Approximation gaussienne forte de processus densité-dépendants sur de grandes échelles de temps

Adrien PRODHOMME

Groupe PEIPS

6 mai 2020

Plan

I) Approximation forte de marches aléatoires : théorème KMT

II) Approximation forte de processus densité-dépendants

III) Applications, perspectives

I) Approximation forte de marches aléatoires : le théorème KMT

Approximation gaussienne faible

$(X_i)_{i \geqslant 1}$ i.i.d $\quad \mathbb{E}[X_i] = 0, \quad \mathbb{E}[X_i^2] = 1$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

Approximation "faible" :

Théorème (Donsker, 1951)

$$\left(S_{\lfloor nt \rfloor} / \sqrt{n} \right)_{t \geqslant 0} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)} (B(t))_{t \geqslant 0}$$

mouvement brownien standard

Approximation gaussienne forte : théorème KMT.

Approx forte → couplage

Théorème (Komlós, Major, Tusnády, 1976)

Supposons $\exists \alpha > 0$, $\mathbb{E}\left[e^{\alpha |X_1|}\right] < \infty$.

Alors il existe $a, b, c > 0$ et un couplage entre $(S_n)_{n \geq 0}$ et un mouvement brownien standard B tels que $\forall n \geq 1$, $\forall x > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq k \leq n} |S_k - B(k)| > c \log(n) + x\right] \leq a e^{-bx}$$

$$\hookrightarrow \mathbb{P}\left(|S_n - B_n| > \left(c + \frac{2}{b}\right)\log n\right) \leq \frac{a}{n^2}$$

$$|S_n - B_n| = O(\log n) \quad \text{p.s.}$$

(Sous $\mathbb{E}|X_1|^p < \infty$ $(\underline{p > 2})$, $|S_n - B_n| = o(n^{1/p})$ p.s. possible)

Corollaire : Il existe $a', b', c' > 0$ et un couplage entre un processus de Poisson standard P et un mouvement brownien standard B t.q :

$$\forall t \geq 1, \quad \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |P(s) - s - B(s)| > c' \log(t) + x\right] \leq a' e^{-b'x}.$$

= application à $X_i \sim \mathrm{Poi}(1) - 1$ de KMT.

+ contrôle des fluctuations entre les entiers

$$\left(\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\widetilde{P}(s)| > c_1 \log(t) + x \right) \leq \frac{c_2}{t} e^{-c_3 x} \right)$$

