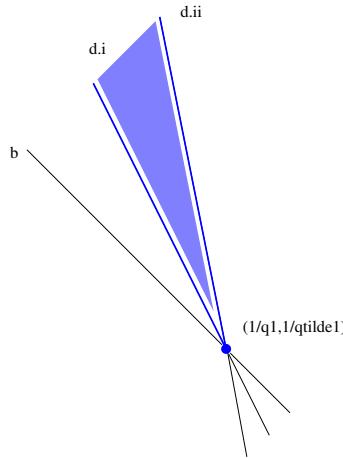


Fig. 3.13: Secteur S

En résumé, l'ensemble des conditions (3.78) se réduit aux trois conditions (3.78.d.i), (3.78.d.ii), (3.80) dans le plan de coordonnées $(\frac{1}{q}, \frac{1}{\bar{q}})$. Pour conclure, on examine les intersections possibles du secteur S défini par (3.78.d.i) et (3.78.d.ii) avec le carré R défini par (3.80), et on détermine dans chaque la régularité minimale $\sigma = \frac{n+1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$.

- Cas 1 : $1 < \gamma \leq \gamma_1$

Dans les trois sous-cas suivants, la condition de régularité minimale est $\sigma > 0$, puisque $\frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ peut être choisi arbitrairement proche de $\frac{1}{2}$.

- Sous-cas 1.1 : $1 < \gamma \leq 1 + \frac{2}{n}$

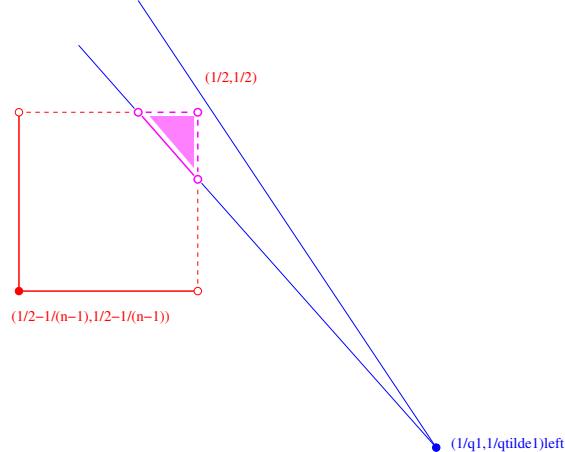


Fig. 3.14: Cas $1 < \gamma \leq 1 + \frac{2}{n}$

- Sous-cas 1.2 : $1 + \frac{2}{n} \leq \gamma \leq 1 + \frac{2}{n-1}$

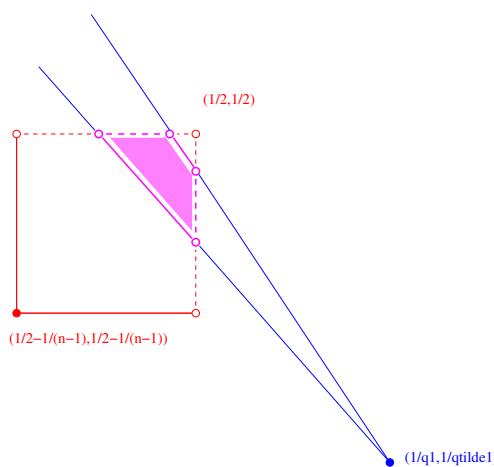
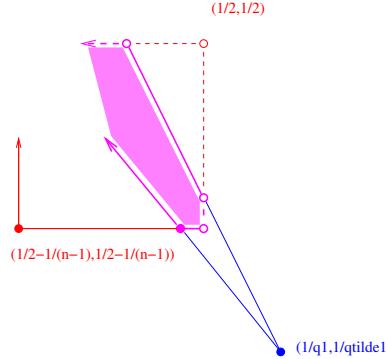


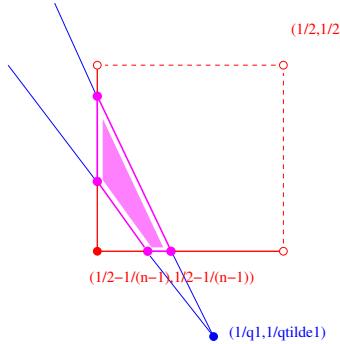
Fig. 3.15: Cas $1 + \frac{2}{n} \leq \gamma \leq 1 + \frac{2}{n-1}$

- Sous-cas 1.3 : $1 + \frac{2}{n-1} \leq \gamma \leq \gamma_1$

Fig. 3.16: Cas $1 + \frac{2}{n-1} \leq \gamma \leq \gamma_1$

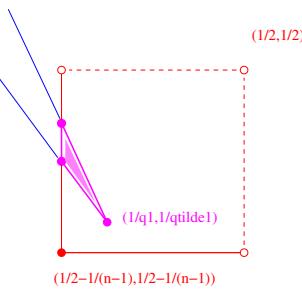
- Cas 2 : $\gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2$

La régularité minimale $\sigma = \sigma_1(\gamma)$ est atteinte au point du bord $(\frac{1}{q}, \frac{1}{\bar{q}}) = (\frac{n+5}{4n} \frac{1}{\gamma - \frac{1}{2n}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1})$.

Fig. 3.17: Cas $\gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2$

- Cas 3 : $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$

La régularité minimale $\sigma = \sigma_2(\gamma)$ est atteinte au sommet $(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{\bar{q}_1})$.

Fig. 3.18: Cas $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$

Dans le cas limite $\gamma = \gamma_{\text{conf}}$, remarquons que tous les indices $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{\bar{q}_1}, \frac{1}{p_1} = \frac{n-1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{q_1})$, $\frac{1}{\bar{p}_1} = \frac{n-1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{q}_1})$ deviennent égaux à l'indice de Strichartz $\frac{1}{2} \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$.

Cela conclut la preuve du théorème 3.2.10 pour $1 < \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$ et $n \geq 6$.

► Supposons que $n = 4$ ou 5 .

Adaptions la preuve ci-dessus. Si $\gamma \geq 2$, (3.78.e) doit être vérifiée et (3.78.a), (3.78.c) se réduisent de nouveau à (3.79), mais cette fois, dans le carré légèrement plus grand

$$R = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} \right]. \quad (3.83)$$

Voir figure 3.19.

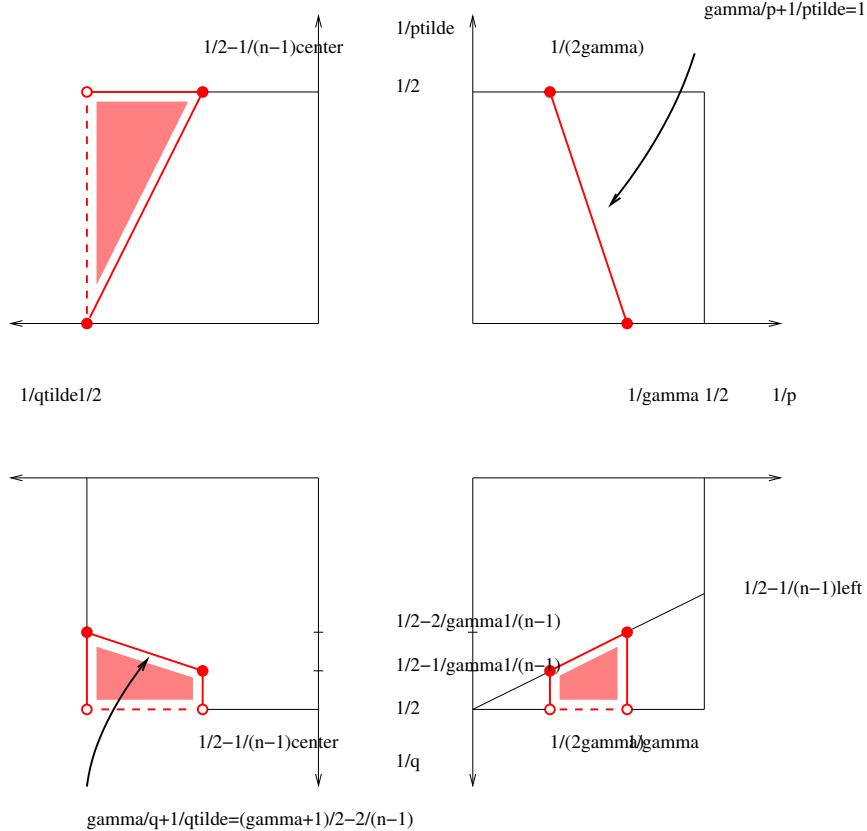


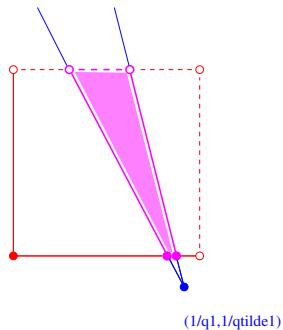
Fig. 3.19: Cas $\gamma \geq 2$

Ainsi (3.78) se réduit à

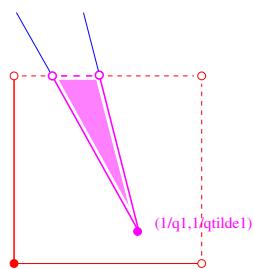
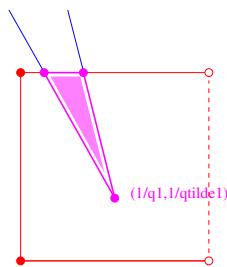
$$\begin{cases} (3.78.d.i), (3.78.d.ii), (3.83) & \text{si } 1 < \gamma < 2, \\ (3.78.d.i), (3.78.d.ii), (3.78.e), (3.83) & \text{si } 2 \leq \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}. \end{cases}$$

Une étude au cas par cas de l'intersection $S \cap R$ peut se faire comme ci-dessus et donne les mêmes résultats. La seule différence est le fait que le secteur S sort du carré R par le côté du dessus au lieu du côté gauche (voir les figures 3.20, 3.21, 3.22 below). Notons que (3.78.e) est satisfaite, puisque $q_1 > \gamma$ quand $2 \leq \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$.

- Cas 2 : $\gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2$

Fig. 3.20: Cas $\gamma_1 < \gamma \leq \gamma_2$

- Cas 3 : $\gamma_2 \leq \gamma < \gamma_{\text{conf}}$

Fig. 3.21: Sous-cas $\gamma_2 \leq \gamma < 2$ Fig. 3.22: Sous-cas $2 \leq \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$

Cela conclut la preuve du théorème 3.2.10 pour $1 < \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$ et $n = 4, 5$.

► Supposons que $n = 3$.

La preuve est la même, sauf que le carré devient

$$R = \begin{cases} (0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}) & \text{si } 1 < \gamma < 2, \\ (0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}] & \text{si } 2 \leq \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}. \end{cases} \quad (3.84)$$

et que $(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{\bar{q}_1})$ entre dans le carré R par le sommet $(\frac{1}{2}, 0)$ à la place du côté inférieur. Cela se produit quand $\gamma = 2$ et dans ce cas (3.78.e) est satisfaite.

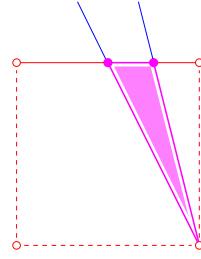


Fig. 3.23: Case $\gamma = 2$

Elle est de plus satisfaite quand $2 < \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$, puisque $q_1 > \gamma$.

Cela conclut la preuve du théorème 3.2.10 pour $1 < \gamma \leq \gamma_{\text{conf}}$.

Preuve. [Démonstration du théorème 3.2.10 pour $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_4$] On reprend la méthode de point fixe ci-dessus, en utilisant le corollaire 3.2.2 au lieu du théorème 3.2.6, et on obtient de cette manière l'ensemble des conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{a}) \quad 2 \leq p \leq \infty \text{ et } 2 \leq q < \infty \text{ satisfait } \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right); \\ (\tilde{\text{a}}) \quad 2 \leq \tilde{p} \leq \infty \text{ et } 2 \leq \tilde{q} < \infty \text{ satisfait } \frac{1}{\tilde{p}} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right); \\ (\text{b}) \quad \sigma \geq n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p}, \quad \tilde{\sigma} \geq n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right) - \frac{1}{\tilde{p}}, \quad \sigma + \tilde{\sigma} \leq 1; \\ (\text{c}) \quad \frac{\gamma}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} = 1; \\ (\text{d}) \quad 1 \leq \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \leq 1 + \frac{1-\sigma-\tilde{\sigma}}{n}; \\ (\text{e}) \quad q > \gamma. \end{array} \right. \quad (3.85)$$

On peut supposer que

$$\sigma = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right) - \frac{1}{\tilde{p}}.$$

Avec ce choix, les conditions

$$\sigma + \tilde{\sigma} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \leq 1 + \frac{1-\sigma-\tilde{\sigma}}{n}$$

deviennent

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} + 1 \geq n \left(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{\tilde{q}} \right) \quad (3.86)$$

et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} + 1 \geq (\gamma - 1) \frac{n}{q}. \quad (3.87)$$

Notons de plus que (3.86) est une conséquence de (3.87), combiné avec $\frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \geq 1$, et que (3.87) peut être récrit comme suit en utilisant (3.85.c) :

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} \leq \frac{2}{\gamma-1}.$$

Ainsi (3.85) se réduit à l'ensemble de conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{a}) \quad 2 \leq p \leq \infty \text{ et } 2 \leq q < \infty \text{ satisfait } \frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right); \\ (\tilde{\text{a}}) \quad 2 \leq \tilde{p} \leq \infty \text{ et } 2 \leq \tilde{q} < \infty \text{ satisfait } \frac{1}{\tilde{p}} \leq \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}} \right); \\ (\text{c}) \quad \frac{\gamma}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} = 1; \\ (\text{d.i}) \quad \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \geq 1; \\ (\text{d.ii}) \quad \frac{1}{p} + \frac{n}{q} \leq \frac{2}{\gamma-1}; \\ (\text{e}) \quad q > \gamma. \end{array} \right. \quad (3.88)$$

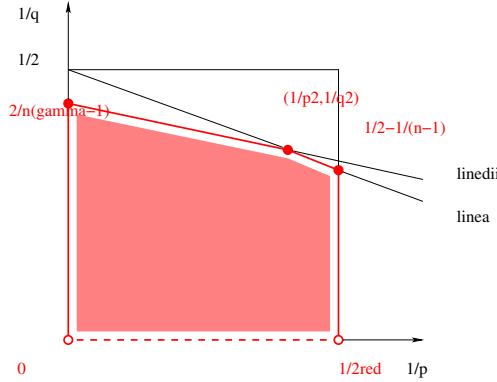
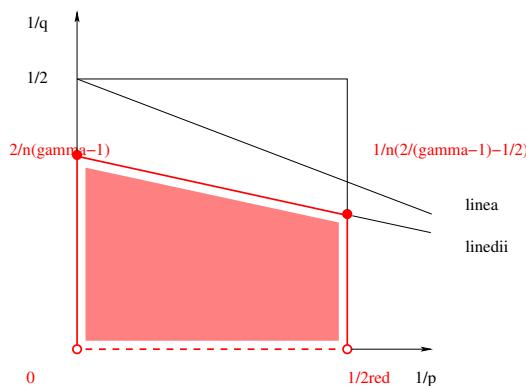
Parmi ces conditions, considérons d'abord (3.88.a) et (3.88.d.ii). dans le plan de coordonnées $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$, les deux droites

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{a}) \quad \frac{1}{p} + \frac{n-1}{2} \frac{1}{q} = \frac{n-1}{4} \\ (\text{d.ii}) \quad \frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{2}{\gamma-1} \end{array} \right. \quad (3.89)$$

se rencontrent au point $(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2})$ donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p_2} = \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{n}{2} - \frac{2}{\gamma-1} \right), \\ \frac{1}{q_2} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{4}{\gamma-1} - \frac{n-1}{2} \right). \end{array} \right. \quad (3.90)$$

Comme γ varie entre γ_{conf} et γ_3 , ce point se déplace sur la droite (3.89.a) entre le point de Strichartz $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1})$ et l'endpoint de Keel-Tao $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1})$, où il sort du carré $[0, \frac{1}{2}] \times (0, \frac{1}{2}]$. Ainsi (3.88.a) et (3.88.d.ii) déterminent la région suivante :

Fig. 3.24: Cas 4 : $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_3$ Fig. 3.25: Cas 5 : $\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_4$

Pour usage futur, remarquons que la régularité minimale

$$\sigma = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} \geq \sigma_3(\gamma) \quad (3.91)$$

est atteinte sur la droite de bord (3.89.d.ii) et que

$$p_2 < 2\gamma. \quad (3.92)$$

Cette inégalité est vraie, en effet quand $\gamma = \gamma_{\text{conf}}$ et elle reste vraie quand γ croît alors que p_2 décroît.

Discutons ensuite toutes les conditions (3.88), d'abord en dimensions élevées, ensuite en basses dimensions.

► Supposons que $n \geq 6$.

On remarque d'abord que (3.88.e) est trivialement satisfaite dans ce cas. D'une part, on a vraiment $\gamma \leq \gamma_4 \leq 2$. D'autre part, il s'ensuit de (3.88.d.ii) que

$$\frac{1}{q} \leq \frac{2}{n(\gamma-1)} \leq \frac{2}{n(\gamma_{\text{conf}}-1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}.$$

Donc $\gamma \leq 2 < q$.

Deuxièmement, on affirme que (3.88.a), (3.88.â), (3.88.c), (3.88.d.ii) se réduisent aux conditions

$$\begin{cases} (\text{a}) & \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{\gamma+1}{2} - \frac{2}{n-1} \\ (\text{d.ii}) & \frac{\gamma}{q} + \frac{n-1}{2n} \frac{1}{q} \leq \frac{n+3}{4n} + \frac{2}{n} \frac{1}{\gamma-1} \end{cases} \quad (3.93)$$

dans le rectangle

$$R = \left(0, \frac{1}{n} \left(\frac{2}{\gamma-1} - \frac{1}{2\gamma}\right)\right] \times \left(0, \frac{1}{2} - \frac{2-\gamma}{n-1}\right]. \quad (3.94)$$

En fait elles se réduisent même à la seule condition (3.93.d.ii) si $\gamma \geq \gamma_3$. Toutes ses affirmations s'obtiennent de nouveau en regardant les figures suivantes.