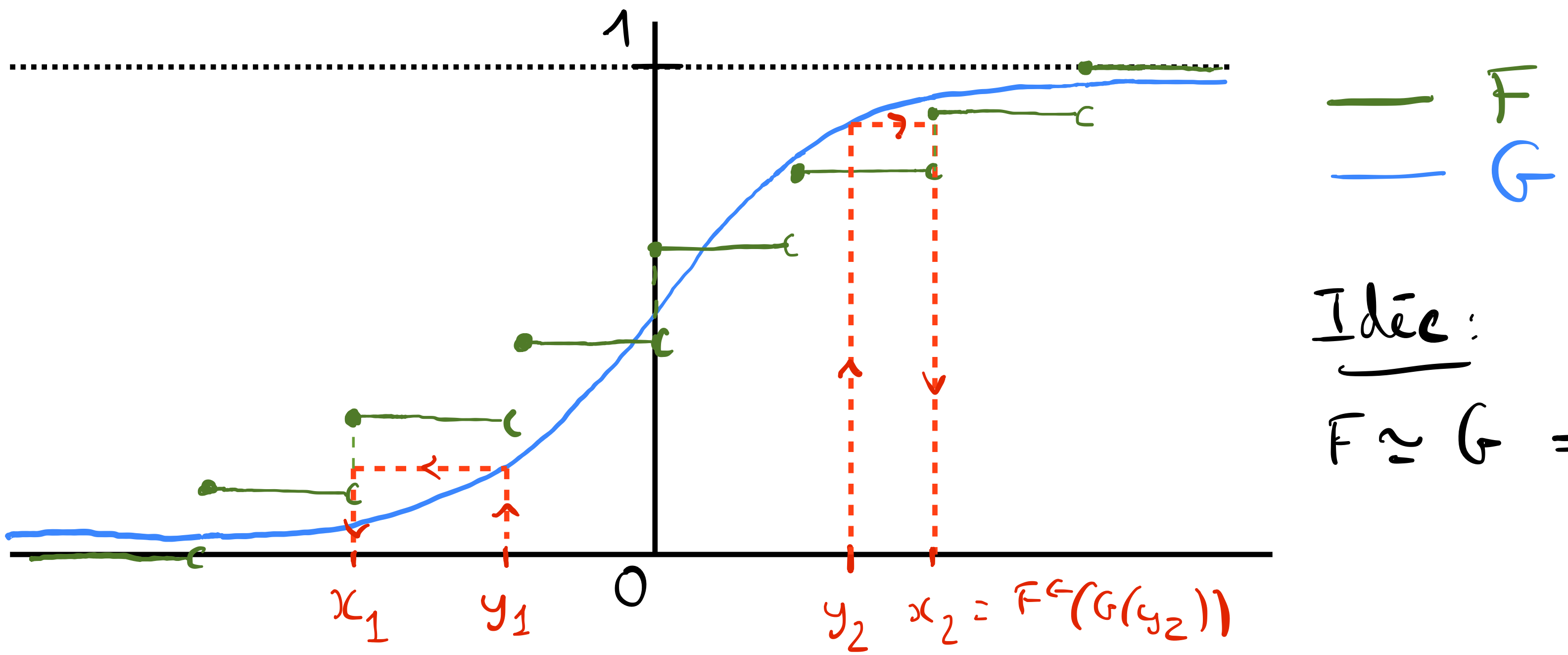
Couplage par les quantiles

Soit $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, de fonctions de répartition F, G.

$F^{\leftarrow}, G^{\leftarrow}$ fonctions des quantile : $F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$.

Couplage par les quantiles : $X = F^{\leftarrow}(U)$, $Y = G^{\leftarrow}(U)$, $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

$X = F^{\leftarrow}(G(Y))$ si G continue



Idée :

$F \simeq G \Rightarrow |X - Y|$ petit

Construction dyadique

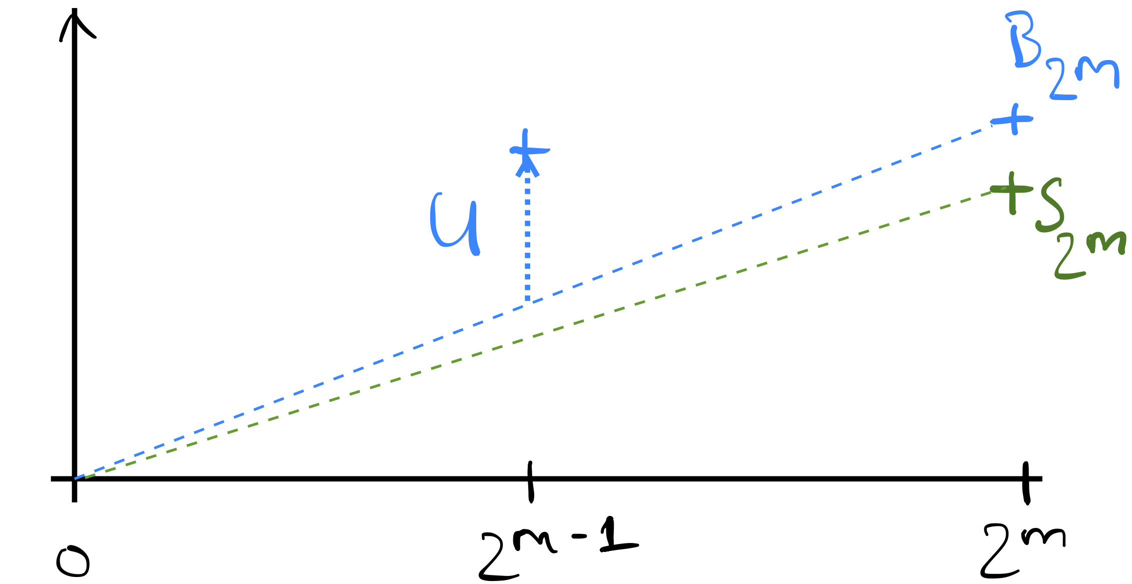
$X_i \sim \mathrm{Poi}(1) - 1$. $(B_k)_{0 \le k \le 2^m}$ brownien donné, $m \geq 1$.

<u>But</u> : construire $(S_k)_{0 \le k \le 2^m}$.

* <u>Étape 0</u> : $k = 2^m$: couplage par les quantiles

$$S_{2^m} := F_{2^m}^{\leftarrow}\left(G_{2^m}\left(B_{2^m}\right)\right)$$

* <u>Étape 1</u> : $k = 2^{m-1}$

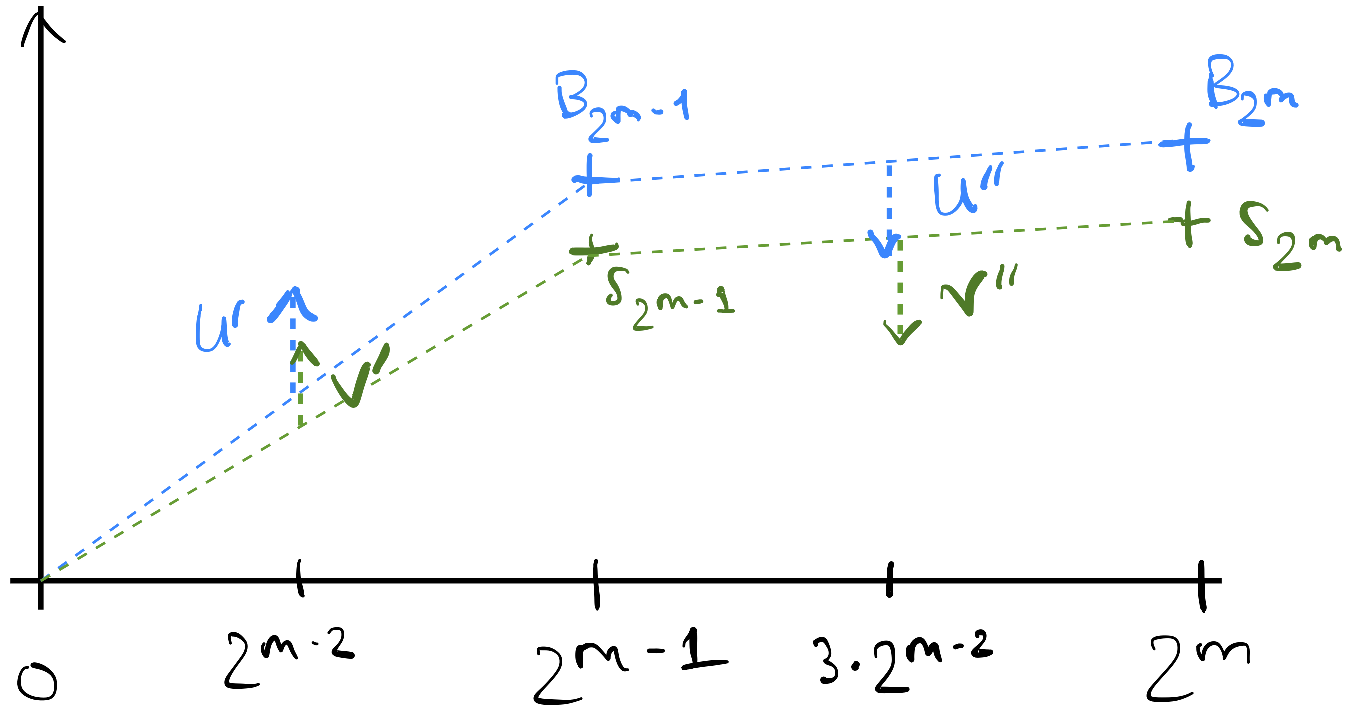


$$B_{2^{m-1}} = \frac{1}{2} B_{2^m} \overset{\perp\!\!\!\perp}{+} U$$

$$U \sim \mathcal{N}(0, 2^{m-2}).$$

couplage par les quantiles conditionnels

* **Étapes 2, …, m :** on continue



In fine : concaténation de couplages sur $[\![0,1]\!]$, $[\![1,3]\!]$, $[\![3,7]\!]$, $[\![8,15]\!]$, etc.