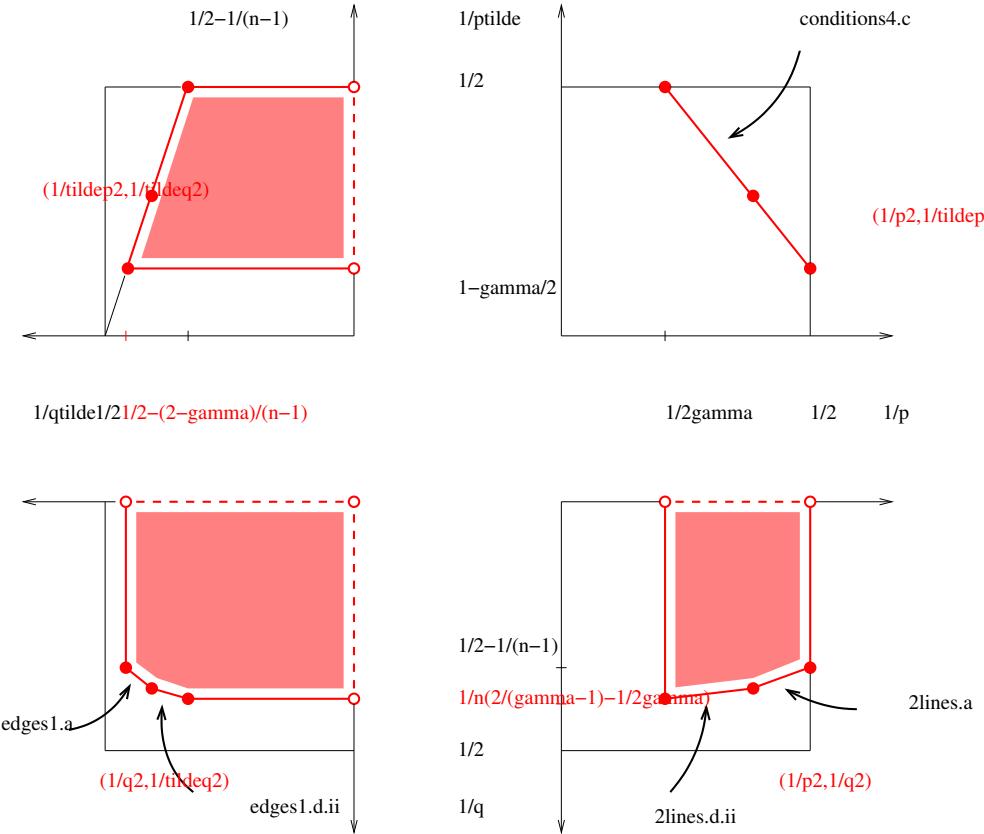
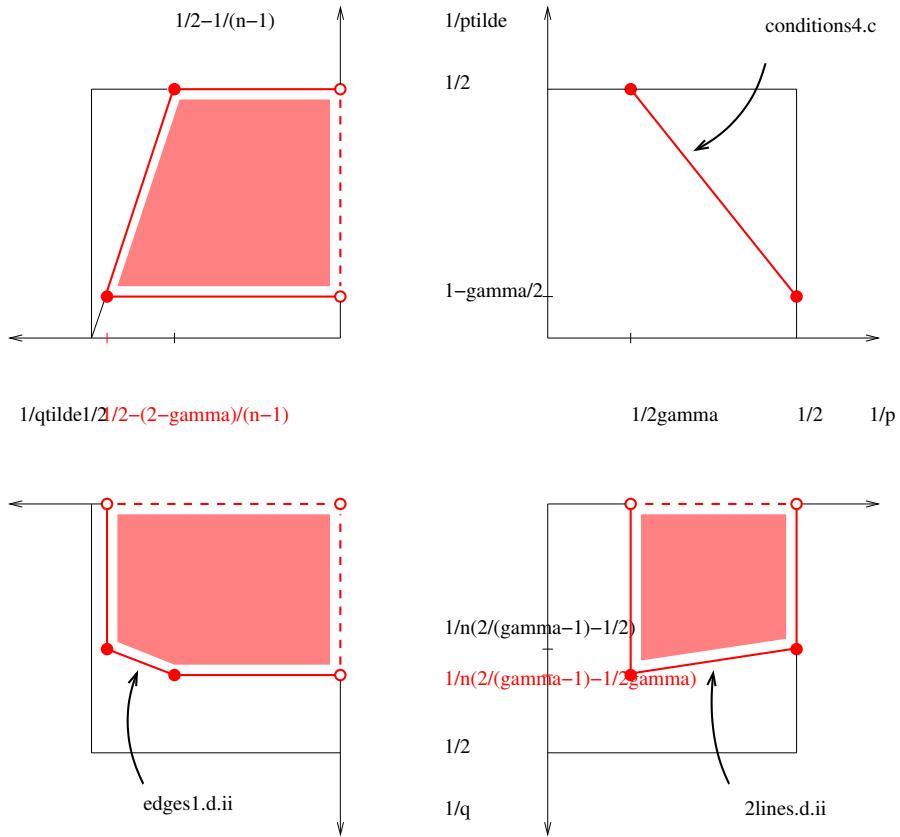


Fig. 3.26: Cas 4 : $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_3$

Fig. 3.27: Cas 5 : $\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_4$

Troisièmement, dans le plan de coordonnées $(\frac{1}{q}, \frac{1}{\bar{q}})$, les conditions (3.88.d.i), (3.93.a), (3.93.d.ii) définissent la région convexe C dans la figure 3.28 avec côtés

$$\begin{cases} (\text{a}) & \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\bar{q}} = \frac{\gamma+1}{2} - \frac{2}{n-1}, \\ (\text{d.i}) & \frac{\gamma}{q} + \frac{1}{\bar{q}} = 1, \\ (\text{d.ii}) & \frac{\gamma}{q} + \frac{n-1}{2n} \frac{1}{\bar{q}} = \frac{n+3}{4n} + \frac{2}{n} \frac{1}{\gamma-1}, \end{cases} \quad (3.95)$$

et avec sommets donnés par

$$\begin{cases} \frac{1}{q_2} = \frac{4}{n+1} \frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{2} \frac{n-1}{n+1}, & \frac{1}{\bar{q}_2} = \frac{n}{n+1} \gamma - \frac{4}{n+1} \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} - \frac{2}{n-1} - \frac{4}{n+1}, \\ \frac{1}{q_3} = \frac{4}{n+1} \frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{2} \frac{n+3}{n+1} \frac{1}{\gamma}, & \frac{1}{\bar{q}_3} = \frac{3}{2} \frac{n-1}{n+1} - \frac{4}{n+1} \frac{1}{\gamma-1}. \end{cases} \quad (3.96)$$

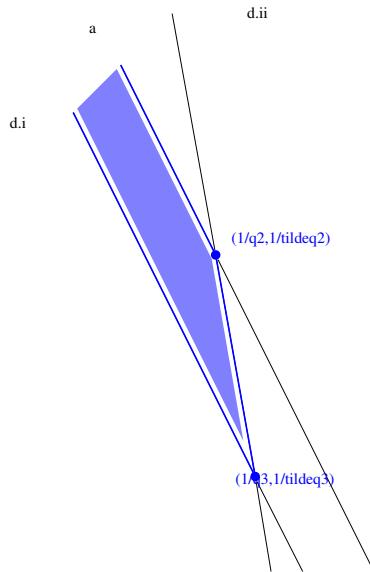
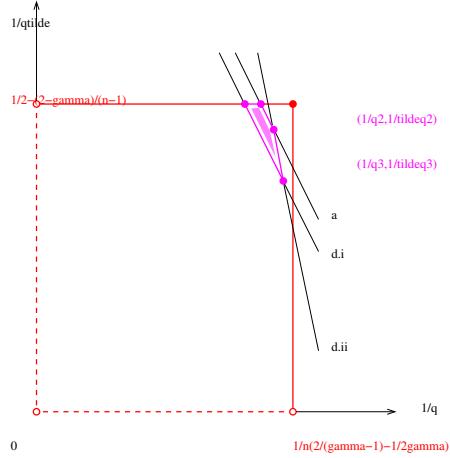


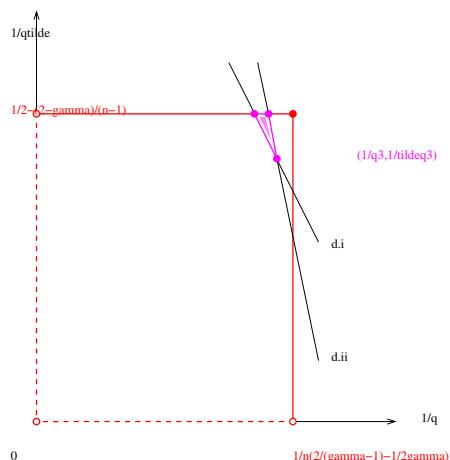
Fig. 3.28: Région convexe C

Pour conclure, il reste à déterminer les intersections possibles de la région convexe C ci-dessus avec le rectangle R défini par (3.94) et dans chaque cas, la régularité minimale $\sigma = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) - \frac{1}{p}$.

- Cas 4 : $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_3$

Fig. 3.29: Case 4 : $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_3$

- Cas 5 : $\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_4$

Fig. 3.30: Case 5 : $\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_4$

Dans les deux cas, la régularité minimale $\sigma = \sigma_3(\gamma)$ est atteinte quand $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{q}, \frac{1}{\bar{q}})$ appartiennent aux côtés (3.89.d.ii) et (3.95.d.ii). Voir figures 3.26 et 3.27. Cela conclut la preuve du théorème 3.2.10 pour $\gamma_{\text{conf}} < \gamma \leq \gamma_4$ et $n \geq 6$.

► Supposons que $3 \leq n \leq 5$.

Alors $\gamma \geq \gamma_{\text{conf}} \geq 2$ et la figure devient

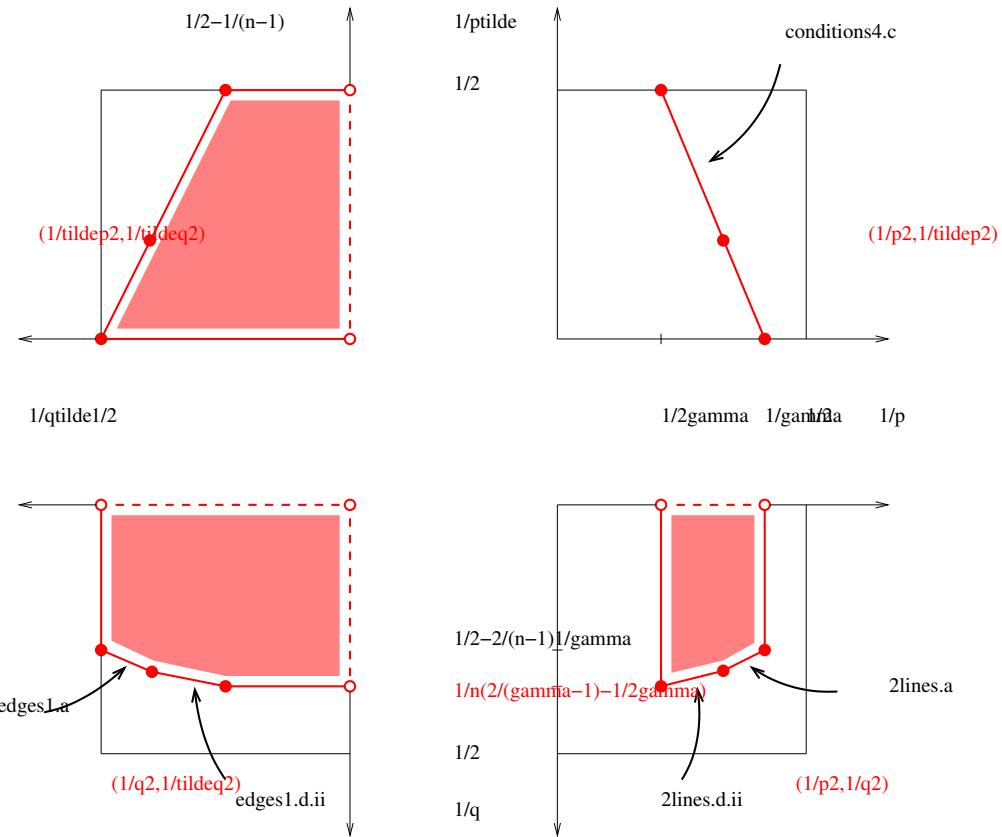
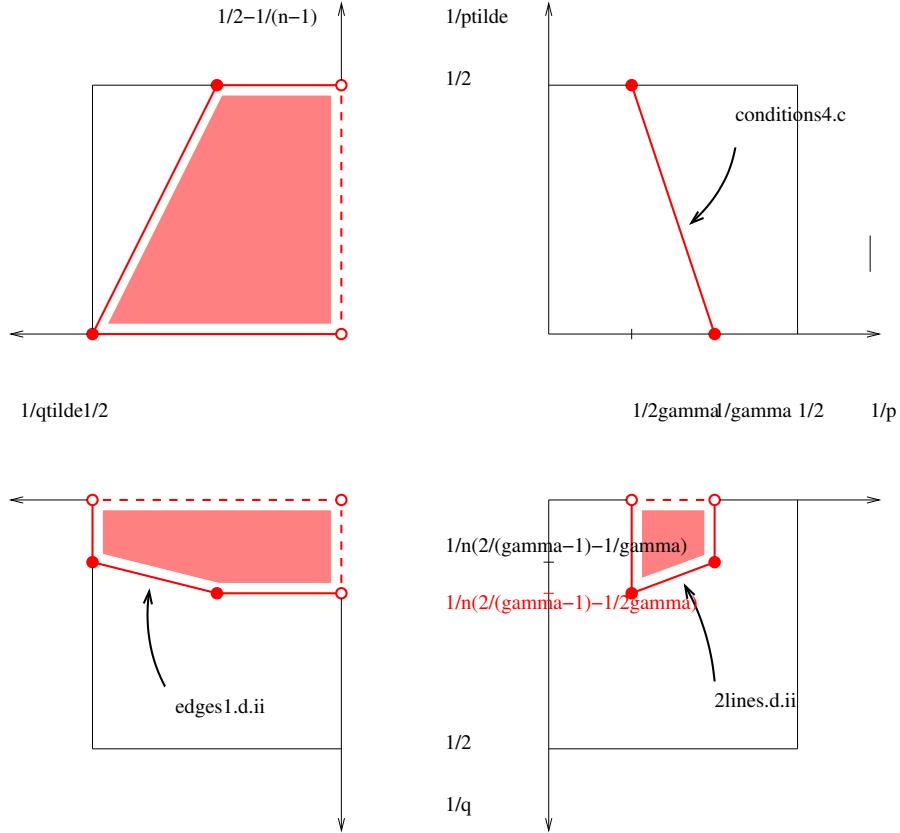


Fig. 3.31: Cas 4 : $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_3$

et

Fig. 3.32: Cas 5 : $\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_4$

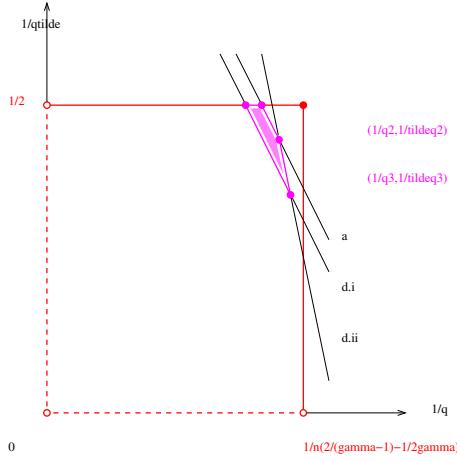
En conséquence, les quatre conditions (3.88.a), (3.88.ã), (3.88.c), (3.88.d.ii) se réduisent de nouveau aux deux conditions (3.93.a), (3.93.d.ii) si $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_3$, et en fait à la seule condition (3.93.d.ii) si $\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_4$, mais cette fois dans le rectangle

$$R = \left(0, \frac{1}{n} \left(\frac{2}{\gamma-1} - \frac{1}{2\gamma}\right)\right] \times \left(0, \frac{1}{2}\right]. \quad (3.97)$$

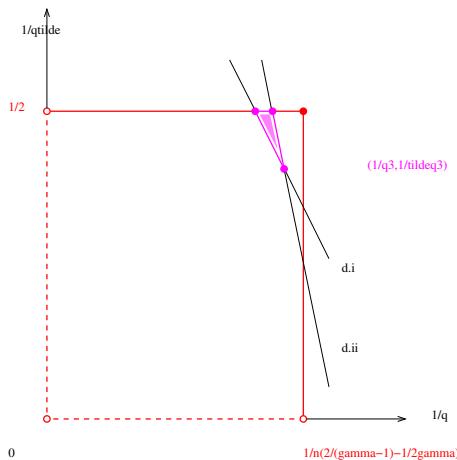
De plus, (3.88.e) est satisfaite, puisque $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{2}{\gamma-1} - \frac{1}{2\gamma}\right) < \frac{1}{\gamma}$.

On conclut de nouveau en examinant les intersections possibles $C \cap R$ de la région convexe définie par (3.88.d.i), (3.93.a), (3.93.d.ii) avec le rectangle (3.97) et en déterminant dans chaque cas la régularité minimale $\sigma = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{p}$.

- Cas 4 : $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_3$

Fig. 3.33: Cas 4 : $\gamma_{\text{conf}} \leq \gamma \leq \gamma_3$

- Cas 5 : $\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_4$

Fig. 3.34: Cas 5 : $\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_4$

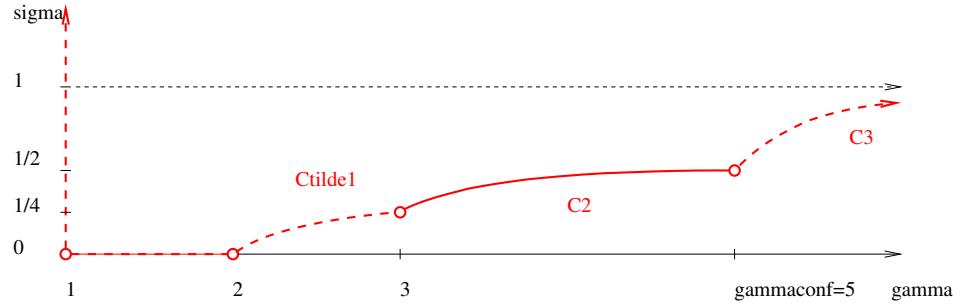
Dans les deux cas, la régularité minimale $\sigma = \sigma_3(\gamma)$ est atteinte quand $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ et $(\frac{1}{q}, \frac{1}{\bar{q}})$ appartiennent aux côtés 1 (3.89.d.ii) et (3.95.d.ii). Voir figures 3.31 et 3.32. Cela conclut la preuve du théorème 3.2.10 pour $\gamma_{\text{conf}} < \gamma \leq \gamma_4$ et $3 \leq n \leq 5$.

Remarque 3.2.12 En dimension $n = 2$, l'énoncé du théorème (3.2.10) est vrai avec (3.72) remplacé par

$$\begin{cases} \sigma = 0^+ & \text{si } 1 < \gamma \leq 2, \\ \sigma = \tilde{\sigma}_1(\gamma)^+ & \text{si } 2 \leq \gamma \leq 3, \\ \sigma = \sigma_2(\gamma) & \text{si } 3 < \gamma < 5, \\ \sigma = \sigma_3(\gamma)^+ & \text{si } 5 \leq \gamma < \infty. \end{cases} \quad (3.98)$$

où $\tilde{\sigma}_1(\gamma) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma}$. Remarquons que la condition $q > \gamma$ n'est pas redondante si $2 < \gamma < 3$ et que c'est en fait la raison de l'existence de la courbe \tilde{C}_1 .

Remarque 3.2.13 En dimension $n = 3$, Metcalfe et Taylor [227] obtiennent une existence globale au delà de $\gamma = \gamma_4$.

Fig. 3.35: Régularité pour GWP sur \mathbb{H}^2

3.3 Perspectives

Les problèmes (NLWM) et (NLKGM) pour des données initiales grandes ont été moins étudiés. La conservation de l'énergie implique immédiatement que pour les non-linéarités $H^1 \times L^2$ sous-critiques pour lequel le théorème d'existence locale s'applique, le temps maximal d'existence est infini. Le comportement en temps grand pour des données initiales grandes de ces solutions a récemment été étudié par Staffilani et Shen dans [272], ils montrent le scattering en dimension $3 \leq n \leq 6$ en utilisant nos estimations de Strichartz améliorées dans [10] et des estimations de Morawetz avec le même type d'amélioration due à la géométrie par rapport au cas euclidien que dans [171] pour Schrödinger. Le cas $H^1 \times L^2$ critique en dimension $3 \leq n \leq 5$ vient d'être traité par Shen [270]. Les autres dimensions restent ouvertes, une première difficulté est que nous ne disposons pas encore d'une théorie locale complète pour toutes les non-linéarités $H^1 \times L^2$ sous-critiques en toute dimension. Essentiellement rien n'est fait dans le cas focalisant pour des données grandes. Rappelons par exemple que dans le cas euclidien pour les ondes $H^1 \times L^2$ critiques, on a grâce aux travaux de Kenig-Merle [188] une bonne compréhension de la dynamique pour des données initiales vérifiant $E(f, g) < E(W, 0)$ où W est la solution stationnaire de (2.28) vue avant. Pour des données vérifiant $\|\nabla f\|_{L^2} < \|\nabla W\|_{L^2}$ il y a existence globale et scattering, pour celles vérifiant $\|\nabla f\|_{L^2} > \|\nabla W\|_{L^2}$ il y a blow-up. Ce travail a par la suite été complété dans ([109],[108],[110]). Le même type de classification dans le cadre de l'équation de Klein-Gordon a été établi par Nakanishi et Schlag [238]. Il serait très intéressant d'étudier ce type de phénomène pour (NLWM) et (NLKGM) sur les espaces hyperboliques et aussi d'autres variétés non-compactes à courbure négative.

D'autre part, j'ai aussi comme projet (en collaboration avec Anker, Meda et Vallarino) d'étudier les propriétés dispersives de l'équation des ondes sur les espaces symétriques de rang quelconque. Les principaux problèmes sont de nature analytique et consistent plus précisément à estimer la solution fondamentale de l'équation des ondes au moyen de la transformation de Fourier sphérique. Au delà de l'équation des ondes elle-même, cette étude a de nombreuses autres applications potentielles en analyse harmonique.

Il n'y a pas de résultats concernant les effets régularisants pour l'équation des ondes et ça reste aussi une question intéressante à étudier.

Comme évoqué avant l'étude des wave maps serait un développement intéressant aussi.

Enfin, parmi d'autres équations dispersives avec une signification géométrique, il serait intéressant d'étudier l'équation de Dirac sur les variétés. Cette équation fait intervenir un Laplacien vectoriel, connecté au Laplacien de Bochner et aussi très étudié en analyse harmonique. J'ai commencé à me familiariser avec ces objets géométriques en étudiant l'équation de Navier-Stokes sur les variétés qui fait aussi intervenir le Laplacien de Bochner. Cela sera l'objet du chapitre suivant.

Appendix A

On regroupe ici certains résultats d'analyse de Fourier sur \mathbb{R} qui sont utilisés dans l'analyse du noyau menée dans le paragraphe 3.2.2.