$m=0$ $\quad m=1$ $\quad m=2$ $\quad m=3$ $\quad \ldots$

II) Approximation forte de processus densité-dépendants

Processus "densité-dépendants"

$(N^K)_{K\geq 1}$ suite de processus markoviens de saut à valeurs dans $\mathbb{N}^d$ $(d \geq 1)$

$E \subseteq \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ ensemble fini d'incréments

$\lambda_e : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$, $e \in E$

$$n \to n+e \quad \text{à taux} \begin{cases} K\lambda_e\left(\frac{n}{K}\right) & \text{si } e \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Processus d'intérêt : $\boxed{X^K = \dfrac{N^K}{K}}$.

Exemples (N^K) :

- naissance / mort à croissance logistique ; $d, b > 0$

$$n \to n+1 \quad \text{à taux } bn = K\, b\, n/K$$

$$n \to n-1 \quad n(d + \underbrace{n/K}_{\text{compétition d'intensité } K^{-1}})$$

- modèle SIRS (épidémiologie) ; $\lambda, \gamma, \rho > 0$

$$n = (n_s, n_i, n_r) \xrightarrow{\lambda n_s n_i / K} n + (-1, 1, 0) \quad \text{infection}$$

$$\xrightarrow{\gamma n_i} n + (0, -1, 1) \quad \text{guérison}$$

$$\xrightarrow{\rho n_r} n + (1, 0, -1) \quad \text{perte d'immunité}$$

K = population totale (constante)

Théorèmes limites

(H) : $\lambda_e \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^d, \mathbb{R})$

$F : x \longmapsto \sum_{e \in E} \lambda_e(x)\, e$ champ de vecteurs

Soit $x \in \mathbb{R}_+^d$ tel que $\exists \varphi_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^d$, $\begin{cases} \dot{\varphi}_x = F(\varphi_x) \\ \varphi_x(0) = x \end{cases}$

Not : $X_x^k = X^k \mid X^k(0) = \lfloor kx \rfloor / k$

L
G
N

$$\boxed{\forall T > 0, \quad \left(X_x^k(t)\right)_{0 \leq t \leq T} \underset{k \to \infty}{\Longrightarrow} \left(\varphi_x(t)\right)_{0 \leq t \leq T}}$$

T
L
C

$\forall T>0,\quad \sqrt{K}\left(X_x^K - \varphi_x\right)_{|[0,T]} \xrightarrow[K\to\infty]{\mathbb{D}([0,T]),\ \|\cdot\|_\infty} U_x$

où $U_x(t) = \int_0^t F'(\varphi_x(s))\, U_x(s)\, ds + \sum_{e\in E} \left[\int_0^t \sqrt{\lambda_e(\varphi_x(s))}\, dB_e(s)\right] e$

processus gaussien

(B_e, $e\in E$ mouvements browniens standards indépendants)

⚠ Convergence dans $\mathbb{D}([0,T])$ à T fixé

Réf : Markov Processes, Characterization & Convergence (Ethier, Kurtz)

Skorokhod $\longrightarrow$ versions des X_x^K $(K \in \mathbb{N}^*)$ et U_x t.q.

$$\sqrt{K}\left(X_x^K - \varphi_x\right)_{|[0,T]} \xrightarrow[K\to\infty]{} U_x \text{ p.s. pour } \|\cdot\|_\infty$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left\| \sqrt{K}\left(X^K - \varphi_x\right) - U_x \right\|_{\infty,[0,T]} \geq \varepsilon \right) \xrightarrow[K\to\infty]{} 0$

Question 1 : étendre à $\varepsilon(K)$, où $\varepsilon(K) \to 0$

Question 2 : $T(K)$, où $T(K) \to \infty$

Réponse à 1 (Kurtz)