Lemma A.1. *Considérons l'intégrale oscillante*

$$I(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda a(\lambda) e^{it\phi(\lambda)}$$

où la phase est donnée par

$$\phi(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} - \frac{x\lambda}{t}$$

(avec κ une constante fixe > 0) et l'amplitude $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ a le comportement suivant à l'origine

$$a(\lambda) = O(\lambda^2). \quad (3.99)$$

Alors

$$|I(t, x)| \lesssim \frac{1+|x|}{(1+|t|)^{3/2}} \quad \forall |x| \leq \frac{|t|}{2}.$$

Preuve. Calculons les deux premières dérivées de la phase

$$\phi'(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}} - \frac{x}{t} \quad \text{et} \quad \phi''(\lambda) = \kappa^2 (\lambda^2 + \kappa^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.100)$$

La phase ϕ a une unique point stationnaire :

$$\lambda_0 = \kappa \frac{x}{t} \left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.101)$$

qui reste bornée sous notre hypothèse $|x| \leq \frac{|t|}{2}$:

$$|\lambda_0| \leq \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \leq \kappa. \quad (3.102)$$

Remarquons pour un usage futur que

$$\phi(\lambda_0) = \kappa \left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \phi''(\lambda_0) = \kappa^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Puisque $\phi'' > 0$, on peut effectuer un changement de variable global $\lambda \longleftrightarrow \mu$ sur \mathbb{R} de telle sorte que

$$\phi(\lambda) - \phi(\lambda_0) = \mu^2.$$

Plus précisément, on a

$$\mu = \epsilon(\lambda) (\lambda - \lambda_0),$$

où

$$\epsilon(\lambda) = \left\{ \int_0^1 ds (1-s) \phi''((1-s)\lambda_0 + s\lambda) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

De cette manière, notre intégrale oscillante devient

$$I(t, x) = e^{it\phi(\lambda_0)} \int_{\mathbb{R}} d\mu \tilde{a}(\mu) e^{(-1+it)\mu^2}, \quad (3.103)$$

où

$$\tilde{a}(\mu) = \frac{d\lambda}{d\mu} a(\lambda(\mu)) e^{\mu^2}$$

est de nouveau une fonction régulière à support compact dont les dérivées sont bornées uniformément en t et x , tant que $|x| \leq \frac{|t|}{2}$. En utilisant la formule de Taylor, on peut développer

$$\tilde{a}(\mu) = \sum_{j=0}^3 \tilde{a}_j \mu^j + \tilde{a}_4(\mu) \mu^4,$$

où

$$\tilde{a}_0 = \left(\frac{2}{\phi''(\lambda_0)} \right)^{\frac{1}{2}} a(\lambda_0) = O(\lambda_0^2) = O\left(\frac{x^2}{t^2}\right),$$

les autres constantes $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ et la fonction $\tilde{a}_4(\mu)$, ainsi que ses dérivées sont bornées uniformément en t et x . On a alors la somme

$$I(t, x) = \sum_{j=0}^4 I_j(t, x),$$

où

$$I_j(t, x) = \tilde{a}_j e^{it\phi(\lambda_0)} \int_{\mathbb{R}} d\mu \mu^j e^{(-1+it)\mu^2} \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

et

$$I_4(t, x) = e^{it\phi(\lambda_0)} \int_{\mathbb{R}} d\mu \tilde{a}_4(\mu) \mu^4 e^{(-1+it)\mu^2}.$$

La première et la troisième intégrale peuvent se traiter par de l'intégration complexe élémentaire :

$$\begin{aligned} I_0(t, x) &= \tilde{a}_0 \sqrt{\pi} e^{it\phi(\lambda_0)} (1-it)^{-\frac{1}{2}} = O\left(\frac{x^2}{t^2} (1+|t|)^{-\frac{1}{2}}\right) = O\left(\frac{1+|x|}{(1+|t|)^{3/2}}\right), \\ I_2(t, x) &= \tilde{a}_2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{it\phi(\lambda_0)} (1-it)^{-\frac{3}{2}} = O((1+|t|)^{-3/2}). \end{aligned}$$

Les intégrales $I_1(t, x)$ et $I_3(t, x)$ sont nulles par imparité. L'intégrale $I_4(t, x)$ est clairement bornée par l'intégrale convergente

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu \mu^4 e^{-\mu^2}.$$

Pour améliorer ces estimations quand t est grand, on peut séparer,

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu = \int_{|\mu| \leq |t|^{-1/2}} d\mu + \int_{|\mu| > |t|^{-1/2}} d\mu.$$

La première intégrale s'estime facilement en utilisant que $\tilde{a}_4(\mu)$ est uniformément borné :

$$\left| \int_{|\mu| \leq |t|^{-1/2}} d\mu \tilde{a}_4(\mu) \mu^4 e^{(-1+it)\mu^2} \right| \lesssim \int_{|\mu| \leq |t|^{-1/2}} d\mu \mu^4 \lesssim |t|^{-\frac{5}{2}}.$$

Après deux intégrations par parties utilisant $\mu e^{(-1+it)\mu^2} = -\frac{1}{2(1-it)} \frac{\partial}{\partial \mu} e^{(-1+it)\mu^2}$, la deuxième intégrale s'estime par

$$|t|^{-\frac{5}{2}} + |t|^{-2} \int_{\mathbb{R}} d\mu (1+|\mu|)^2 e^{-\mu^2}.$$

En regroupant,

$$I_4(t, x) = O((1+|t|)^{-2})$$

et cela conclut la démonstration du Lemma A.1.

Lemma A.2. *Considérons l'intégrale oscillante*

$$J(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda a(\lambda) e^{it\phi(\lambda)}$$

où la phase est de nouveau donnée par

$$\phi(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} - \frac{x\lambda}{t}$$

et l'amplitude $a(\lambda)$ est maintenant un symbole (à tout ordre) sur \mathbb{R} , qui s'annule sur l'intervalle $[-\kappa, \kappa]$. Alors

$$J(t, x) = O(|t|^{-\infty}) \quad \forall 0 \leq |x| \leq \frac{|t|}{2}.$$

Preuve. Selon (3.100), (3.101) et (3.102),

- ϕ a un unique point stationnaire $\lambda_0 \in [-\frac{\kappa}{\sqrt{3}}, \frac{\kappa}{\sqrt{3}}]$, qui reste loin du support de a ,
- $|\phi'(\lambda)| = \left| \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}} - \frac{x}{t} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} > 0$ on $\text{supp } a$,
- ϕ'' est un symbole d'ordre -3 .

On peut alors effectuer plusieurs intégration par parties basées sur

$$e^{it\phi(\lambda)} = \frac{1}{it\phi'(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{it\phi(\lambda)}$$

pour aboutir à la conclusion.

4. L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES EN COURBURE NÉGATIVE

Le but de ce chapitre est de présenter mon résultat [250] concernant l'étude du système de Navier-Stokes incompressible sur une variété riemannienne non-compacte à courbure négative. On va commencer par rappeler brièvement quelques résultats connus dans le cadre euclidien.

4.1 Les équations de Navier-Stokes sur \mathbb{R}^n

Ces équations décrivent le mouvement d'un fluide visqueux incompressible à densité constante, les inconnues sont la vitesse du fluide $u : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ qui est un champ de vecteur dépendant du temps et la pression du fluide $p : \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est un scalaire. Le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \text{grad } p = \nu \Delta u, \\ \text{div } u = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

La vitesse est à divergence nulle à cause de l'hypothèse d'incompressibilité, le coefficient de viscosité ν (qui est l'inverse d'un nombre de Reynolds lorsque le système est écrit en variables adimensionnées) est strictement positif puisque le fluide est supposé visqueux. Sans perte de généralité, on prendra $\nu = 1$ dans la suite. En coordonnées cartésiennes, les différents opérateurs apparaissant dans le système s'écrivent : pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$((u \cdot \nabla) u)^j = (\nabla_u u)^j = u^i \partial_i u^j, \quad \text{div } u = \partial_i u^i, \quad (\text{grad } p)^j = \partial_j p, \quad (\Delta u)^j = \partial_{ii} u^j.$$

où la somme est sur i . Notons que dans un tel système de coordonnées, la i -ème coordonnée du Laplacien vectoriel est simplement le Laplacien scalaire agissant sur la i -ème coordonnée du champ de vecteur.

On va de nouveau s'intéresser au problème de Cauchy, on ajoute au système la condition initiale $u|_{t=0} = u_0$, avec u_0 un champ de vecteur à divergence nulle.

Il y a plusieurs notions classiques de solutions. Notons que formellement, une solution assez régulière du système vérifie l'identité d'énergie

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = 0$$

qui traduit la dissipation de l'énergie cinétique du fluide. Les solutions faibles ou solutions de Leray ([209], [165]) de l'équation de Navier-Stokes sont basées sur cette identité : pour des données initiales L^2 , il existe une solution faible globale de l'équation avec la régularité $u \in L_T^\infty L^2 \cap L_T^2 H^1$. Ces solutions vérifient l'inégalité d'énergie (on a égalité seulement en dimension 2)

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Cette construction a pu être généralisée dans un cadre L^2 uniformément local. Les questions difficiles pour ce type de solutions sont l'unicité et la régularité. En dimension 2, les solutions de

Leray sont uniques et si les données initiales sont plus régulières (H^s , $s > 0$ par exemple) alors cette régularité supplémentaire est conservée pour tout temps. En dimensions supérieures, ces questions sont largement ouvertes, on peut citer par exemple les travaux [49], [211], [216], [123], [117]) pour des résultats partiels.

En raison de ce problème d'unicité, il est naturel d'essayer de construire des solutions plus fortes de l'équation. Cela a été initié par Fujita-Kato [122] en récrivant le système de Navier-Stokes comme une équation d'évolution parabolique semi-linéaire et en utilisant une méthode de point fixe assez similaire à celle déjà décrite dans le cadre des équations dispersives semilinéaires. Les estimations de Strichartz étant remplacées par les estimations dispersives et régularisantes paraboliques. Pour cela il faut éliminer la pression dans le système, un moyen de le faire est d'utiliser la décomposition de Hodge dans \mathbb{R}^n , pour tout champ de vecteur $u \in L^2$, on a la décomposition orthogonale unique

$$u = v + \operatorname{grad} q, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v = \mathbb{P}u, \quad (4.2)$$

où \mathbb{P} est le projecteur de Leray sur les champs de vecteur à divergence nulle. Formellement, si (u, p) est solution de Navier-Stokes, en appliquant le projecteur \mathbb{P} , on obtient

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -\mathbb{P}(u \cdot \nabla u), \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

En utilisant le semigroupe de la chaleur et la formule de Duhamel, on obtient,

$$u(t, \cdot) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) ds.$$

On s'est donc ramené à un problème de point fixe. Cette approche initiée par Kato permet de montrer que le problème de Cauchy est localement bien posé (globalement à données petites) dans des espaces critiques. Les espaces critiques c'est à dire invariants par le changement d'échelle de l'équation (si u est solution, alors $u^\lambda = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est aussi solution) sont les espaces naturels pour résoudre l'équation par la méthode de point fixe. Les principaux résultats dans ce cadre sont $\dot{H}^{-1+\frac{n}{2}} \subset L^n \subset \dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{n}{p}} \subset BMO^{-1}$, obtenus par [122], [133], [182], [312], [50], [254], [201], [17]. On peut montrer que le plus gros espace critique possible est l'espace de Besov $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$, mais le problème de Cauchy est mal posé dans cet espace [40]. Dans ce cadre là, on ne sait montrer que les solutions sont globales que lorsque les données sont petites, cependant il y a des résultats globaux pour des classes de données initiales qui sont grandes dans tous les espaces ci-dessus. Ces résultats utilisent la structure du terme non-linéaire (par exemple [207], [1], [59]).

Dans le prolongement de mes investigations autour des équations d'évolution sur les variétés non-compactes à courbure négative M , je vais présenter mon résultat [250] concernant l'équation de Navier-Stokes sur M . Comme l'inconnue de l'équation de Navier-Stokes est un champ de vecteur, l'écriture même de l'équation nécessite des objets géométriques un peu plus sophistiqués que seulement l'opérateur de Laplace-Beltrami comme cela a été le cas jusqu'à présent, on a en particulier besoin d'un Laplacien agissant sur les champs de vecteurs.

Du point de vue de l'analyse, les nouvelles difficultés viennent d'une part de trouver une bonne formulation du système en éliminant la pression ; on ne peut pas utiliser la décomposition (4.2), qui n'est pas vraie en général sur les variétés qui possèdent des 1-formes harmoniques L^2 non triviales. En effet, en dimension 2, la présence de tels objets est une cause de non unicité de solutions des équations de Navier-Stokes (comme remarqué sur l'espace hyperbolique de dimension 2 par [86], [193]). D'autre part, pour construire des solutions par la méthode de Kato, il nous faut décrire les propriétés dispersives et de régularisation de la partie linéaire de l'équation de Navier-Stokes. Lorsque la courbure de Ricci de M est constante, on peut se ramener à l'équation de la chaleur vectorielle en éliminant la pression. Pour cette équation l'obtention de

telles estimations a un intérêt en lui même en analyse harmonique et constitue une direction de recherche très active (voir par exemple [210], [8], [7], [148], [218], [241], [305], [54], [69], [16], [243], [19] et d'autres). On est parvenu à établir une approche générale pour obtenir des estimations dispersives et de régularisation, sous des hypothèses géométriques sur M , sans devoir recourir à la description explicite du noyau, qui n'est pas en général disponible. L'influence de la courbure négative se manifeste dans les estimations obtenus par une décroissance exponentielle en temps grand, qui est bien meilleure que dans le cas euclidien.

Lorsque la courbure de Ricci de M n'est pas constante, le problème de Stokes ne se ramène pas simplement à une équation de la chaleur vectorielle. Visiblement la situation devient encore plus compliquée. On a quand même réussi à étudier ce problème en le traitant comme une perturbation du cas précédent sous hypothèses appropriées sur les données initiales.

En ce qui concerne la résolution du problème non-linéaire, l'application de nos estimations dans la stratégie de Kato, nous a permis de retrouver des résultats d'existence et unicité analogues au cas euclidien. Cela, malgré l'absence de scaling de l'équation de Navier-Stokes sur M , semble en accord avec l'intuition que l'indice de régularité critique pour qu'un problème non-linéaire soit localement bien posé, ne peut pas être meilleur que \mathbb{R}^n .

Avant de présenter la bonne généralisation de l'équation, on va donc commencer par rappeler quelques définitions et propriétés utiles de géométrie riemannienne.

4.2 Quelques rappels de géométrie riemannienne

On va rappeler dans ce paragraphe les principaux objets de géométrie riemannienne qui nous seront utiles. Pour plus de détails on réfère par exemple à des textes classiques de géométrie riemannienne [128],[174].

4.2.1 Connections

On considère (M, g) une variété riemannienne, on utilisera la notation ∇ pour la connection de Levi-Civita :

$$\begin{aligned}\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

où $\Gamma(TM)$ est l'ensemble des champs de vecteur sur M . La propriété cruciale de cette connection est sa compatibilité avec la métrique : pour tout champs de vecteurs X, Y, Z , on a

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (4.4)$$

Pour $X \in \Gamma(TM)$, on peut étendre ∇_X à des tenseurs de type (p, q) en demandant que

- i) $\nabla_X(c(S)) = c(\nabla_X S)$ pour toute contraction c ,
- ii) $\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T$

avec la convention que dans le cas d'une fonction f , $\nabla_X f = X \cdot f$. En particulier, on obtient pour $S \in \Gamma(\bigotimes^p TM \otimes^q T^* M)$ que

$$(\nabla_X S)(X_1, \dots, X_q) = \nabla_X(S(X_1, \dots, X_q)) - S(\nabla_X X_1, \dots, X_q) - \dots - S(X_1, \dots, \nabla_X X_q).$$

On peut alors définir la dérivée covariante ∇ sur les champs de tenseurs $S \in \Gamma(\bigotimes^p TM \otimes^q T^* M)$ par la formule

$$\nabla S(X, X_1, \dots, X_q) = (\nabla_X S)(X_1, \dots, X_q),$$

ainsi $\nabla S \in \Gamma(\bigotimes^p TM \otimes^{q+1} T^* M)$.

4.2.2 Courbures

On va utiliser les définitions classiques suivantes pour les différents tenseurs de courbure.

Le tenseur de courbure est défini par

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z) + \nabla_{[X, Y]}Z, \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad (4.5)$$

le tenseur de courbure de Riemann est donné par

$$\text{Riem}(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T), \quad \forall X, Y, Z, T \in \Gamma(TM) \quad (4.6)$$

et le tenseur de courbure de Ricci est défini par

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \text{Riem}(X, e_i, Y, e_i), \quad (4.7)$$

pour une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) .

La notion de courbure sectionnelle sera aussi utilisée. Pour tout $(X, Y) \in (T_x M)^2$, on définit la courbure sectionnelle du plan (X, Y) par

$$\kappa(X, Y) = \frac{\text{Riem}(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

4.2.3 Métrique sur les tenseurs

Rappelons d'abord les isomorphismes "musicaux" : pour une 1-forme ω , on associe le champ de vecteur ω^\sharp défini par

$$g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y), \quad \forall Y \in \Gamma(TM)$$

et pour un champ de vecteur X , on associe la 1-forme X^\flat donnée par

$$X^\flat(Y) = g(X, Y), \quad \forall Y \in \Gamma(TM).$$

Le gradient riemannien est alors défini par

$$\text{grad } p = (dp)^\sharp.$$

Plus généralement, pour un tenseur $T \in \Gamma(\otimes^p TM \otimes^q T^*M)$, on a

$$\begin{aligned} T^\sharp &= C_1^2(g^{-1} \otimes T) \in \Gamma(\otimes^{p+1} TM \otimes^{q-1} T^*M), \\ T^\flat &= C_2^1(g \otimes T) \in \Gamma(\otimes^{p-1} TM \otimes^{q+1} T^*M). \\ \text{div } T &= C_1^1 \nabla T \in \Gamma(\otimes^{p-1} TM \otimes^q T^*M) \end{aligned}$$

avec C_j^i la contraction entre les indices i et j pour les tenseurs.

On peut définir une métrique sur les 1-formes en posant

$$g(\omega, \eta) := g(\omega^\sharp, \eta^\sharp), \quad \forall \omega, \eta \in \Gamma(T^*M)$$

et on peut ensuite étendre cette définition à des champs de tenseurs généraux dans $\Gamma(\otimes^p TM \otimes^q T^*M)$ en posant

$$g := (\otimes^p g) \otimes (\otimes^q g).$$

En coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) , pour $T, S \in \Gamma(\otimes^p TM \otimes^q T^*M)$, c'est à dire

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q},$$

$$S = S_{j_1 \dots j_q}^{i'_1 \dots i'_p} \partial_{x^{i'_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i'_p}} \otimes dx^{j'_1} \otimes \dots \otimes dx^{j'_q},$$

on obtient l'expression

$$g(T, S) = g_{i_1 i'_1} \cdots g_{i_p i'_p} g^{j_1 j'_1} \cdots g^{j_q j'_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}.$$

On utilisera aussi pour les tenseurs la notation

$$|T|^2 = g(T, T). \quad (4.8)$$

Cela permet de définir des espaces de Sobolev sur les tenseurs avec les normes données par

$$\|T\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq k \leq m} \int_M g(\nabla^k T, \nabla^k T)^{\frac{p}{2}} dvol \right)^{\frac{1}{p}}, \quad W^{m,2} = H^m.$$

4.2.4 Coordonnées normales

Pour calculer des objets géométriques intrinsèques en coordonnées locales, il est très souvent utile d'utiliser les coordonnées normales : au voisinage de tout point m_0 , il existe un système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) tel que au point m_0 les coordonnées de la métrique riemannienne et les coefficients de Christoffel vérifient

$$g_{ij}(m_0) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(m_0) = 0. \quad (4.9)$$

4.2.5 Quelques formules géométriques utiles

Lemma 4.2.1 (Inégalité de Kato) *Pour tout champ de vecteur u , on a*

$$|\nabla|u|| \leq |\nabla u|. \quad (4.10)$$

Preuve. On va montrer cette inégalité pour illustrer l'utilisation des coordonnées normales. Soit $m \in M$, on va montrer cette inégalité au point m en travaillant dans un système de coordonnées normales centré au point m . Posons $e_i = \partial/\partial x^i = \partial_i$, (e_1, \dots, e_n) est alors une base orthonormée au point m . En utilisant (4.9) et Cauchy-Schwarz on a d'une part que

$$|\nabla(|u|^2)|^2_m = \sum_i (\partial_i |u|^2)^2_m = 4 \sum_i g(\nabla e_i u, u)^2_m \leq 4 |\nabla u|^2_m |u|^2_m,$$

et d'autre part que

$$|\nabla(|u|^2)|^2_m = 4 |(\nabla(|u|))|u||^2_m,$$

de telle sorte que l'on obtient

$$|(\nabla(|u|))|u||^2_m \leq |\nabla u|^2_m |u|^2_m$$

ce qui donne le résultat.

On va noter Δ_g l'opérateur de Laplace Beltrami et $\vec{\Delta}$ le Laplacien de Bochner,

$$\vec{\Delta} u = -\nabla^* \nabla u = \text{Tr}_g(\nabla^2 u) \quad (4.11)$$

où ∇^* est l'adjoint formel de ∇ pour le produit scalaire L^2 et

$$\text{Tr}_g(\nabla^2 u) = g^{ij} \nabla^2 u(e_i, e_j)$$

en coordonnées locales.

Une identité géométrique particulièrement utile (en particulier on l'utilisera pour obtenir l'identité d'énergie pour l'équation de Navier-Stokes sur une variété) est la formule de Bochner :

Lemma 4.2.2 Pour tout champ de vecteur u , on a l'identité de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta_g(g(u, u)) = g(\vec{\Delta}u, u) + g(\nabla u, \nabla u). \quad (4.12)$$

Remarquons qu'au membre de droite, le produit scalaire $g(\nabla u, \nabla u)$ est le produit scalaire sur les tenseurs de type $(1, 1)$ défini précédemment.

Preuve. Pour montrer cette formule, on calcule chaque terme en coordonnées normales au point m pour tout m . De nouveau, en posant $e_i = \partial/\partial x^i = \partial_i$, on a que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée au point m . En utilisant les propriétés (4.9) des coordonnées normales au point m , on a

$$(\vec{\Delta}u)_{/m} = (\nabla_{e_i, e_i}^2 u)_{/m} = (\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i} u))_{/m}$$

ce qui donne en utilisant (4.4)

$$g(\vec{\Delta}u, u)_{/m} = \left(\partial_i(g(\nabla_{e_i} u, u)) - g(\nabla_{e_i} u, \nabla_{e_i} u) \right)_{/m}$$

et donc

$$\left(g(\vec{\Delta}u, u) + g(\nabla u, \nabla u) \right)_{/m} = \left(\partial_i(g(\nabla_{e_i} u, u)) \right)_{/m}$$

en utilisant de nouveau (4.9). Pour conclure, on peut observer que

$$g(\nabla_{e_i} u, u) = \frac{1}{2}\partial_i(g(u, u))$$

de nouveau grâce à (4.4) et donc que

$$(\partial_i(g(\nabla_{e_i} u, u)))_{/m} = \frac{1}{2}(\partial_i^2(g(u, u)))_{/m} = \frac{1}{2}\Delta_g(g(u, u))_{/m}.$$

4.2.6 Analyse fonctionnelle sur les variétés non-compactes

On va considérer des variétés riemanniennes M lisses, complètes, non-compactes et simplement connexes de dimension $n \geq 2$. On supposera de plus que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- **(H1)** $|R| + |\nabla R| + |\nabla^2 R| \leq K$;
- **(H2)** $-\frac{1}{c_0}g \leq \text{Ric} \leq -c_0g$, avec $c_0 > 0$;
- **(H3)** $\kappa \leq 0$;
- **(H4)** $\inf_{x \in M} r_x > 0$;

où R est le tenseur de courbure, Ric est le tenseur de courbure de Ricci, κ est la courbure sectionnelle définis avant et r_x dénote le rayon d'injectivité de l'application exponentielle au point x .

Remarque 4.2.1 Ces hypothèses ont plusieurs conséquences importantes qui seront cruciales dans la suite.

1. $C_c^\infty(M)$ est dense dans $H^1(M)$, (see [156]);
2. D'après Varopoulos [305], (voir aussi [156]) les inégalités de Sobolev sont vérifiées. En particulier l'inégalité

$$\eta_n \|f\|_{L^{2^*}(M)}^2 \leq \|\nabla f\|_{L^2(M)}^2, \quad \forall f \in H^1(M)$$

est vérifiée pour une constante $\eta_n > 0$, et $2^* = 2n/(n-2)$ si $n \geq 3$, 2^* arbitraire dans $(2, +\infty)$ si $n = 2$.

3. En dimension $n = 2$, on a aussi l'injection continue $W^{1,1}(M) \subset L^2(M)$, donc il existe $C > 0$ tel que

$$\|f\|_{L^2(M)}^2 \leq C (\|\nabla f\|_{L^1(M)} + \|f\|_{L^1(M)}) .$$

En utilisant cette inégalité avec $f = |g|^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante

$$\|g\|_{L^4(M)}^4 \leq C \left(\|\nabla g\|_{L^2(M)}^2 \|g\|_{L^2(M)}^2 + \|g\|_{L^2(M)}^4 \right) .$$

4. D'après Setti [266], (voir aussi [222]) l'inégalité de Poincaré

$$\delta_n \|f\|_{L^2(M)}^2 \leq \|\nabla f\|_{L^2(M)}^2, \quad \forall f \in H^1(M)$$

est vérifiée pour $\delta_n \geq [c_0 - (n-1)(n-2)\kappa^*]/4 > 0$, avec $\kappa^* = \sup_M \kappa$.

Remarque 4.2.2 Un exemple important de variété riemannienne non-compacte pour lesquelles nos hypothèses (**H1-4**) sont vérifiées est celui des espaces hyperboliques réels $M = \mathbb{H}^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, déjà introduits dans le paragraphe 1.2. En effet, en prenant la définition

$$\mathbb{H}^n = \{\Omega = (\tau, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \Omega = (\cosh r, \omega \sinh r), r \geq 0, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\} ,$$

la métrique g étant

$$g = dr^2 + (\sinh r)^2 d\omega^2$$

avec $d\omega^2$ la métrique canonique sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} , le tenseur de courbure de Ricci est constant, $\text{Ric} = \kappa(n-1)g$ avec κ , la courbure sectionnelle qui vaut $\kappa = -1$. En fait le tenseur de courbure est

$$R(X, Y)Z = \kappa R_0(X, Y)Z, \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(T\mathbb{H}^n)$$

avec $R_0(X, Y)Z := g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$ (ce qui implique que $\nabla R = 0$) et donc le tenseur de Riemann est

$$\text{Riem}(X, Y, Z, T) = kg(R_0(X, Y)Z, T) = -[g(X, Z)g(Y, T) - g(Y, Z)g(X, T)] .$$

Les hypothèses (**H1-4**) sont aussi vérifiées par plusieurs autres exemples classiques comme certains espaces de Damek-Ricci et tous les espaces symétriques de type non-compact, introduits dans le paragraphe 1 (voir [89], [303], [159], [115] par exemple).

4.3 L'équation de Navier-Stokes sur les variétés

La forme générale de l'équation de Navier-Stokes sur une variété riemannienne (M, g) est

$$\partial_t u + \nabla_u u + \text{grad } p = \nu L u, \quad \text{div } u = 0,$$

où la partie diffusive dépend de l'opérateur L . Les inconnues (u, p) sont telles que la vitesse $u(t, \cdot) \in \Gamma(TM)$ est un champ de vecteur sur M et la pression $p(t, \cdot)$ est une fonction à valeurs réelles. Au membre de gauche, tous les termes ont une définition naturelle. En effet, $\nabla_u u \in \Gamma(TM)$ est la dérivée covariante de u dans la direction u et $\text{grad } p$ est le gradient riemannien de la pression. On peut remarquer que puisque u est à divergence nulle, on a aussi l'identité suivante

$$\nabla_u u = \text{div}(u \otimes u). \tag{4.13}$$

Pour définir le Laplacien vectoriel L , il faut faire un choix. En effet, il n'y a pas de définition canonique d'un Laplacien agissant sur les champs de vecteur sur une variété riemannienne : il y

a au moins deux candidats naturels pour jouer le rôle d'opérateur de Laplace, le Laplacien de Bochner et le Laplacien de Hodge. D'après [112], [293] (voir aussi [258], [229]), la formulation correcte de Navier-Stokes est obtenue en introduisant le tenseur des contraintes. Rappelons que sur \mathbb{R}^n , avec $\operatorname{div} u = 0$, on a

$$Lu = \operatorname{div}(\nabla u + \nabla u^t) = \Delta u.$$

La généralisation naturelle sur M est de prendre

$$Lu = \operatorname{div}(\nabla u + \nabla u^t)^\sharp \in \Gamma(TM).$$

Puisque u est à divergence nulle, on peut exprimer L de la manière suivante

$$Lu = \overrightarrow{\Delta} u + r(u),$$

où r est l'opérateur de Ricci qui est relié au tenseur de courbure de Ricci par

$$r(u) = (\operatorname{Ric}(u, \cdot))^\sharp \in \Gamma(TM).$$

En utilisant la formule de Weitzenbock sur les 1-formes, on a

$$\Delta_H u^\flat = \nabla^* \nabla u^\flat + \operatorname{Ric}(u, \cdot), \quad (4.14)$$

où $\Delta_H = d^* d + dd^*$ est le Laplacien de Hodge sur les 1-formes. On peut donc exprimer L avec le Laplacien de Hodge :

$$Lu = (-\Delta_H u^\flat + 2 \operatorname{Ric}(u, \cdot))^\sharp. \quad (4.15)$$

On va étudier le problème de Cauchy pour l'équation de Navier-Stokes incompressible sur M (avec $\nu = 1$ sans perte de généralité)

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla_u u + \operatorname{grad} p = \overrightarrow{\Delta} u + r(u), \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in \Gamma(TM). \end{cases} \quad (4.16)$$

En utilisant la structure de ce système et **(H2)**, on obtient qu'une solution suffisamment régulière satisfait l'inégalité d'énergie suivante

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 + c_0 \|u(s)\|_{L^2}^2) ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (4.17)$$

Cela s'obtient en prenant le produit scalaire par u , en intégrant sur M et en intégrant par parties en utilisant l'identité de Bochner (4.2.2). Comme l'identité d'énergie est vérifiée, il semble naturel de construire des solutions faibles qui vérifient une inégalité d'énergie. Evidemment, on s'attend à rencontrer au minimum les mêmes difficultés que dans le cas euclidien (par exemple le problème d'unicité en dimension supérieure à 3). Il est donc aussi naturel d'essayer de construire des solutions à la Kato. Dans les deux cas, il faut être très prudent dans le choix fait pour éliminer la pression. En effet dans le cas de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , on a vu que l'on pouvait éliminer la pression p en utilisant la projections de Leray-Hopf qui est reliée à la décomposition de Hodge unique rappelée avant. Cela soulève des difficultés sur une variété riemannienne car la décomposition de Kodaira-Hodge des 1-formes sur les variétés complètes est sous la forme

$$L^2(\Gamma(T^*M)) = \overline{\operatorname{Image} d} \oplus \overline{\operatorname{Image} d^*} \oplus \mathcal{H}^1(M)$$

où $\mathcal{H}^1(M)$ est l'espace des 1-formes harmoniques L^2 (voir [202]). Cet espace peut être non vide et cela peut donc poser des problèmes pour l'unicité, même en dimension 2 ou pour des solutions

très régulières. Ceci a été remarqué dans [86], [193] sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 . Rappelons brièvement la construction de [193] qui conduit à un exemple de non unicité. Le champ de vitesse est pris sous la forme

$$u = f(t)(d\Phi)^\sharp \quad (4.18)$$

où Φ est une fonction harmonique telle que $d\Phi$ est une 1-forme L^2 non triviale et f est une fonction du temps à choisir. Ce choix utilise donc que dans le cas de \mathbb{H}^2 , $\mathcal{H}^1(\mathbb{H}^2)$ est non-trivial et contient des 1-formes exactes. Notons qu'en utilisant, la forme de L (4.15) donnée par la formule de Weitzenböck et le fait que la courbure de Ricci de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 est $-g$, on a

$$Lu = -2f(t)(d\Phi)^\sharp$$

et que d'autre part, on a aussi

$$\nabla_u u = \frac{1}{2}f(t)^2 \operatorname{grad}(|d\Phi|)^\sharp$$

(cette dernière identité peut se retrouver facilement en utilisant des coordonnées normales), on trouve donc que pour que u soit solution de Navier-Stokes, il suffit que la pression p soit donnée par

$$p = (-2f(t) - f'(t))\Phi - \frac{1}{2}f(t)^2|d\Phi|^2. \quad (4.19)$$

L'inégalité d'énergie est satisfaite pour toute fonction f satisfaisant

$$\frac{d}{dt}f(t)^2 + 4f(t)^2 \leq 0.$$

Cela ne suffit pas à déterminer f de manière unique avec la seule prescription de $f(0)$.

Il y a donc un choix à faire pour sélectionner la pression. Dans le cadre des solutions faibles, un cadre approprié de fonctions tests a été introduit récemment dans [87]. Une autre possibilité, aussi appropriée au cadre des solutions de Kato est liée à la remarque suivante. Si (u, p) est une solution régulière de Navier-Stokes (4.16), en prenant la divergence de l'équation et en utilisant que $\operatorname{div} u = 0$, on obtient que

$$\Delta_g p + \operatorname{div}[\nabla_u u] - 2 \operatorname{div}(ru) = 0. \quad (4.20)$$

Pour obtenir cela, on a utilisé que $\operatorname{div}(\vec{\Delta} u) = \operatorname{div}(ru)$ si $\operatorname{div} u = 0$, ce qui découle de la formule de Weitzenböck (4.14). Comme l'opérateur de Laplace-Beltrami est un isomorphisme $\Delta_g : W^{2,p} \rightarrow L^p$ sous nos hypothèses (**H1-4**) (voir [218], [280]) pour $2 \leq p < \infty$, on choisira toujours la solution $-\Delta_g^{-1}(\operatorname{div}[\nabla_u u] - 2 \operatorname{div}(ru))$ de l'équation elliptique (4.20). En introduisant la notation,

$$\mathbb{P} = I + \operatorname{grad}(-\Delta_g)^{-1} \operatorname{div},$$

l'équation de Navier-Stokes avec ce choix fait sur la pression s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u - \vec{\Delta} u - r(u) + 2 \operatorname{grad}(-\Delta_g)^{-1} \operatorname{div}(ru) = -\mathbb{P}[\nabla_u u], \\ \operatorname{div} u_0 = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in \Gamma(TM). \end{cases} \quad (4.21)$$

Ce choix permet de retrouver l'unicité des solutions faibles en dimension 2. En effet, prenons la définition :

Définition 4.3.1 Pour tout champ de vecteur à divergence nulle $u_0 \in L^2\Gamma(TM)$, on dit que $u \in L_T^\infty L^2 \cap L_T^2 H^1$ est une solution faible de Leray avec donnée initiale u_0 si pour toute fonction test $\phi \in C_c^1(\overline{\mathbb{R}_+} \times M, TM)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+ \times M} \left(g(u, \partial_t \phi) + g(u \otimes u, \nabla \phi) + p \operatorname{div} \phi - g(\nabla u, \nabla \phi) + g(ru, u) \right) dV_g dt \\ & \quad + \int_M g(u_0, \phi(0, \cdot)) dV_g = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

où $p \in L_T^2 L^2$ est la solution unique de l'équation elliptique (4.20).

On peut alors montrer

Théorème 4.3.1 Supposons que M est une variété de dimension 2 complète, simplement connexe, non-compakte qui satisfait (**H1-4**). Alors, pour tout champ de vecteur à divergence nulle u_0 , il existe une unique solution faible de Leray.

Notons que la régularité L^2 que l'on impose à la pression est compatible avec la régularité de la vitesse puisque par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on a

$$\|u \otimes u\|_{L_T^2 L^2} \leq C(\|u\|_{L_T^\infty L^2} \|\nabla u\|_{L_T^2 L^2} + T^2 \|u\|_{L_T^\infty L^2}^2).$$

Ainsi $\operatorname{div}(\operatorname{div}(u \otimes u)) \in L_T^2 H^{-2}$ et puisque $\Delta_g : L^2 \rightarrow H^{-2}$ est un isomorphisme, il existe une unique solution p de (4.20) telle que $p \in L_T^2 L^2$.

On peut tester ce critère sur les solutions sous la forme (4.18) où la pression est donnée par (4.19). Puisque Φ n'appartient pas à L^2 alors que $d\Phi \in L^2 \cap L^\infty$, on voit qu'imposer p dans L^2 implique que $f' + 2f = 0$ pour tout t et donc f est entièrement déterminée par sa valeur initiale $f(0)$.

On va maintenant plutôt s'intéresser aux solutions à la Kato de l'équation de Navier-Stokes. Un élément clé pour construire ces solutions par la méthode de point fixe est d'établir des estimations dispersives et de régularisation pour le problème linéaire associé. Nous allons discuter ces estimations dans le paragraphe suivant.

4.4 Estimations dispersives et de régularisation

4.4.1 Le cas des équations de la chaleur vectorielles

On étudie le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur associée au Laplacien de Bochner sur les champs de vecteur :

$$\begin{cases} \partial_t u = \vec{\Delta} u + r(u), \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in \Gamma(TM). \end{cases} \quad (4.23)$$

On s'intéresse aux estimations dispersives et de régularisation pour le semigroupe associé à cette équation vectorielle (4.23) sur des variétés M de dimension $n \geq 2$ satisfaisant les hypothèses (H1-4). Ces estimations sont reliées au comportement du noyau de la chaleur qui est bien étudié dans la littérature pour divers types de variété à la fois pour le Laplace-Beltrami et le Laplacien de Hodge (voir par exemple [210], [8], [7], [148], [218], [241], [305], [54], [69], [16], [243], [19] et d'autre).

Dans [250], nous avons montré ce type d'estimations pour le Laplacien de Bochner en l'absence de formules explicites pour le noyau de la chaleur. La méthode utilisée est basée sur des méthodes de multiplicateur flexibles et pour les estimations de régularisation à la généralisation

non triviale au contexte vectoriel d'un argument de Bakry-Ledoux dans le cas scalaire [19]. Ce type d'argument permet aussi de montrer des inégalités de type Log Sobolev. D'autre part, dans [95], j'ai eu l'occasion d'étudier ce type d'inégalités mais dans d'autres contextes, par exemple pour des opérateurs de type Grushin; mais comme déjà évoqué je n'en parlerai pas dans ce mémoire.

Les résultats principaux obtenus sont :

Théorème 4.4.1 (Estimations dispersives) *En supposant (H1-4), la solution de (4.23) satisfait les estimations suivantes*

$$\|e^{t(\vec{\Delta}+r)}u_0\|_{L^q} \leq c_n(t)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} e^{-t(\gamma_{p,q}+c_0)} \|u_0\|_{L^p}, \quad (4.24)$$

pour tout p, q tels que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, avec $\gamma_{p,q} = \frac{\delta_n}{2} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + \frac{8}{q} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]$, $c_n(t) = C_n \max \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1 \right)$ et pour tout $u_0 \in L^p(\Gamma(TM))$.

Théorème 4.4.2 (Estimations de régularisation) *En supposant (H1-4), la solution de (4.23) satisfait les estimations de régularisation suivantes*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^p} \leq C \max \left(\frac{1}{\sqrt{t}}, 1 \right) e^{-t(c_0 + \frac{4\delta_n}{p} \left(1 - \frac{1}{p} \right))} \|u_0\|_{L^p} \quad (4.25)$$

pour tout $1 < p < +\infty$ et tout $u_0 \in L^p(\Gamma(TM))$.

Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.4.2, on peut déduire des estimations plus générales de régularisation $L^p \rightarrow W^{1,q}$.

Corollaire 4.4.1 *En supposant (H1-4), pour tout p, q tel que $1 < p \leq q < +\infty$, on obtient pour tout temps $t > 0$*

$$\|\nabla e^{t(\vec{\Delta}+r)}u_0\|_{L^q} \leq c_n(t)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{n}\right)} e^{-t(c_0 + \frac{\gamma_{q,q}+\gamma_{p,q}}{2})} \|u_0\|_{L^p}, \quad (4.26)$$

avec $\gamma_{p,q} = \frac{\delta_n}{2} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + \frac{8}{q} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]$, $c_n(t) = C_n \max \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1 \right)$ et pour tout $u_0 \in L^p(\Gamma(TM))$. De plus, sous les mêmes hypothèses, on a

$$\|e^{t(\vec{\Delta}+r)}\nabla^* T_0\|_{L^q} \leq c_n(t)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{n}\right)} e^{-t(c_0 + \frac{\gamma_{q,q}+\gamma_{p,q}}{2})} \|T_0\|_{L^p}, \quad (4.27)$$

avec $\gamma_{p,q} = \frac{\delta_n}{2} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + \frac{8}{q} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]$, $c_n(t) = C_n \max \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1 \right)$ et pour tout tenseur $T_0 \in L^p(\Gamma(TM \otimes T^*M))$

Remarque 4.4.1 *Puisqu'on a*

$$\nabla^* T = -\operatorname{div}(T^\sharp), \quad \forall T \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$$

en utilisant (4.27) on obtient les estimations de régularisation

$$\|e^{t(\vec{\Delta}+r)} \operatorname{div} T_0^\sharp\|_{L^q} \leq c_n(t)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{n}\right)} e^{-t(c_0 + \frac{\gamma_{q,q}+\gamma_{p,q}}{2})} \|T_0^\sharp\|_{L^p}, \quad (4.28)$$

avec $\gamma_{p,q} = \frac{\delta_n}{2} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + \frac{8}{q} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]$, $c_n(t) = C_n \max \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1 \right)$ et pour tous les tenseurs $T_0^\sharp \in L^p(\Gamma(TM \otimes TM))$.