H : λ_e de classe $\mathcal{C}^2$ et $\lambda_e(\varphi_x(s)) \neq 0$ $(\forall\, 0 \leq s \leq T,\ e \in E)$

$$\boxed{\text{Il existe } C_T > 0 \text{ et des couplages } (X^K_x, U_x) \text{ tels que } \mathbb{P}\left[\left\| \sqrt{K}\,(X^K_x - \varphi_x) - U_x \right\|_{\infty,[0,T]} \geq C_T \frac{\log K}{\sqrt{K}}\right] \xrightarrow[K\to\infty]{} 0}$$

$$C_T \approx e^{2MT}$$

Heuristique pour 2 : $\varepsilon > 0$ $\quad e^{2MT} \dfrac{\log K}{\sqrt{K}} = \varepsilon$

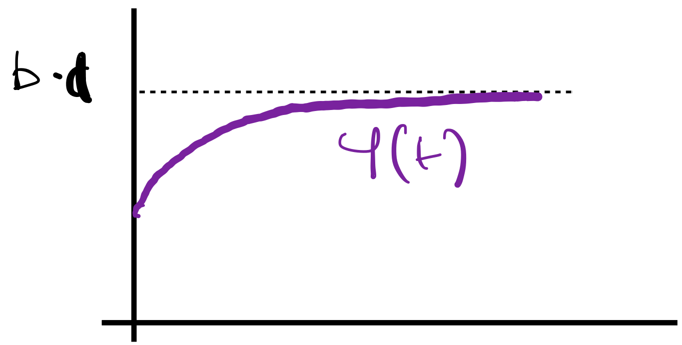
$$T \simeq C'_\varepsilon \log K$$

Cas où la limite fluide converge

Supposons que F admette un point d'équilibre x_* exponentiellement stable :

$$\begin{cases} F(x_*) = 0 \\ \forall \lambda \in Sp(F'(x_*)),\ Re(\lambda) < 0 \end{cases}$$

- naissance et mort logistique (surcritique, $b > d$)



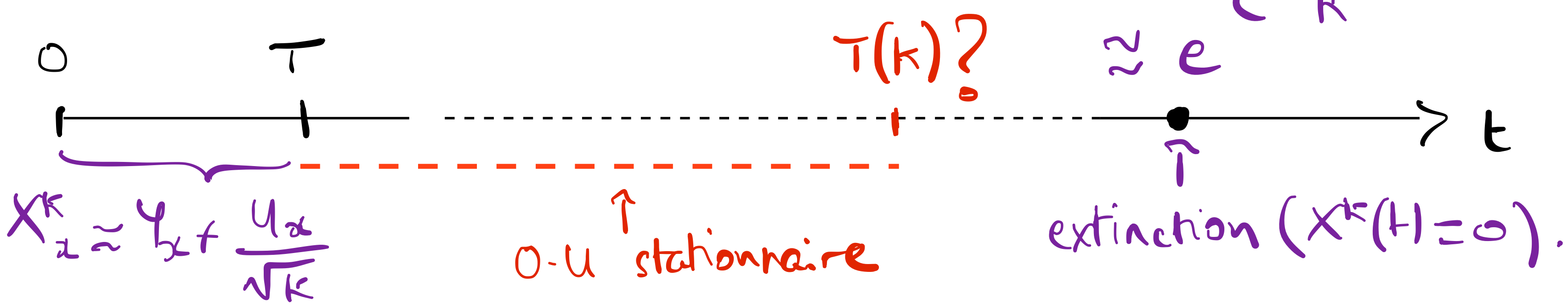
- SIRS (surcritique, $\gamma < \lambda$)

- U_{x_*} est un Ornstein-Uhlenbeck ergodique

$$dU_{x_*}(t) = F'(x_*)\,U_{x_*}(t)\,dt + \sum_{e\in E}\left(\sqrt{\lambda_e(x_*)}\,dB_e(t)\right)e$$

$$U_{x_*}(t) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,\Sigma_*)$$

- n-m logistique / SIRS



Sous l'hypothèse $\underline{H}$: $\Lambda_e \in \mathcal{C}^2$, $\Lambda_e(\varphi_x(s)) \neq 0$ $(\forall s \geq 0, e \in E)$.