Remarquons, encore une fois, que l'influence de la courbure négative de M fait apparaître de plus une décroissance exponentielle dans nos estimations dispersives et de régularisation, qui en temps grand est bien meilleure que dans le cas plat.

Le Corollaire 4.4.1 s'obtient facilement en utilisant la propriété de semigroupe et les théorèmes 4.4.1 et 4.4.2. On va plutôt décrire brièvement la preuve des théorèmes.

4.4.2 Démonstration du théorème 4.4.1

Nous allons seulement indiquer les principales étapes. On peut commencer par se ramener à des estimations sur le Laplace Beltrami en utilisant le Lemma de comparaison suivant

Lemma 4.4.1 *Pour tout $u_0 \in C_b^\infty(\Gamma(TM))$, on a l'estimation ponctuelle*

$$|e^{t(\vec{\Delta}+r)}u_0|_{/x} \leq e^{t(\Delta_g-c_0)}|u_0|_{/x}, \quad \forall x \in M.$$

Preuve. Soit $u(t, x) = (e^{t(\vec{\Delta}+r)}u_0)(x)$ la solution de l'équation de la chaleur vectorielle (4.23). On remarque que $|u| = g(u, u)^{\frac{1}{2}}$ est solution de l'équation de la chaleur scalaire suivante

$$\partial_t|u| - \Delta_g|u| = \frac{1}{|u|}(|\nabla|u||^2 - |\nabla u|^2) + g\left(r(u), \frac{u}{|u|}\right).$$

En effet, on a la conséquence suivante de l'identité de Bochner (4.12)

$$g\left(\vec{\Delta}u, \frac{u}{|u|}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Delta_g|u|^2}{|u|} - \frac{|\nabla u|^2}{|u|} = \Delta_g|u| + \frac{|\nabla|u||^2}{|u|} - \frac{|\nabla u|^2}{|u|}.$$

Par l'inégalité de Kato, (4.10), on obtient que

$$|\nabla|u||^2 - |\nabla u|^2 \leq 0$$

et grâce à **(H2)**, on obtient aussi que

$$g\left(r(u), \frac{u}{|u|}\right) \leq -c_0|u|,$$

et donc finalement que

$$\partial_t|u| - \Delta_g|u| + c_0|u| \leq 0.$$

L'estimation cherchée découle alors du principe du maximum.

Comme conséquence du Lemma précédent, les estimations $L^p \rightarrow L^q$ pour le semi-groupe $e^{t(\Delta_g-c_0)}$ impliqueront les estimations $L^p \rightarrow L^q$ pour le semi-groupe $e^{t(\vec{\Delta}+r)}$.

On est donc ramené à établir les estimations dispersives pour l'équation de la chaleur scalaire associée au Laplace-Beltrami. Pour établir ces estimations, on peut remarquer qu'en utilisant des arguments d'interpolation et la propriété de semi-groupe, il suffit d'établir des estimations $L^p \rightarrow L^p$ et l'estimation $L^1 \rightarrow L^\infty$.

L'estimation $L^p \rightarrow L^p$ s'obtient par une estimation d'énergie L^p , le taux de décroissance exponentiel s'obtient grâce à l'inégalité de Poincaré.

Proposition 1 ($L^p \rightarrow L^p$)

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a pour des constantes $c_0, \delta_n > 0$, l'estimation suivante

$$\|e^{t(\Delta_g-c_0)}f_0\|_{L^p(M)} \leq e^{-t\left(\frac{4\delta_n(p-1)}{p^2} + c_0\right)} \|f_0\|_{L^p(M)}.$$

Preuve. Soit $f(t, x) = e^{t(\Delta_g-c_0)}f_0$, alors f est solution de

$$\partial_t f - (\Delta_g - c_0)f = 0. \tag{4.29}$$

En multipliant l'équation par $|f|^{p-2}f$ et par intégration sur la variété, on a

$$\frac{d}{dt}\|f\|_{L^p}^p + 4\frac{p-1}{p}\|\nabla(|f|^{\frac{p}{2}})\|_{L^2}^2 + c_0p\|f\|_{L^p}^p \leq 0. \tag{4.30}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré dans (4) Remarque 4.2.1, il existe un $\delta_n > 0$ tel que

$$\delta_n \|h\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla h\|_{L^2}^2$$

avec $h = |f|^{\frac{p}{2}}$, on obtient alors

$$\frac{d}{dt} \|f\|_{L^p}^p + \left(4 \frac{\delta_n(p-1)}{p} + c_0 p \right) \|f\|_{L^p}^p \leq 0,$$

et on peut conclure par une inégalité de type Gronwall.

Pour obtenir l'estimation $L^1 \rightarrow L^\infty$, on remarque que par dualité et propriété de semi-groupe, il suffit de montrer l'estimation $L^1 \rightarrow L^2$ ou l'estimation $L^2 \rightarrow L^\infty$.

Proposition 2 ($L^1 \rightarrow L^\infty$) *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a l'estimation dispersive suivante*

$$\|e^{t(\Delta_g - c_0)} f_0\|_{L^\infty(M)} \leq c_n(t) e^{-t(\frac{\delta_n}{2} + c_0)} \|f_0\|_{L^1(M)}, \text{ with } c_n(t) = C_n \max\left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1\right).$$

On donne une preuve assez générale qui ne nécessite pas une expression explicite du noyau de la chaleur et qui permet de traiter le cas de toutes les variétés non-compactes qui vérifient les hypothèses **(H1-4)**. Evidemment, pour les variétés non-compactes qui mettent à disposition une jolie analyse de Fourier, comme par exemple le cas des espaces hyperboliques, de Damek-Ricci ou des espaces symétriques, on pourrait obtenir cette estimation dispersive en utilisant directement le noyau de la chaleur ([7], [4], [5]).

Preuve. On montre l'estimation $L^1 \rightarrow L^2$, mais puisque l'inclusion de Sobolev $H^1(M)$ dans $L^{2^*}(M)$ est critique en dimension 2, on doit distinguer les deux cas $n \geq 3$ et $n = 2$. On présente la preuve de l'estimation $L^1 \rightarrow L^2$ pour des variétés de dimension $n \geq 3$, qui est plus facile. On utilise un argument de multiplicateurs assez classique (voir par exemple [316]). On part de l'estimation d'énergie L^2 ,

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\|_{L^2(M)}^2 + 2\|\nabla f(t)\|_{L^2(M)}^2 + 2c_0 \|f(t)\|_{L^2(M)}^2 \leq 0$$

et en combinant avec l'inégalité de Sobolev-Poincaré dans (2) et (4) Remarque 4.2.1, on obtient

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\|_{L^2(M)}^2 + \eta_n \|f(t)\|_{L^{2^*}(M)}^2 + (\delta_n + 2c_0) \|f(t)\|_{L^2(M)}^2 \leq 0.$$

Puisque, par interpolation et la décroissance de la norme L^1 , on a

$$\|f(t)\|_{L^2(M)} \leq \|f(t)\|_{L^1(M)}^\alpha \|f(t)\|_{L^{2^*}(M)}^{1-\alpha} \leq C^\alpha \|f(t)\|_{L^{2^*}(M)}^{1-\alpha}$$

avec $\frac{1}{2} = \alpha + \frac{(1-\alpha)}{2^*}$, c'est à dire $\alpha = \frac{2}{n+2}$ et $C = \|f(0)\|_{L^1(M)}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\|_{L^2(M)}^2 + \frac{\eta_n}{C^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}} \|f(t)\|_{L^{2^*}(M)}^{\frac{2}{1-\alpha}} + (\delta_n + 2c_0) \|f(t)\|_{L^2(M)}^2 \leq 0.$$

En posant $y(t) = \|f(t)\|_{L^2(M)}^2$, on trouve l'inégalité différentielle

$$y'(t) + (\delta_n + 2c_0)y(t) \leq -\frac{\eta_n}{C^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}} y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Ainsi

$$z(t) = y(t)e^{(\delta_n + 2c_0)t}$$

est solution de

$$z'(t) \leq -\frac{\eta_n}{C^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}} z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-(\delta_n+2c_0)\frac{\alpha}{1-\alpha}t}$$

et donc en intégrant, on obtient

$$z(t) \leq \left[\frac{C^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}{\eta_n} (\delta_n + 2c_0) \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(1 - e^{-(\delta_n+2c_0)t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

cela donne

$$y(t) \leq \left[\frac{C^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}{\eta_n} (\delta_n + 2c_0) \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(e^{(\delta_n+2c_0)t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} - 1 \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

On a donc obtenu que

$$\|f(t)\|_{L^2(M)} \leq c_n(t)^{\frac{1}{2}} e^{-t(\frac{\delta_n}{2}+c_0)} \|f_0\|_{L^1(M)}, \text{ with } c_n(t) = C_n \max\left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1\right).$$

Comme l'injection de Sobolev de H^1 dans L^∞ n'est pas vraie, le cas d'une variété de dimension 2 est un peu plus délicat. Pour traiter ce cas on va plutôt établir l'estimation $L^2 \rightarrow L^\infty$. En utilisant l'estimation d'énergie L^2 , on a

$$\|f(t)\|_{L^2(M)}^2 \leq \|f(0)\|_{L^2(M)}^2 \quad \text{et} \quad \int_0^t \|\nabla f(\tau)\|_{L^2(M)}^2 d\tau \leq \|f(0)\|_{L^2(M)}^2.$$

En combinant l'estimation L^4 et l'inégalité de Gagliardo -Nirenberg, on peut alors montrer que

$$\frac{d}{dt} \left(t \|f(t)\|_{L^4(M)}^4 \right) \leq C \|\nabla f(t)\|_{L^2(M)}^2 \|f(t)\|_{L^2(M)}^2$$

et donc on obtient en intégrant

$$\|f(t)\|_{L^4(M)}^4 \leq \frac{C}{t} \|f(0)\|_{L^2(M)}^4.$$

Pour obtenir l'estimation $L^2 \rightarrow L^\infty$ on peut alors utiliser des itérations de Nash (voir [239]). On renvoie à l'article [250] pour plus de détails de la preuve.

4.4.3 Preuve du théorème 4.4.2

Le point clé de la preuve est le Lemma suivant :

Lemma 4.4.2 *En supposant (H1-4), on a les estimations suivantes pour $p \geq 2$*

$$\|\nabla e^{t(\vec{\Delta}-I)} u_0\|_{L^p} \leq C \max\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, 1\right) \|u_0\|_{L^p}, \quad \forall t > 0. \quad (4.31)$$

Preuve. On considère les semi-groupes $P_t = e^{t\Delta_g}$ et $Q_t = e^{t(\vec{\Delta}-I)}$ et on va montrer l'inégalité ponctuelle suivante

$$|\nabla Q_t u_0|^2 \leq \frac{1}{d(t)} (P_t(|u_0|^2) - |Q_t u_0|^2) - |Q_t u_0|^2, \quad \frac{1}{d(t)} = \frac{\alpha_1}{(e^{2\alpha_1 t} - 1)}, \quad (4.32)$$

avec $\alpha_1 = -\left(\max(c_0, \frac{1}{c_0}) + 2Kn + 2Kn^{\frac{3}{2}} + 2\right) < 0$.

En admettant cette inégalité, puisque

$$\frac{1}{d(t)} = \frac{\alpha_1}{(e^{2\alpha_1 t} - 1)} \leq C_1 \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{if } 0 < t \leq 1, \\ \alpha_1 & \text{if } t \geq 1, \end{cases}$$

on obtient

$$|\nabla Q_t u_0|^2 \leq C_1 \max\left(\frac{1}{t}, \alpha_1\right) P_t(|u_0|^2)$$

ce qui donne en intégrant sur M et en utilisant l'estimation pour $P_t : L^{\frac{p}{2}} \rightarrow L^{\frac{p}{2}}$ pour $p \geq 2$ que

$$\begin{aligned} \|\nabla Q_t u_0\|_{L^p} &\leq C_n \max\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, 1\right) \|P_t(|u_0|^2)\|_{L^{\frac{p}{2}}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_n \max\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, 1\right) e^{-\frac{4t\delta_n(p-2)}{p^2}} \|u_0\|_{L^p} \end{aligned} \quad (4.33)$$

et donc le Lemma est prouvé.

Il faut donc montrer (4.32). On remarque d'abord qu'en utilisant les propriétés suivantes

$$\frac{d}{ds} P_s = \Delta_g P_s = P_s \Delta_g \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds} Q_{t-s} = -(\vec{\Delta} - I) Q_{t-s}, \quad (4.34)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} P_t(|u_0|^2) - |Q_t u_0|^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} (P_s(|Q_{t-s} u_0|^2)) \, ds \\ &= \int_0^t P_s \left[(\Delta_g |Q_{t-s} u_0|^2) - 2g(\vec{\Delta} Q_{t-s} u_0, Q_{t-s} u_0) + 2|Q_{t-s} u_0|^2 \right] \, ds. \end{aligned}$$

Par l'identité de Bochner (4.12) donnée dans le Lemma 4.2.2 pour le champ de vecteurs $u = Q_{t-s} u_0$, on obtient

$$P_t(|u_0|^2) - |Q_t u_0|^2 = 2 \int_0^t P_s (|\nabla Q_{t-s} u_0|^2 + |Q_{t-s} u_0|^2) \, ds := 2 \int_0^t e^{2\alpha s} \psi(s) \, ds.$$

où

$$\psi(s) = e^{-2\alpha s} P_s (|\nabla Q_{t-s} u_0|^2 + |Q_{t-s} u_0|^2) \geq 0.$$

Si on peut choisir le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que ψ est croissante, on obtient

$$P_t(|u_0|^2) - |Q_t u_0|^2 \geq 2\psi(0) \int_0^t e^{2\alpha s} \, ds = d(t) (|\nabla Q_t u_0|^2 + |Q_{t-s} u_0|^2)$$

et le résultat suit. On s'est donc finalement ramené à montrer : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\psi'(s) \geq 0$. On remarque d'abord qu'en utilisant de nouveau la propriété de semi-groupes (4.34), on a pour tout $m \in M$

$$\begin{aligned} \psi'(s)/m &= e^{-2\alpha s} P_s \left[-2\alpha (|\nabla Q_{t-s} u_0|^2 + |Q_{t-s} u_0|^2) + \Delta_g (|\nabla Q_{t-s} u_0|^2 + |Q_{t-s} u_0|^2) \right. \\ &\quad \left. - 2g(\nabla(\vec{\Delta} - I) Q_{t-s} u_0, \nabla Q_{t-s} u_0) + g((\vec{\Delta} - I) Q_{t-s} u_0, Q_{t-s} u_0) \right]_{/m}, \end{aligned}$$

en utilisant de nouveau l'identité de Bochner (4.12), on peut simplifier l'expression précédente pour obtenir

$$\psi'(s)/m = e^{-2\alpha s} P_s [B(m)]$$

où

$$\begin{aligned} B(m) &= \left[(\Delta_g |\nabla Q_{t-s} u_0|^2) - 2g(\nabla \vec{\Delta} Q_{t-s} u_0, \nabla Q_{t-s} u_0) \right. \\ &\quad \left. - (2\alpha + 1)|Q_{t-s} u_0|^2 - 2\alpha |\nabla Q_{t-s} u_0|^2 \right]_{/m}. \end{aligned}$$

Grâce au principe du maximum, il est donc suffisant de prouver $B(m) \geq 0, \forall m \in M$. On calcule $B(m)$ pour tout $m \in M$ en utilisant un système de coordonnées normales en m . En posant $e_i = \partial/\partial x^i = \partial_i$, (e_1, \dots, e_n) est alors une base orthonormée en m , en utilisant les propriétés des coordonnées normales, un calcul (assez long) permet d'obtenir

$$\begin{aligned} B(m) = & 2 \operatorname{Ric}(e_i, e_j)_{/m} g(\nabla_{e_i}(Q_{t-s} u_0), \nabla_{e_j}(Q_{t-s} u_0))_{/m} + 2|\nabla^2 Q_{t-s} u_0|_{/m}^2 + \\ & 4 \operatorname{Riem}(e_i, e_k, \nabla_{e_k}(Q_{t-s} u_0), \nabla_{e_i}(Q_{t-s} u_0))_{/m} - 2\alpha|\nabla Q_{t-s} u_0|_{/m}^2 + \\ & 2g([\nabla R](e_k, e_i, e_k)](Q_{t-s} u_0), \nabla_{e_i}(Q_{t-s} u_0))_{/m} - (2\alpha + 1)|Q_{t-s} u_0|_{/m}^2 \end{aligned}$$

où on utilise la convention d'Einstein de sommation des indices répétés. Notons que les tenseurs de courbure apparaissent naturellement dans le calcul des commutateurs que l'on doit faire intervenir pour simplifier l'expression. En utilisant les hypothèses **(H1-2)**, on a donc

$$B(m) \geq |\nabla Q_{t-s} u_0|_{/m}^2 \left(-2\alpha - 2 \max \left(c_0, \frac{1}{c_0} \right) - 4Kn - 2Kn^{\frac{3}{2}} \right) + |Q_{t-s} u_0|_{/m}^2 \left(-2\alpha - 1 - 2Kn^{\frac{3}{2}} \right).$$

On peut donc voir que $B(m)$ est positif pour $\alpha \leq \alpha_1$. En particulier, on finit la démonstration du Lemma en choisissant

$$\alpha_1 = - \left(\max \left(c_0, \frac{1}{c_0} \right) + 2Kn + 2Kn^{\frac{3}{2}} + 2 \right).$$

4.4.4 Le cas du système de Stokes

On considère maintenant le système de Stokes (qui correspond à la partie linéaire de l'équation de Navier-Stokes)

$$\begin{cases} \partial_t u - \vec{\Delta} u - r(u) + 2 \operatorname{grad} (-\Delta_g)^{-1} \operatorname{div}(ru) = 0, \\ \operatorname{div} u_0 = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in \Gamma(TM). \end{cases} \quad (4.35)$$

Il sera utile d'introduire l'opérateur linéaire

$$Bu = -2 \operatorname{grad} (-\Delta_g)^{-1} \operatorname{div}(ru).$$

Notons que grâce à la continuité de la transformée de Riesz sur une variété qui satisfait **(H1-4)** (voir de nouveau [218]), B est continu de $L^p \rightarrow L^p$ pour tout $p, 1 < p < +\infty$. Dans le cas où la courbure de Ricci est constante ($\operatorname{Ric} = -c_0 g$), on remarque que $B = 0$ et donc les estimations du paragraphe précédent permettent directement de traiter le système de Stokes. Cela se produit par exemple sur l'espace hyperbolique. Si la courbure de Ricci n'est pas constante, le système de Stokes est vraiment plus délicat à traiter. Pour établir des estimations dispersives en temps petit, on peut traiter B comme une perturbation et donc les obtenir en utilisant la formule de Duhamel et les estimations dispersives du paragraphe précédent. La difficulté est d'obtenir des estimations dispersives qui soient pertinentes en temps long, c'est à dire pour lesquelles on a de la décroissance. Pour avoir cela, il suffit d'avoir de bonnes estimations $L^p \rightarrow L^p$ en temps long. On a une bonne estimation $L^2 \rightarrow L^2$, en utilisant l'estimation d'énergie (le terme Bu ne contribue pas puisque u est à divergence nulle), cependant ce type de cancellation ne se produit pas lorsqu'on cherche à établir des estimations L^p . Pour remédier à ce problème, nous avons établi les estimations suivantes suffisantes pour traiter le problème non-linéaire par la méthode de point fixe :

Corollaire 4.4.2 En supposant (**H1-4**), il existe $\beta \geq c_0 > 0$ telle que la solution du problème de Cauchy (4.35) satisfait les estimations dispersives suivantes : pour tout p, q tels que $2 \leq p \leq q < +\infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u(t)\|_{L^q} \leq C c_n(t)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} e^{-\beta t} (\|u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^2}), \quad \forall t > 0, \quad (4.36)$$

pour tout $u_0 \in L^p(\Gamma(TM)) \cap L^2(\Gamma(TM))$ et pour tout p, q tels que $1 < p \leq 2 \leq q < +\infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u(t)\|_{L^q} \leq C c_n(t)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} e^{-\beta t} \|u_0\|_{L^p}, \quad \forall t > 0, \quad (4.37)$$

pour tout $u_0 \in L^p(\Gamma(TM))$ avec $c_n(t) = \max\left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1\right)$.

L'idée est d'utiliser la décroissance de la norme L^2 pour avoir de bonnes estimations en temps long. Le défaut de cette approche c'est qu'il nous faut supposer que la donnée initiale est aussi dans L^2 lorsque p et q sont plus grands que 2. Il est possible qu'une étude fine de la résolvante de l'opérateur linéaire associé au problème de Stokes, nous permette de nous affranchir de cette hypothèse (au moins pour certaines classes de variétés).

En ce qui concerne les estimations avec régularisation, on a déjà remarqué qu'il suffit d'établir ces estimations en temps petit et de combiner avec les estimations dispersives pour les temps grands. Pour obtenir ces estimations en temps petit pour le problème de Stokes, on peut donc voir le terme Bu comme une perturbation et les prouver en utilisant la formule de Duhamel et les estimations du paragraphe précédent. En tenant compte des estimations dispersives ci-dessus, cela conduit à :

Théorème 4.4.3 En supposant (**H1-4**), il existe $\beta \geq c_0 > 0$ telle que la solution du problème de Cauchy (4.35) satisfait les estimations suivantes : pour tout p, q tels que $2 \leq p \leq q < +\infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla u(t)\|_{L^q} \leq C c_n(t)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{n}\right)} e^{-\beta t} (\|u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^2}), \quad \forall t > 0, \quad (4.38)$$

pour tout $u_0 \in L^p(\Gamma(TM)) \cap L^2(\Gamma(TM))$ et pour tout p, q tels que $1 < p \leq 2 \leq q < +\infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla u(t)\|_{L^q} \leq C c_n(t)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{n}\right)} e^{-\beta t} \|u_0\|_{L^p}, \quad \forall t > 0, \quad (4.39)$$

pour tout $u_0 \in L^p(\Gamma(TM))$ avec $c_n(t) = \max\left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1\right)$.

4.5 Théorèmes de type Fujita-Kato sur variétés

4.5.1 Le cas des variétés d'Einstein à courbure négative

On s'intéresse d'abord au cas de variétés riemanniennes M non-compactes pour lesquelles le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique : $\text{Ric} = -c_0 g$, $c_0 > 0$. En utilisant (4.13), il est dans ce cas plus pratique de récrire le problème sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u - (\overrightarrow{\Delta} u + r u) = -\mathbb{P}(\text{div}(u \otimes u)), & \mathbb{P}v = v + \text{grad } (-\Delta_g)^{-1} \text{div } v, \\ u|_{t=0} = u_0, \text{div } u_0 = 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

On obtient alors

Théorème 4.5.1 Pour tout $u_0 \in L^n(\Gamma(TM))$, avec $\operatorname{div} u_0 = 0$, il existe $T > 0$ et une unique solution u de l'équation de Navier-Stokes incompressible telle que $u \in \mathcal{C}([0, T], L^n(\Gamma(TM))) \cap X_T$. De plus, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|u_0\|_{L^n(\Gamma(TM))} \leq \delta$ alors les solutions ci-dessus sont globales en temps.

En dimension 2, les solutions sont globales pour toutes données.

Pour la démonstration, on utilise la méthode du point fixe pour

$$u(t) = e^{t(\vec{\Delta} + r)} u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)(\vec{\Delta} + r)} \mathbb{P}(\operatorname{div}(u \otimes u))(\tau) d\tau = u_1 + B(u, u)(t).$$

avec l'espace X_T données par

$$X_T = \left\{ u \in L_{loc}^\infty([0, T], L^q(\Gamma(TM))) \mid c_n(t)^{-(\frac{1}{n} - \frac{1}{q})} e^{\beta t} \|u(t)\|_{L^q} \in L^\infty(0, T) \right\}$$

où $c_n(t) = C_n \max\left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}, 1\right)$, $n < q < +\infty$, et $\beta > 0$ adapté à la décroissance en temps long des estimations dispersives du paragraphe précédent. La continuité de $B(u, u)$ sur X_T s'obtient en utilisant ces estimations :

$$\begin{aligned} \|B(u, u)(t)\|_{L^q} &\leq C \int_0^t c_n(t-\tau)^{\frac{1}{n} + \frac{1}{q}} e^{-\beta(t-\tau)} \|u \otimes u(\tau)\|_{L^{\frac{q}{2}}} d\tau \\ &\leq C \int_0^t c_n(t-\tau)^{\frac{1}{n} + \frac{1}{q}} e^{-\beta(t-\tau)} \left(e^{-\beta\tau} c_n(\tau)^{\frac{1}{n} - \frac{1}{q}}\right)^2 d\tau \lesssim \|u\|_{X_T}^2. \end{aligned}$$

4.5.2 Le cas général

On étudie maintenant

$$\begin{cases} \partial_t u - \vec{\Delta} u - r(u) - Bu = -\mathbb{P}[\nabla_u u], & \mathbb{P}v = v + \operatorname{grad}(-\Delta_g)^{-1} \operatorname{div} v, \\ \operatorname{div} u_0 = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in \Gamma(TM), \end{cases} \quad (4.41)$$

où $Bu = -2 \operatorname{grad}(-\Delta_g)^{-1} \operatorname{div}(ru)$ sur une variété générale satisfaisant **(H1-4)**. Rappelons que B et \mathbb{P} sont linéaires continus $L^p \rightarrow L^p$ pour tout p , $1 < p < +\infty$. Une difficulté supplémentaire est due au fait que $(\vec{\Delta} + r - B)$ ne commute pas avec \mathbb{P} sur M . Nous devrons donc modifier l'espace de point fixe pour tenir compte de cela. On montre

Théorème 4.5.2 Pour tout $u_0 \in L^n(\Gamma(TM)) \cap L^2(\Gamma(TM))$, avec $\operatorname{div} u_0 = 0$, il existe $T > 0$ et une unique solution u de l'équation de Navier-Stokes incompressible (4.41) telle que $u \in \mathcal{C}([0, T], L^n(\Gamma(TM)) \cap L^2(\Gamma(TM))) \cap X_T$.

De plus, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|u_0\|_{L^n(\Gamma(TM))} + \|u_0\|_{L^2(\Gamma(TM))} \leq \delta$ alors les solutions sont globales en temps.

En dimension 2, les solutions sont globales pour toute donnée.

Pour la démonstration, on résout le problème de point fixe

$$u(t) = e^{t(\vec{\Delta} + r - B)} u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)(\vec{\Delta} + r - B)} \mathbb{P}(\nabla_u u)(\tau) d\tau = u_1 + B(u, u)(t).$$

dans l'espace

$$X_T = \left\{ u \in L_{loc}^\infty([0, T], L^q(\Gamma(TM))), \nabla u \in L_{loc}^\infty([0, T], L^{\tilde{q}}(\Gamma(TM))) \cap L_{loc}^\infty([0, T], L^s(\Gamma(TM))) \mid e^{\beta t} c_n(t)^{-(\frac{1}{n} - \frac{1}{q})} \|u(t)\|_{L^q} + e^{\beta t} c_n(t)^{-(\frac{2}{n} - \frac{1}{\tilde{q}})} \|\nabla u(t)\|_{L^{\tilde{q}}} + e^{\beta t} c_n(t)^{-(\frac{2}{n} - \frac{1}{s})} \|\nabla u(t)\|_{L^s} \in L^\infty(0, T) \right\}$$

pour des q, \tilde{q}, s appropriés satisfaisant $n < q, \tilde{q}, s < +\infty$ et $\beta > 0$ adapté à la décroissance en temps long des estimations dispersives du paragraphe précédent.

4.6 Perspectives

Les estimations dispersives et de régularisation du théorème et du Corollaire nécessitent toujours une donnée initiale dans L^2 . On peut se demander si cette hypothèse est indispensable. Notons que dans le cadre compact, même si r n'est pas constant, ce type de difficultés n'apparaît pas puisque $L^p \subset L^2$ si $p > 2$. Une situation bien connue dans laquelle le projecteur de Leray ne commute pas avec le Laplacien est celle des ouverts (même euclidiens) avec une condition au bord par exemple de Dirichlet ou de Navier. Dans le cadre non-compact des domaines extérieurs les estimation dispersives usuelles peuvent être prouvées en passant par l'étude de la résolvante de l'opérateur de Stokes (voir [134], [172] par exemple). On peut naturellement se demander si cette approche pourrait s'étendre au cadre précédent de variétés non-compactes à courbure négative.

Dans l'étude précédente l'influence de la géométrie ne se manifeste que par le taux de décroissance exponentiel de la solution. Dans le cadre de la dimension deux ou toutes les solutions sont globales, on peut se poser la question de décrire précisément le comportement asymptotique de la solution. Dans le cas de \mathbb{R}^2 , le comportement asymptotique dans L^1 de la vorticité est autosimilaire et fait intervenir la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. Cela a été étudié par Gallay et Wayne [127]. Dans un premier temps, dans le cas où r est constant et où la 1-forme $\omega = du^\flat$ est solution de

$$\partial_t \omega + d\omega(v) = \Delta_g \omega + 2r\omega.$$

On peut naturellement se poser la question de calculer la limite dans L^1 de $e^{-2rt}\omega(t)$. La limite devrait faire intervenir le noyau de la chaleur de la variété qui contient des informations importantes sur la géométrie. Notons qu'une nouvelle difficulté importante sera l'absence de scaling sur la variété, une partie importante de l'approche de Gallay et Wayne utilise des variables autosimilaires.

L'étape suivante sera d'étudier le cas des équations pour les fluides compressibles et de justifier la limite incompressible. Cela sera en lien avec l'étude des équations des ondes et de Klein Gordon déjà effectuée. En effet, il est bien connu dans la théorie de la limite incompressible que l'un des points clés est la présence d'ondes acoustiques, qui se propagent à grande vitesse dans le domaine spatial. Ces ondes rapides compliquent l'analyse mathématique, car elles empêchent la convergence forte du gradient du champ de vitesse. Il existe différentes méthodes pour surmonter cette difficulté, selon le domaine, développées dans les travaux de Lions-Masmoudi [215], Desjardins-Grenier-Lions-Masmoudi [101], Danchin [92], Gallagher [124]. Selon la géométrie il est possible d'estimer le comportement des ondes acoustiques en exploitant et en combinant leur nature dissipative et oscillante. Des problèmes similaires se posent aussi quand on essaye d'approcher les équations de Navier Stokes par la méthode de "compressibilité artificielle", où nous devons prendre en considération les ondes acoustiques de pression. Afin de surmonter cette difficulté, dans leurs travaux Donatelli et Marcati [104], [106], [105] utilisent les propriétés de dispersion de ces ondes. Ils exploitent la structure de l'équation des ondes de pression, qui leur permet d'utiliser les estimations de type Strichartz, conduisant à la forte convergence des suites approximantes. Nous sommes intéressés à l'étude de ces problèmes dans le cas des variétés non-compactes à courbure négative, en particulier les espaces hyperboliques. Pour des raisons géométriques, nous nous attendons à de meilleurs résultats que dans le cadre euclidien. J'ai l'intention de collaborer avec Donatella Donatelli (Université de L'Aquila), sur ce problème : "Analyse des ondes acoustiques sur les espaces hyperboliques".

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Abidi. *Résultats de régularité de solutions axisymétriques pour le système de Navier-Stokes.* Bull. Sci. Math. 132, No. 7 (2008), 592-624.
- [2] T. Alazard and R. Carles. *Loss of regularity for supercritical nonlinear Schrödinger equations.* Math. Ann. 343, No. 2 (2009) 397-420.
- [3] J.-Ph. Anker. *L^p Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type.* Ann. of Math., 132 (1990) 597-628.
- [4] J.-Ph. Anker, E. Damek, and C. Yacoub. *Spherical analysis on harmonic AN groups.* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, 33 (1996) 643-679.
- [5] J.-Ph. Anker and L. Ji. *Heat kernel and Green function estimates on non-compact symmetric spaces.* Geom. Funct. Anal., 9 (1999) 1035-1091.
- [6] J.-Ph. Anker and V. Pierfelice. *Nonlinear Schrödinger equation on real hyperbolic spaces.* Ann. Inst. H. Poincaré (C) Non Linear Analysis, 26 (2009) 1853-1869.
- [7] J.-Ph. Anker, V. Pierfelice, and M. Vallarino. *The Schrödinger equation on Damek-Ricci spaces.* Comm. Part. Diff. Eq. 36, No. 6 (2011) 976-997.
- [8] J.Ph. Anker and L. Ji. *Heat kernel and Green function estimates on non-compact symmetric spaces.* Geom. Funct. Anal. (GAFA), 9 (1999) 1035-1091.
- [9] J.Ph. Anker, S. Meda, V. Pierfelice, and M. Vallarino. *On the nonlinear Schrödinger equation on non-compact symmetric spaces.* en préparation.
- [10] J.Ph. Anker and V. Pierfelice. *Wave and Klein-Gordon equations on hyperbolic spaces.* Analysis and PDE 7, No. 4 (2014) 953-995.
- [11] J.Ph. Anker, V. Pierfelice, and M. Vallarino. *Wave equation on Damek-Ricci spaces.* accepté pour publication dans Annali di Matematica Pura ed Applicata (2013) doi : 10.1007/s10231-013-0395-x.
- [12] J.Ph. Anker, V. Pierfelice, and M. Vallarino. *Wave equation on real hyperbolic spaces.* Journal of Differential Equations, 252, No. 10 (2012) 5613-5661.
- [13] R. Anton. *Strichartz inequalities for Lipschitz metrics on manifolds and nonlinear Schrödinger equation on domains.* Bull. Soc. Math. France, 136 (2008) 27-65.
- [14] F. Astengo. *The maximal ideal space of a heat algebra on solvable extensions of H-type groups.* Boll. Un. Mat. Ital. A 9, No. 7 (1995) 157-165.
- [15] F. Astengo. *Multipliers for a distinguished Laplacian on solvable extensions of H-type groups.* Monatsh. Math., 120 (1995) 179-188.
- [16] P. Auscher, T. Coulhon, X.T. Duong, and S. Hofmann. *Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37, No. 6 (2004) 911-957.
- [17] P. Auscher and D. Frey. *A new proof for Koch and Tataru's result on the well-posedness of Navier-Stokes equations in BMO^{-1} .* preprint (2013) arXiv :1310.3783.
- [18] H. Bahouri, P. Gérard, and C.-J. Xu. *Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg.* J. Anal. Math. 82, (2000) 93-118.

- [19] D. Bakry and M. Ledoux. *A logarithmic Sobolev form of the Li-Yau parabolic inequality.* Rev. Mat. Iberoamericana 22, No. 2 (2006), 683-702.
- [20] D. Bambusi. *Asymptotic stability of ground states in some Hamiltonian PDEs with symmetry.* Comm. Math. Phys. 320, No. 2 (2013) 499-542.
- [21] V. Banica. *The nonlinear Schrödinger equation on the hyperbolic space.* Comm. P.D.E. 32, No. 10 (2007) 1643-1677.
- [22] V. Banica and T. Duyckaerts. *Weighted Strichartz estimates for radial Schrödinger equation on noncompact manifolds.* Dyn. Partial Diff. Eq., 4 (2007) 335-359.
- [23] V. Banica, R. Carles and G. Staffilani. *Scattering theory for radial nonlinear Schrödinger equations on hyperbolic space.* Geom. Funct. Anal., 18 (2008) 367-399.
- [24] J. E. Barab. *Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrödinger equation.* J. Math. Phys., 25 (1984) 3270-3273.
- [25] M. Beals. *Optimal L^∞ decay for solutions to the wave equation with a potential.* Comm. Partial Diff. Equations, 8 (1994) 1319-1369.
- [26] M. Beals and M. Bezard. *Low regularity local solutions for field equations.* Comm. Partial Differential Equations, 21 (1996) 79-124.
- [27] M. Beals and W. Strauss. *L^p estimates for the wave equation with a potential.* Comm. Partial Diff. Equations, 18 (1993) 1365 -1397.
- [28] R. Beals. *L^p boundedness of Fourier integral operators.* Mem. Amer. Math. Soc., 38 No. 264 (1982) viii+57.
- [29] M. Beceanu and M. Goldberg. *Schrödinger dispersive estimates for a scaling-critical class of potentials.* Comm. Math. Phys. 314, No. 2 (2012) 471-481.
- [30] L. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces - an introduction.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 223, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [31] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke. *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces.* Lect. Notes Math. (1598) Springer (1995).
- [32] M. D. Blair, H. F. Smith, and C. D. Sogge. *On Strichartz estimates for Schrödinger operators in compact manifolds with boundary.* Proc. Amer. Math. Soc. 135, No. 1 (2008) 247-256.
- [33] J. Boggino. *Generalized Heisenberg groups and solvmanifolds naturally associated.* Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 43 (1985) 529-547.
- [34] J.-M. Bouclet. *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds.* Analysis and PDE 4-1(2011) 1-84.
- [35] J. Bourgain. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I.* Geom. Funct. Anal. 3, No. 2 (1993) 107-156.
- [36] J. Bourgain. *Fourier transformation restriction phenomena for certain lattice subsets and application to the nonlinear evolution equations I - Schrödinger equations.* Geom. Funct. Anal., 3 (1993) 107-156.
- [37] J. Bourgain. *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations.* American Mathematical Society Colloquium Publications (vol. 46). American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [38] J. Bourgain. *Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case.* J. Amer. Math. Soc. 12, No. 1 (1999), 145-171.
- [39] J. Bourgain. *Refinements of Strichartz's inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity.* Internat. Math. Res. Notices, 5 (1998) 253-283.

- [40] J. Bourgain and N. Pavlovic. *Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D.* J. Funct. Anal. 255, No. 9 (2008) 2233-2247.
- [41] J. Bourgain and W. Wang. *Construction of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 25, No. 1-2 (1997) 197-215.
- [42] A. Bulut. *Global well-posedness and scattering for the defocusing energy-supercritical cubic nonlinear wave equation.* Journal of Functional Analysis, 263 (2012) 1609-1660.
- [43] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. *Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces.* Invent. Math. 159, No. 1 (2005) 187-223.
- [44] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. *Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 38 (2005) 255-301.
- [45] N. Burq, F. Planchon, J. Stalker, and S. Tahvildar-Zadeh. *Strichartz estimates for the wave and Schrödinger Equations with potentials of critical decay.* Indiana Univ. Math. J., 53 (2004) 1665-1680.
- [46] N. Burq, F. Planchon, J. Stalker, and S. Tahvildar-Zadeh. *Strichartz estimates for the Wave and Schrödinger Equations with the Inverse-Square Potential.* J. Funct. Anal., 203 (2003) 519-549.
- [47] N. Burq, P. Gérard and N. Tzvetkov. *Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds.* Amer. J. Math. 126, No. 3 (2004) 569-605.
- [48] V. S. Buslaev and G. S. Perelman. *On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations.* Amer. Math. Soc. Transl. 164, No. 2 (1995) 75-98.
- [49] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. 35, No. 6 (1982) 771-831.
- [50] M. Cannone and Y. Meyer. *Littlewood-Paley decomposition and Navier-Stokes equations.* Methods Appl. Anal. 2, No. 3 (1995) 307-319.
- [51] R. Carles. *Geometric optics and long range scattering for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations.* Commun. Math. Phys. 220, No. 1 (2001) 41-67.
- [52] R. Carles. *Global existence results for nonlinear Schrödinger equations with quadratic potentials.* Discrete Contin. Dyn. Syst. 13, No. 2 (2005), 385-398.
- [53] R. Carles, E. Dumas, and C. Sparber. *Geometric optics and instability for NLS and Davey-Stewartson models.* J. Eur. Math. Soc. 14, No. 6 (2012) 1885-1921.
- [54] G. Carron. *Estimées des noyaux de Green et de la chaleur sur les espaces symétriques.* Anal. PDE 3, No. 2 (2010) 197-205.
- [55] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations.* Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [56] T. Cazenave and P.-L. Lions. *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations.* Comm. Math. Phys. 85, No. 4 (1982) 549-561.
- [57] T. Cazenave and F. B. Weissler. *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation.* Hs. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 14, No. 10 (1990) 807-836.
- [58] T. Cazenave and F. B. Weissler. *Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation.* Commun. Math. Phys. 147, No. 1 (1992) 75-100.
- [59] J.-Y. Chemin, I. Gallagher, and M. Paicu. *Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations.* Ann. of Math. 173, No. 2 (2011) 983-1012.
- [60] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. *Ill posedness for nonlinear Schrödinger and wave equations.* arXiv :math.AP/0311048.

- [61] M. Christ and A. Kiselev. *Maximal functions associated to filtrations*. J. Funct. Anal., 179 (2001) 409-425.
- [62] H. Christianson and J. L. Marzuola. *Existence and stability of solitons for the nonlinear Schrödinger equation on hyperbolic space*. Nonlinearity 23, No. 1 (2010) 89-106.
- [63] J. L. Clerc and E. M. Stein. *L^p -multipliers for non-compact symmetric spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 71 (1974) 3911-3912.
- [64] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. *Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation*. Math. Res. Lett. 9, No. 5-6 (2002) 659-682.
- [65] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. *Global existence and scattering for rough solutions of a nonlinear Schrödinger equation on \mathbb{R}^3* . Comm. Pure Appl. Math. 57, No. 8 (2004) 987-1014.
- [66] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. *Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in \mathbb{R}^3* . Ann. of Math. (2) 167, No. 3 (2008) 767-865.
- [67] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. *Resonant decompositions and the I-method for the cubic non-linear Schrödinger equation on \mathbb{R}^2* . Discrete Contin. Dyn. Syst. 21, No. 3 (2008) 665-686.
- [68] P. Constantin and J.-C. Saut. *Local smoothing properties of Schrödinger equations*. Indiana Univ. Math. J. 38, No. 3 (1989) 791-810.
- [69] T. Coulhon. *Heat kernel estimates, Sobolev-type inequalities and Riesz transform on non-compact Riemannian manifolds*. Analysis and geometry of metric measure spaces, 55-65, CRM Proc. Lecture Notes, 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2013).
- [70] M.G Cowling. *Herz's "principe de majoration" and the Kunze-Stein phenomenon*. Harmonic analysis and number theory (Montreal, 1996), CMS Conf. Proc. 21, Amer. Math. Soc. (1997), 73-88.
- [71] M.G. Cowling. *Herz's 'principe de majoration' and the Kunze-Stein phenomenon*. CMS Conf. Proc. 21, Amer. Math. Soc. (1997), 73-88.
- [72] M.G. Cowling. *The Kunze-Stein phenomenon*. Ann. Math., 107 (1978) 209-234.
- [73] M.G. Cowling, A.H. Dooley, A. Korányi, and F. Ricci. *An approach to symmetric spaces of rank one via groups of Heisenberg type*. J. Geom. Anal., 8 (1998) 199-237.
- [74] M.G. Cowling, A.H. Dooley, A. Korányi, and F. Ricci. *H -type groups and Iwasawa decompositions*. Adv. Math., 87 (1991) 1-41.
- [75] M.G. Cowling and J.J.F. Fournier. *Inclusions and noninclusion of spaces of convolution operators*. Trans. Amer. Math. Soc., 221 (1976) 59-95.
- [76] M.G. Cowling, S. Giulini, A. Hulanicki, and G. Mauceri. *Spectral multipliers for a distinguished laplacian on certain groups of exponential growth*. Studia Mathematica 111, No. 2 (1994) 103-121.
- [77] M.G. Cowling, S. Giulini, and S. Meda. *$L^p - L^q$ estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces I*. Duke Math. J., 72 (1993) 109-150.
- [78] M.G. Cowling, S. Giulini, and S. Meda. *$L^p - L^q$ estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces II*. J. Lie. Th., 5 (1995) 1-14.
- [79] M.G. Cowling, S. Giulini, and S. Meda. *$L^p - L^q$ estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces III*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 51 (2001) 1047-1069.

- [80] S. Cowling, M.G. Giulini and S. Meda. *Geometry of a semi-direct extension of a Heisenberg type nilpotent group.* Coll. Math. LIII (1987) 255-268.
- [81] W. Craig. *Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles.* Société Mathématique de France, Paris, 9 (2000) viii+120.
- [82] W. Craig, T. Kappeler, and W. Strauss. *Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation.* Commun. Pure Appl. Math. 48, No. 8 (1995) 769-860.
- [83] W. Craig and C. E. Wayne. *Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations.* Comm. Pure Appl. Math. 46, No.11 (1993) 1409-1498.
- [84] S. Cuccagna. *On asymptotic stability of ground states of NLS.* Rev. Math. Phys. 15, No. 8 (2003) 877-903.
- [85] S. Cuccagna. *On the wave equation with a potential.* Comm. Partial Diff. Equations, 25 (2000) 1549-1565.
- [86] M. Czubak and C. H. Chan. *Non-uniqueness of the Leray-Hopf solutions in the hyperbolic setting.* Dynamics of PDE 10, No.1 (2013) 43-77.
- [87] M. Czubak and C.H. Chan. *Remarks on the weak formulation of the Navier-Stokes equations on the 2D hyperbolic space.* preprint (2013) arXiv :1309.3496.
- [88] E. Damek. *Geometry of a semi-direct extension of a Heisenberg type nilpotent group.* Colloq. Math., 53 (1987) 255-268.
- [89] E. Damek and F. Ricci. *A class of non-symmetric harmonic Riemannian spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992) 139-142.
- [90] E. Damek and F. Ricci. *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992) 139-142.
- [91] E. Damek and F. Ricci. *Harmonic analysis on solvable extensions of H -type groups.* J. Geom. Anal., 2 (1992) 213-248.
- [92] R. Danchin. *Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 35, No. 1 (2002) 27-75.
- [93] P. D'Ancona, N. Boussaid, and L. Fanelli. *Smoothing estimates for the Dirac equation with a magnetic potential.* J. Math. Pures Appliquées, 95 (2011) 137-150.
- [94] P. D'Ancona, V. Georgiev, and H. Kubo. *Weighted decay estimates for the wave equation.* J. Diff. Eq., 177 (2001) 146-208.
- [95] P. D'Ancona, P. Maheux, and V. Pierfelice. *Log-Sobolev inequalities for semi-direct product operators.* soumis pour publication (2014).
- [96] P. D'Ancona and V. Pierfelice. *On the wave equation with a large rough potential.* J. Funct. Anal. 227, No. 1 (2005) 30-77.
- [97] P. D'Ancona, V. Pierfelice, and F. Ricci. *On the wave equation associated to the Hermite and the Twisted Laplacian.* J. Fourier Anal. Appl. 16, No. 2 (2010) 294-310.
- [98] P. D'Ancona, V. Pierfelice, and A. Teta. *Dispersive estimate for the Schrödinger equation with point interaction.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 29 (2006) 309-323.
- [99] P. D'Ancona, V. Pierfelice, and N. Visciglia. *Some remarks on the Schrödinger equation with a potential in $L_t^r L_x^s$.* Mathematische Annalen 333, No. 2 (2005) 271-290.
- [100] E.B. Davies and N. Mandouvalos. *Heat kernel bounds on hyperbolic spaces and Kleinian groups.* Proc. London Math. Soc., 57 (1988) 182-208.
- [101] B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions, and N. Masmoudi. *Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions.* J. Math. Pures Appl. (9) 78, No. 5 (1999) 461-471.

- [102] B. Dodson. *Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2 -critical nonlinear Schrödinger equation when $d \geq 3$.* J. Amer. Math. Soc. 25, No. 2 (2012) 429-463.
- [103] B. Dodson. *Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state.* preprint arXiv :1104.1114.
- [104] D. Donatelli and P. Marcati. *A dispersive approach to the artificial compressibility approximations of the Navier Stokes equations in 3 – D.* Journal of Hyperbolic Differential Equations 3, No. 3 (2006) 575-588.
- [105] D. Donatelli and P. Marcati. *Leray weak solutions of the Incompressible Navier Stokes system on exterior domains via the artificial compressibility method.* Indiana Univ. Math. J., 59 (2010) 1831-1852.
- [106] D. Donatelli and P. Marcati. *A quasineutral type limit for the Navier Stokes Poisson system with large data.* Nonlinearity, 21 (2008) 135-148.
- [107] P. Donnat, J.-L. Joly, G. Metivier, and J. Rauch. *Diffractive nonlinear geometric optics.* Ecole Polytech., Palaiseau (1996).
- [108] T. Duyckaerts, C.E. Kenig, and F. Merle. *Classification of radial solutions of the focusing, energy-critical wave equation.* Cambridge Journal of Mathematics, 1 (2013) 75-144.
- [109] T. Duyckaerts, C.E. Kenig, and F. Merle. *Scattering for radial, bounded solutions of focusing supercritical wave equations.* Int. Math. Res. Not. IMRN 1, No. 1 (2014) 224-258.
- [110] T. Duyckaerts, C.E. Kenig, and F. Merle. *Universality of blow-up profile for small radial type II blow-up solutions of the energy-critical wave equation.* The Journal of the European Mathematical Society 13, No. 3 (2011) 533-599.
- [111] J. Dziuba’nski. *Triebel-Lizorkin spaces associated with Laguerre and Hermite expansions.* Proc. Amer. Math. Soc. 125, No. 12 (1997) 3547-3554.
- [112] D.G. Ebin and J.E. Marsden. *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid.* Ann. of Math. 92, No. 2 (1970) 102-163.
- [113] A. J. Eddine. *Equations d'évolution sur certains groupes hyperboliques.* Thèse de Doctorat - Université d'Orléans (2013).
- [114] J. Epperson. *Triebel-Lizorkin spaces for Hermite expansions.* Studia Math. 114, No. 1 (1995) 87-103.
- [115] P. Erbelein. *Geometry of non positively curved manifolds.* Chicago Lectures in Mathematics, 449 (1996).
- [116] L. Erdos, B. Schlein, and H.-T. Yau. *Derivation of the cubic non-linear Schrödinger equation from quantum dynamics of many-body systems.* Invent. Math. 167, No. 3 (2007) 515-614.
- [117] L. Escauriaza, G. Seregin, and V. Sverák. *$L^{3,\infty}$ solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness.* Russian Math. Surveys, 58 (2003).
- [118] L. Fanelli, V. Felli, M. Fontelos, and Primo A. *Time decay of scaling invariant Schrödinger equations.* <http://arxiv.org/abs/1203.1771>.
- [119] L. Fanelli, V. Felli, M. Fontelos, and Primo A. *Time decay of scaling invariant Schrödinger equations on the plane.* <http://arxiv.org/abs/1405.1784>.
- [120] J. Fontaine. *A semi-linear wave equation on hyperbolic spaces.* Comm. Partial Diff. Eq., 22 (1997) 633-659.
- [121] J. Fontaine. *Une équation semi-linéaire des ondes sur \mathbb{H}^3 .* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Mathématiques, 319 (1994) 935-948.
- [122] H. Fujita and T. Kato. *On the Navier-Stokes initial value problem. I,* Arch. Rat. Mech. Anal., 16 (1961) 269-315.

- [123] G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset, and E. Terraneo. *Uniqueness in $L^3(\mathbb{R}^3)$ and other functional limit spaces for Navier-Stokes equations.* Rev. Mat. Iberoamericana 16, No. 3 (2000) 605-667.
- [124] I. Gallagher. *Applications of Schochet's methods to parabolic equations.* J. Math. Pures Appl. (9) 77, No. 10 (1998) 989-1054.
- [125] I. Gallagher and F. Planchon. *On global solution to a defocusing semi-linear wave equation.* Revista Matemática Iberoamericana, 19 (2003) 161-177.
- [126] I. Gallagher and F. Planchon. *On infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations : global 2D existence and 3D weak-strong uniqueness.* Arch. Rat. Mech. An. 161, No. 4 (2002) 307-337.
- [127] T. Gallay and C. E. Wayne. *Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation.* Comm. Math. Phys. 255, No. 1 (2005) 97-129.
- [128] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [129] A. Gangolli and Varadarajan V. S. *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups.* Springer-Verlag (1988).
- [130] V. Georgiev. *Semilinear hyperbolic equations.* Mathematical Society of Japan, Tokyo 2000.
- [131] V. Georgiev, H. Lindblad, and C. Sogge. *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations.* Amer. J. Math., 119 (1997) 1291-1319.
- [132] V. Georgiev and N. Visciglia. *Decay estimates for the wave equation with potential.* Comm. Partial Differential Equations 28, No. 7-8 (2003) 1325-1369.
- [133] Y. Giga and T. Miyakawa. *Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem.* Arch. Rational Mech. Anal. 89, No. 3 (1985) 267-281.
- [134] Y. Giga and H. Sohr. *Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains.* J. Funct. Anal. 102, No. 1 (1991) 72-94.
- [135] S. G. Gindikin and Karpelevic F. I. *Plancherel measure for symmetric Riemannian spaces of non-positive curvature.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 145 (1962) 252-255.
- [136] J. Ginibre. *Introduction aux équation de Schrödinger non linéaires.* Editions de l'Université de Paris-Sud, 1995.
- [137] J. Ginibre and T. Ozawa. *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$.* Commun. Math. Phys. 151, No. 3 (1993) 619-645.
- [138] J. Ginibre and G. Velo. *Conformal invariance and time decay for nonlinear wave equations.* Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique 47, (1987) 221-276.
- [139] J. Ginibre and G. Velo. *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation.* J. Funct. Anal. 133, No. 1 (1995) 50-68.
- [140] J. Ginibre and G. Velo. *The global Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation revisited.* Ann. Inst. H. Poincaré (C) Anal. Non Linéaire 2, No. 4 (1985) 309-327.
- [141] J. Ginibre and G. Velo. *The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited.* Ann. Inst. H. Poincaré - Anal. Non Linéaire 2, No. 4 (1985) 309-327.
- [142] J. Ginibre and G. Velo. *On a class of nonlinear Schrödinger equations.* J. Funct. Anal., 32 (1979) 1-71.
- [143] J. Ginibre and G. Velo. *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations.* J. Math. Pures Appl. (9) 64, No. 4 (1985) 363-401.
- [144] S. Giulini and G. Mauceri. *Analysis of a distinguished Laplacian on solvable Lie groups.* Math. Nachr., 163 (1993) 151-162.

- [145] R. T. Glassey. *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations.* J. Math. Phys., 18 (1977) 1794-1797.
- [146] N. Godet. *Blow up on a curve for a nonlinear Schrödinger equation on Riemannian surfaces.* arxiv.org/abs/1204.3301.
- [147] L. Grafakos. *Classical and modern Fourier analysis.* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ (2004), xii+931.
- [148] A. Grigor'yan and M. Noguchi. *The heat kernel on hyperbolic space.* Bull. London Math. Soc. 30, No. 6 (1998) 643-650.
- [149] M. Grillakis. *Regularity and asymptotic behavior of the wave equation with critical nonlinearity.* Annals of Mathematics, 132 (1990) 485-509.
- [150] M. Grillakis. *Regularity for the wave equation with a critical nonlinearity.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 45 (1992) 749-774.
- [151] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss. *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I.* J. Funct. Anal. 74, No. 1 (1987) 160-197.
- [152] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss. *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II.* J. Funct. Anal. 94, No. 2 (1990) 308-348.
- [153] P. Gérard and V. Pierfelice. *Nonlinear Schrödinger equation on four-dimensional compact manifolds.* Bull. Soc. Math. France 138, No. 1 (2010) 119-151.
- [154] Harish-Chandra. *Spherical function on semi-simple Lie group, I.* Amer. J. Math., 80 (1958) 241-310.
- [155] A. Hassell, T. Tao, and J. Wunsch. *A Strichartz inequality for the Schrödinger equation on non-trapping asymptotically conic manifolds.* Commun. Partial Differ. Equations 30, No. 2 (2005) 157-205.
- [156] E. Hebey. *Nonlinear Analysis on Manifolds : Sobolev Spaces and Inequalities.* Courant Lectures in Mathematics, New York (2000) AMS.
- [157] W. Hebisch and T. Steger. *Multipliers and singular integrals on exponential growth groups.* Math. Z., 245 (2003) 37-61.
- [158] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Academic Press (1978) / Amer. Math. Soc. (2001).
- [159] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Academic Press (1978) / Amer. Math. Soc. (2001).
- [160] S. Helgason. *Geometric analysis on symmetric spaces.* Amer. Math. Soc. (1994).
- [161] S. Helgason. *Groups and geometric analysis (integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions).* Academic Press (1984) / Amer. Math. Soc. (2002).
- [162] S. Herr, D. Tataru, and N. Tzvetkov. *Global well-posedness of the energy-critical nonlinear Schrödinger equation with small initial data in $H^1(\mathbb{T}^3)$.* Duke Math. J. 159, No. 2 (2011) 329-349.
- [163] C.S. Herz. *Sur le phénomène de Kunze-Stein.* . R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 271 (1970) 491-493.
- [164] K. Hidano. *Conformal conservation law, time decay and scattering for nonlinear wave equation.* Journal d'analysis Mathématique, 91(2003) 269-295.
- [165] E. Hopf. *Über die Aufgangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen.* Math. Nachr., 4 (1951) 213-231.
- [166] L.V. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators III.* Springer-Verlag (1985, 1994, 2007).

- [167] A. D. Ionescu. *Rearrangement inequalities on semisimple Lie groups.* Math. Ann., 332 (2005) 739-758.
- [168] A. D. Ionescu, B. Pausader, and G. Staffilani. *On the global well-posedness of energy-critical Schrödinger equations in curved spaces.* Anal. PDE 5, No. 4 (2012) 705-746.
- [169] A.D. Ionescu. *Singular integrals on symmetric spaces II.* Trans. Amer. Math. Soc., 355 (2003) 3359-3378.
- [170] A.D. Ionescu. *Singular integrals on symmetric spaces of real rank one.* Duke Math. J., 114 (2002) 101-122.
- [171] A.D. Ionescu and G. Staffilani. *Semilinear Schrödinger flows on hyperbolic spaces.* Math. Ann., 345 (2009) 133-158.
- [172] H. Iwashita. *L_q - L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces.* Math. Ann. 285, No. 2 (1989) 265-288.
- [173] F. John. *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions.* Manuscripta Math., 28 (1979) 235-265.
- [174] J. Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition (2008).
- [175] J.-L. Journé, A. Soffer, and C. D. Sogge. *Decay estimates for Schrödinger operators.* Comm. Pure Appl. Math., 44 (1991) 573-604.
- [176] K. Kaizuka. *Resolvent estimates on symmetric spaces of non-compact type.* J. Math. Soc. Japan 66, No. 3 (2014) 895-926.
- [177] L. V. Kapitanski. *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality.* (Russian) Algebra i Analiz 1, No. 3 (1989) 127-159; translation in Leningrad Math. J. 1, No. 3 (1990) 693-726.
- [178] L. Kapitanskii. *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality.* Leningrad Math. J., 1 (1990) 693-726.
- [179] Kapitanskii. *Weak and yet weaker solutions of semi linear wave equations.* Comm. Partial Diff. Equations, 19 (1994) 1629-1676.
- [180] A. Kaplan. *Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms.* Trans. Amer. Math. Soc., 258 (1975) 145-159.
- [181] T. Kato. *On nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. H. Poincaré (A) Phys. Théor. 46, No. 1 (1987) 113-129.
- [182] T Kato. *Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in R^m with applications to weak solutions.* Math. Z., 187 (1984) 471-480.
- [183] T. Kato. *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators.* Math. Ann., 162 (1965/1966) 258-279.
- [184] O. Kavian. *A remark on the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 299, No. 1 (1987) 193-203.
- [185] M. Keel and T. Tao. *Endpoint Strichartz estimates.* Amer. J. Math. 120, No. 5 (1998) 955-980.
- [186] C. E. Kenig and F. Merle. *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case.* Invent. Math. 166, No. 3 (2006) 645-675.
- [187] C. E. Kenig and F. Merle. *Global Well-posedness, scattering and blow-up for the energy critical focusing non-linear wave equation.* Acta Mathematica, 201 (2008) 147-212.

- [188] C. E. Kenig and F. Merle. *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical focusing non-linear wave equation.* Acta Math. 201, No. 2 (2008) 147-212.
- [189] C. E. Kenig and F. Merle. *Nondispersive radial solutions to energy supercritical non-linear wave equations, with applications.* American Journal of Mathematics 133, No. 4 (2011) 1029-1065.
- [190] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *Smoothing effects and local existence theory for generalized nonlinear Schrödinger equations.* Invent. Math., 134 (1998) 489-545.
- [191] C.E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *Global well-posedness for semi-linear wave equations.* Comm. Partial Differential Equations, 25 (2000) 1741- 1752.
- [192] S. Keraani. *On the blow up phenomenon of the critical nonlinear Schrödinger equation.* J. Funct. Anal. 235, No. 1 (2006), 171-192.
- [193] B. Khesin and G. Misiolek. *Euler and Navier-Stokes equations on the hyperbolic plane.* Proc. Nat. Acad. Sci. 109, No. 45 (2012) 18324–18326.
- [194] R. Killip and M. Visan. *The defocusing energy-supercritical nonlinear wave equation in three space dimensions.* Transactions of the American Mathematical Society, 363 (2011) 3893-3934.
- [195] R. Killip and M. Visan. *The radial defocusing energy-supercritical nonlinear wave equation in all space dimensions.* Proceedings of the American Mathematical Society, 139 (2011) 1805-1817.
- [196] S. Klainerman and G. Ponce. *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations.* Comm. Pure Appl. Math., 36 (1983) 133-141.
- [197] A. W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction.* Progress Math. 140, Birkhauser (1996).
- [198] A. W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups.* Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, NJ (1986).
- [199] H. Koch and F. Ricci. *Spectral projections for the twisted Laplacian.* Studia Math. 180, No. 2 (2007) 103-110.
- [200] H. Koch and D. Tataru. *L^p eigenfunction bounds for the Hermite operator.* Duke Math. J. 128, No. 2 (2005) 369-392.
- [201] H. Koch and D. Tataru. *Well Posedness for the Navier Stokes equations.* Adv. Math. 157, (2001), 22-35.
- [202] K. Kodaira. *Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory).* Ann. of Math. 2, No. 50 (1949) 587-665.
- [203] T.H. Koornwinder. *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups, in Special functions : Group theoretical aspects and applications.* R. A. Askey and al. (eds.), Reidel (1984) 1-85.
- [204] J. Krieger and W. Schlag. *Concentration compactness for critical wave maps.* European Mathematical Society (EMS), Zurich (2012), vi+484.
- [205] S. B. Kuksin. *Analysis of Hamiltonian PDE's.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 19 (2000) xii+212.
- [206] R.A. Kunze and E.M. Stein. *Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 unimodular group.* Amer. J. Math., 82 (1960) 1-62.
- [207] O. A. Ladyzhenskaya. *Unique solvability in large of a three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry.* Zapisky Nauchnych Sem. LOMI 7 (1968) 155-177.
- [208] A Lawrie, S.-J. Oh, and S. Shahshahani. *Stability of stationary equivariant wave maps from the hyperbolic plane.* arxiv.org/abs/1402.5981.

- [209] J. Leray. *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Acta Mathematica, 63 (1993) 193-248.
- [210] P. Li and S.-T. Yau. *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator.* Acta Math., 156 (1986) 153-201.
- [211] F.-H. Lin. *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem.* Comm. Pure. Appl. Math., 51 (1998) 241-257.
- [212] J.-E. Lin and W. A. Strauss. *Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation.* J. Funct. Anal., 30 (1978) 245-263.
- [213] H. Lindblad. *A Sharp Counterexample to Local Existence of Low Regularity Solutions to Non-linear Wave Equations.* Duke Math. J., 72 (1993) 503-539.
- [214] H. Lindblad and C. Sogge. *On existence and scattering with minimal regularity for semi-linear wave equations.* J. Funct. Anal., 130 (1995) 357-426.
- [215] P.-L. Lions and N. Masmoudi. *Incompressible limit for a viscous compressible fluid.* J. Math. Pures Appl. (9) 77, No. 6 (1998) 585-627.
- [216] P.-L. Lions and N. Masmoudi. *Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes system in L^N .* Comm. Partial Differential Equations 26, No. 11-12 (2001) 2211-2226.
- [217] R.L. Lipsman. *An indicator diagram II. The L_p convolution theorem for connected unimodular groups.* Duke Math. J., 37 (1970) 459-466.
- [218] N. Lohoué. *Estimation des projecteurs de De Rham Hodge de certaines variétés riemanniennes non-compactes.* Math. Nachr. 279, No. 3 (2006) 272-298.
- [219] N. Lohoué. *Inégalités de Sobolev pour les sous laplaciens de certains groupes unimodulaires.* Geom. Funct. Anal., 2 (1992) 394-420.
- [220] N. Lohoué and Th. Rychener. *Some function spaces on symmetric spaces related to convolution operators.* J. Funct. Anal., 55 (1984) 200-219.
- [221] N. Mandouvalos. *Heat kernel bounds for complex time and Schrödinger kernel on hyperbolic spaces and Kleinian groups.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 153, No. 2 (2012) 249-259.
- [222] H. P. McKean. *An upper bound to the spectrum of A on a manifold of negative curvature.* J. Differential Geometry, 4 (1970) 359-366.
- [223] F. Merle. *Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power.* Duke Math. J. 69, No. 2 (1993) 427-454.
- [224] F. Merle and P. Raphaël. *The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical Schrödinger equation.* Ann. Math. (2) 161, No. 1 (2005) 157-222.
- [225] F. Merle and P. Raphaël. *On universality of blow up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation.* Invent. Math. 156, No. 3 (2004) 565-672.
- [226] F. Merle and P. Raphaël. *Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation.* Geom. Funct. Anal. 13, No. 3 (2003) 591-642.
- [227] J. Metcalfe and M.E. Taylor. *Dispersive wave estimates on 3D hyperbolic space.* Proc. Amer. Math. Soc. 140, No.11 (2012) 3861-3866.
- [228] C. Miao and B. Zhang. *H^s -global well-posedness for semi-linear wave equations.* J. Math. Ann. Appl., 283 (2003) 645-666.
- [229] M. Mitrea and M. Taylor. *Navier-Stokes equations on Lipschitz domains in Riemannian manifolds.* Math. Ann. 321, No. 4 (2001) 955-987.
- [230] A. Miyachi. *On some estimates for the wave equation in L^p and H^p .* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27, No. 2 (1980) 331-354.

- [231] S.J. Montgomery-Smith. *Time decay for the bounded mean oscillation of solutions of the Schrödinger and wave equations.* Duke Math. J. 91, No. 2 (1998) 393-408.
- [232] D. Müller and F. Ricci. *Analysis of second order differential operators on Heisenberg groups. I.* Invent. Math. 101, No. 3 (1990) 545-582.
- [233] D. Müller and A. Seeger. *Sharp l^p -estimates for the wave equation on heisenberg type groups.* in preparation, 2008.
- [234] D. Müller and E. M. Stein. *L^p -estimates for the wave equation on the Heisenberg group.* Rev. Mat. Iberoamericana 15, No. 2 (1999) 297-334.
- [235] D. Müller and C. Thiele. *Wave equation and multiplier estimates on $ax + b$ groups.* Studia Math., 179 (2007) 117-148.
- [236] D. Müller and M. Vallarino. *Wave equation and multiplier estimates on Damek-Ricci spaces.* J. Fourier Anal. Appl., 16 (2010) 204-232.
- [237] K. Nakanishi and T. Ozawa. *Remarks on scattering for nonlinear Schrödinger equations.* NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 9, No. 1 (2002) 45-68.
- [238] K. Nakanishi and W. Schlag. *Invariant manifolds and dispersive Hamiltonian evolution equations.* European Mathematical Society (EMS), Zurich Lectures in Advanced Mathematics (2011), vi+253).
- [239] J. Nash. *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.* Amer. J. Math., 80 (1958) 931-954.
- [240] G. Olafsson and S. Zheng. *Function spaces associated with Schrödinger operators : the Pöschl-Teller potential.* J. Fourier Anal. Appl. 12, No. 6 (2006) 653-674.
- [241] E. M. Ouhabaz. *L^p contraction semigroups for vector valued functions.* Positivity 3, No. 1 (1999) 83-93.
- [242] T. Ozawa. *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension.* Commun. Math. Phys. 139, No. 3 (1991) 479-493.
- [243] E. Pedon. *Harmonic analysis for differential forms on complex hyperbolic spaces.* J. Geom. Phys. 32, No. 2 (1999) 102-130.
- [244] J.C. Peral. *L^p -estimates for the wave equation.* J. Funct. Anal. 36, No. 1 (1980) 114-145.
- [245] G. Perelman. *On the formation of singularities in solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation.* Ann. Henri Poincaré 2, No. 4 (2001) 605-673.
- [246] B. Perthame and L. Vega. *Morrey-Campanato estimates for Helmholtz equations.* Journal of Functional Analysis, 164 (1999) 340-355.
- [247] V. Pierfelice. *Decay estimate for the wave equation with a small potential.* NoDEA Nonlinear Differential 13, No. 5-6 (2007) 511-530.
- [248] V. Pierfelice. *Dispersive estimates for the wave and Schrödinger Equations with potentials of critical decay in higher dimension.* en préparation.
- [249] V. Pierfelice. *Dispersive estimates on product manifolds.* preprint arXiv :1012.0442v1.
- [250] V. Pierfelice. *The incompressible Navier-Stokes equations on non-compact manifolds.* preprint arXiv :1406.1644v1.
- [251] V. Pierfelice. *Strichartz estimates for the Schrödinger and heat equations perturbed with singular and time dependent potentials.* Asymptotic Analysis 47, No. 1-2 (2006), 1-18.
- [252] V. Pierfelice. *Weighted Strichartz estimates for the radial perturbed Schrödinger equation on the hyperbolic space.* Manuscripta Math. 120, No. 4 (2006) 377-389.
- [253] V. Pierfelice. *Weighted Strichartz estimates for the Schrödinger and wave equations on Damek-Ricci spaces.* Math. Z. 260 No. 2 (2008) 377-392.

- [254] F. Planchon. *Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces for the incompressible Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3* . Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire, 13 (1996) 319-336.
- [255] F. Planchon, J. Stalker, and S. Tahvilard-Zadeh. *L^p estimates for the wave equation with the inverse-square potential*. Discrete Continuous Dyn. Systems 9, No. 2 (2003) 427-442.
- [256] F. Planchon and L. Vega. *Bilinear virial identities and applications*. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 42, No. 2 (2009), 261-290.
- [257] G. Ponce and T. Sideris. *Local regularity of nonlinear wave equations in three space dimensions*. Comm. Partial Differential Equations, 18 (1993) 65-130.
- [258] V. Priebe. *Solvability of the Navier-Stokes equations on manifolds with boundary*. Manuscripta Math. 83, No. 2 (1994) 145-159.
- [259] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics vol. II Fourier Analysis and Self Adjointness*. Academic Press, New York, San Francisco , London, 1975.
- [260] F. Ricci. *The spherical transform on harmonic extensions of H -type groups*. Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 50 (1992) 381-392.
- [261] I. Rodianski and W. Schlag. *Time decay for solutions of Schrödinger equations with rough and time-dependent potentials*. Invent. Math. 155, No. 3 (2004) 451-513.
- [262] F. Rouvière. *Espaces de Damek-Ricci, géométrie et analyse*. Ecole d'été du C.I.M.P.A., Kenitra (1999).
- [263] E. Ryckman and M. Visan. *Global well-posedness and scattering for the defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in \mathbb{R}^{1+4}* . Amer. J. Math. 129, No. 1 (2007) 1-60.
- [264] P. Sawyer. *The Abel transform on symmetric spaces of non-compact type*. Amer. Math. Soc., Providence, RI 210 (2003) 331-355.
- [265] A. Seeger, C.D. Sogge, and E. M. Stein. *Regularity properties of Fourier integral operators*. Ann. of Math. 134, No. 2 (1991) 231-251.
- [266] A. G. Setti. *A lower bound for the spectrum of the Laplacian in terms of sectional and Ricci curvature*. Proceedings of the american mathematical society 112, No. 1 (1991) 277-282.
- [267] J. Shatah and M. Struwe. *Geometric wave equations*. Courant Lecture Notes in Mathematics (vol. 2). New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1998.
- [268] J. Shatah and M. Struwe. *Regularity results for nonlinear wave equations*. Annals of Mathematics, 138 (1993) 503-518.
- [269] J. Shatah and M. Struwe. *Well-posedness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth*. International Mathematics Research Notices, 7(1994) 303-309.
- [270] R. Shen. *On the energy-critical semi-linear shifted wave equation on the hyperbolic spaces*. arxiv.org/abs/1408.0331.
- [271] R. Shen. *On the Energy Subcritical, Non-linear Wave Equation in R^3 with Radial Data $p \in (3, 5)$* . (2012) : to appear in Analysis and PDE, preprint arXiv : 1208.2108.
- [272] R. Shen and G. Staffilani. *A semi-linear shifted wave equation on the hyperbolic spaces with applications on a quintic wave equation on \mathbb{R}^2* . arxiv.org/abs/1402.3879.
- [273] T. Sideris. *Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions*. J. Differential Equations 52, No. 3 (1984) 378-406.
- [274] P. Sjolin. *Regularity of solutions to the Schrödinger equation*. Duke Math. J., 55 (1987) 699-715.

- [275] C. D. Sogge. *Fourier integrals in classical analysis*. Cambridge Tracts in Mathematics 105. Cambridge University Press (1993).
- [276] C. D. Sogge. *Lectures on Nonlinear Wave Equations*. Monographs in Analysis II, International Press, 1995.
- [277] J. Sterbenz and D. Tataru. *Regularity of wave-maps in dimension $2 + 1$* . Comm. Math. Phys. 298, No. 1 (2010) 231-264.
- [278] W. Strauss. *Nonlinear Wave Equations*. CBMS Reg. Conf. Ser. Math. 73, Amer. Math. Soc. (1989).
- [279] W. A. Strauss. *Nonlinear scattering energy at low energy*. J. Funct. Anal., 41 (1981) 110-133.
- [280] R. Strichartz. *Analysis of the Laplacian on the Complete Riemannian manifolds*. Journal of Functional Analysis, 52 (1983) 48-79.
- [281] R. Strichartz. *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*. Duke Math. J., 44 (1977) 705-714.
- [282] C. Sulem and P. L. Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*. Applied Mathematical Sciences. 139. New York, NY : Springer. xvi, 350 ,1999.
- [283] Z.I. Szabo. *The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds*. J. Diff. Geom., 31 (1990) 1-28.
- [284] Z.I. Szabo. *Spectral theory for operator families on Riemannian manifolds*. Differential geometry, UCLA (1990), R. Greene and S.T. Yau (eds.) Proc. Symp. Pure Math., 54, 3 (1993) 615-665.
- [285] T. Tao. *Counterexamples to the $n = 3$ endpoint Strichartz estimate for the wave equation*. preprint.
- [286] T. Tao. *Global regularity of wave maps. II. Small energy in two dimensions*. Comm. Math. Phys. 224, No. 2 (2001) 443-544.
- [287] T. Tao. *Low regularity semi-linear wave equations*. Comm. Partial Differential Equations 24, No. 3-4 (1999) 599-629.
- [288] T. Tao. *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics 106. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). xv, 373, 2006.
- [289] T. Tao. *Spherically averaged endpoint Strichartz estimates for the two-dimensional Schrödinger equation*. Commun. Partial Differ. Equations 25, No. 7-8 (2000) 1471-1485.
- [290] T. Tao, M. Visan, and X. Zhang. *Minimal-mass blowup solutions of the mass-critical*. Forum Mathematicum (to appear).
- [291] T. Tao, M. Visan, and X. Zhang. *The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities*. Comm. Partial Differential Equations 32, No. 7-9 (2007) 1281-1343.
- [292] D. Tataru. *Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for the semilinear wave equation*. Trans. Amer. Math. Soc. 353, No. 2 (2001) 795-807.
- [293] M. Taylor. *Partial Differential Equations III : Nonlinear Equations*. Nonlinear equations, volume 117 of Applied Mathematical Sciences. Springer New York second edition (2011).
- [294] S. Thangavelu. *Harmonic analysis on the Heisenberg group*. Progress in Mathematics (vol. 159). Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.
- [295] S. Thangavelu. *Riesz transforms and the wave equation for the Hermite operator*. Comm. Partial Differential Equations 15, No. 8 (1990) 1199-1215.

- [296] L. Thomann. *The WKB method and geometric instability for nonlinear Schrödinger equations on surfaces.* Bull. Soc. Math. France 136, No. 2 (2008) 167-193.
- [297] J. Tie and M. W. Wong. *Wave kernels of the twisted Laplacian.* Modern trends in pseudo-differential operators (vol. 172). Oper. Theory Adv. Appl. 107-115 Birkhäuser, Basel.
- [298] N. Totz and S. Wu. *A rigorous justification of the modulation approximation to the 2D full water wave problem.* Comm. Math. Phys. 310, No. 3 (2012) 817-883.
- [299] H. Triebel. *Theory of function spaces II.* Monographs Math. 84, Birkhauser (1992).
- [300] Y. Tsutsumi. *Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 43 (1985) 321-347.
- [301] Y. Tsutsumi and K. Yajima. *The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations.* Bull. Amer. Math. Soc., 11 (1984) 186-188.
- [302] Y. Tsutsumi and K. Yajima. *The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations.* Bull. Amer. Math. Soc., 11 (1984) 186-188.
- [303] M. Uno. *On Sectional Curvature of Boggino-Damek-Ricci Type Spaces.* Tokyo J. of Math. 23, No. 2 (2000) 417-427.
- [304] M. Vallarino. *Spectral multipliers on harmonic extensions of H -type groups.* J. Lie Theory, 17 (2007) 163-189.
- [305] N. Th. Varopoulos. *The heat kernel on Lie groups.* Rev. Mat. Iberoamericana 12, No. 1 (1996) 147-186.
- [306] L. Vega. *Schrödinger equations : pointwise convergence to the initial data.* Proc. Amer. Math. Soc. 102, No. 4 (1988) 874-878.
- [307] M.C. Vilela. *Regularity of solutions to the free Schrödinger equation with radial initial data.* Ill. J. Math. 45, No. 2 (2001) 361-370.
- [308] M. Visan. *The defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in higher dimensions.* Duke Math. J. 138, No. 2 (2007) 281-374.
- [309] M. Visan and X. Zhang. *Global well posedness and scattering for a class of nonlinear Schrödinger equations below the energy space.* Differential Integral Equations 22, No. 1-2 (2009) 99-124.
- [310] W. Von Wahl. *L^p -decay rates for homogeneous wave-equations.* Math. Z., 120 (1971) 93-106.
- [311] M. I. Weinstein. *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates.* Comm. Math. Phys. 87, No. 4 (1982/83), 567-576.
- [312] F.B. Weissler. *The Navier-Stokes initial value problem in L^p .* Arch. Rational Mech. Anal. 74, No. 3 (1980) 219-230.
- [313] K. Yajima. *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations.* Commun. Math. Phys., 110 (1987) 415-426.
- [314] K. Yajima. *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations.* Communications in Mathematical Physics 110, No. 3 (1987) 415-426.
- [315] K. Yajima. *Schrödinger evolution equations with magnetic fields.* J. Analyse Math., 56 (1991) 29-76.
- [316] E. Zuazua. *Large Time Asymptotics For Heat and Dissipative Wave Equations.* Lectures Notes 2003, <http://www.uam.es/enrique.zuazua>.

AUTOUR DE L'ANALYSE HARMONIQUE ET D'ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION
SUR LES VARIÉTÉS

RÉSUMÉ : Dans les trente dernières années, l'étude des propriétés dispersives des équations d'évolution linéaires et leurs applications aux équations non linéaires de la physique mathématique (parmi les plus importantes on peut citer l'équation de Schrödinger, l'équation des ondes, l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Navier-Stokes) constituent un "champ" de recherche en forte expansion et au confluent de plusieurs domaines des mathématiques. Suite aux travaux de Strichartz, Bourgain, Tao..., certaines techniques d'analyse harmonique se sont avérées particulièrement performantes pour étudier ce type de questions. En effet, dans la théorie moderne de l'étude du caractère localement ou globalement bien posé d'un problème de Cauchy non-linéaire, l'outil commun est le rôle crucial joué par les propriétés dispersives du problème de Cauchy linéaire.

Mes travaux de recherche se situent donc au carrefour de l'analyse harmonique et des équations aux dérivées partielles et se concentrent sur l'étude des propriétés dispersives de ces équations d'évolution libres ou perturbées par des potentiels et aussi dans certains contextes non euclidiens. En particulier des estimations de Strichartz meilleures que dans le cas euclidien (dans le sens où une plus grande plage d'admissibilité est autorisée) ont été obtenues pour l'équation de Schrödinger sur les espaces hyperboliques réels et les espaces de Damek-Ricci (qui contiennent tous les espaces symétriques de rangs un). On a aussi établi ces estimations pour l'équation des ondes non-shiftée (de type Klein-Gordon) et l'équation des ondes shiftée. L'analyse utilise de manière cruciale les propriétés algébriques et d'analyse harmonique de ces espaces dont notamment le phénomène de Kunze-Stein. Ces estimations sont ensuite utilisées pour démontrer le caractère bien posé (localement en temps ou globalement à données petites) de problèmes de Cauchy non-linéaires pour des versions non-linéaires de ces équations. On met en particulier en évidence que toutes les non-linéarités sont à courte portée sur ces espaces à courbure négative. On s'intéresse ensuite aux équations de Navier-Stokes incompressible sur des variétés non compactes à courbure négative. Dans ce cadre, plusieurs difficultés nouvelles apparaissent, notamment, même en dimension deux d'espace, des phénomènes de non unicité dus à la présence de 1-formes harmoniques non-triviales sont possibles. On montre d'abord des résultats de dispersion et de régularisation pour le problème linéaire de Stokes ou de la chaleur associé. Ces estimations sont ensuite utilisées pour obtenir des résultats à la Fujita-Kato sur le problème de Cauchy non-linéaire.

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS - UFR SCIENCES

LABORATOIRE MAPMO

Bâtiment de mathématiques - Rue de Chartres

B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2, FRANCE