<u>Théorème</u> (P., 2020) :

Il existe $V, \alpha > 0$ et une famille de couplages (X^K_x, U) tels que, pour toute $\varepsilon : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\frac{\alpha \log K}{K} \leq \varepsilon(K) \ll 1$, on ait pour K assez grand, et tout $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left\| X^K_x(s) - \varphi_x(s) - \frac{U_x(s)}{\sqrt{K}} \right\| > \varepsilon(K)\right] \leq \frac{t+1}{\exp(VK\varepsilon(K))}$$

- $\exp\left(V K \varepsilon(K)\right)$ = échelle de $\inf\left\{ s \geq 0 : \| X_x^K(s) - \varphi_x(s) \| > \sqrt{\varepsilon(K)} \right\}$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{K}} \ll \sqrt{\varepsilon(K)} \ll 1 \right.$, déviations modérées$\left.\right)$.

- cas $\varepsilon(K) = \varepsilon/\sqrt{K}$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \| X_x^K(s) - \varphi_x(s) - \frac{u_x(s)}{\sqrt{K}} \| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}} \right) \leq \frac{t+1}{\exp\left(V \varepsilon \sqrt{K}\right)}$$

Où se cache KMT ?

Idée de Kurtz (Ethier-Kurtz, Chap. 11).

- Représentation Poisson changé de temps :

$$X(t) = x + \sum_{e\in E} \frac{1}{K} P_e\left(\int_0^t K \lambda_e(X(s))\,ds\right) e$$

$$= x + \int_0^t F(X(s))\,ds + \sum_{e\in E} \frac{1}{K} \tilde{P}_e\left(\int_0^t K \lambda_e(X(s))\,ds\right) e$$

couplage KMT $(\tilde{P}_e, B_e)$.

- Approximation diffusive.

$$Z(t) = x + \int_0^t F(Z(s))\,ds + \sum_{e\in E} \frac{1}{K} B_e\left(\int_0^t K \lambda_e(Z(s))\,ds\right) e$$

- Approximation gaussienne :

$$U(t) = \int_0^t F'(Y(s))\, U(s)\,ds + \sum_{e\in E} \left(\int_0^t \sqrt{\lambda_e(Y(s))}\, dW_e(s)\right) e$$

Erreur d'approximation diffusive près d'un point stable

Cas $x = x_*$

$$(X-Z)(t) = \underbrace{\int_0^t F'(x_*)\,(X-Z)(s)\,ds}_{\text{terme de rappel vers 0 (EDO linéarisée)}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{K}\sum_e \left(\tilde{P}_e - B_e\right)\left(\int_0^t K\lambda_e(X(s))\,ds\right) e}_{\simeq \frac{\log(Kt)}{K}\ (\text{KMT})}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{K}\sum_e \left[B_e\left(\int_0^t K\lambda_e(X(s))\,ds\right) - B_e\left(\int_0^t K\lambda_e(Z(s))\,ds\right)\right] e}_{\text{fluctuations browniennes}}$$

$$+ \int_0^t \left[F(X(s)) - F(Z(s)) - F'(x_*)(X-Z)(s)\right] ds$$

Mieux :

$(\tilde{P}_e^i, B_e^i)$ couplages KMT indépendants, $i \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [i, i+1]$:

$$
\begin{aligned}
(X-Z)(t) = {} & (X-Z)(i) + \int_i^t F'(x_*)\,(X-Z)(s)\,ds \\
& + \frac{1}{K} \sum_e \left(\tilde{P}_e^i - B_e^i\right)\left(\int_i^t K \lambda_e(X(s))\,ds\right) e \\
& + \frac{1}{K} \sum_e \left[B_e^i\left(\int_i^t K \lambda_e(X(s))\,ds\right) - B_e^i\left(\int_i^t K \lambda_e(Z(s))\,ds\right)\right] e \\
& + \int_i^t \left[F(X(s)) - F(Z(s)) - F'(x_*)\,(X-Z)(s)\right] ds
\end{aligned}
$$

III) Applications, perspectives, ...

- Déviations modérées ; $K^{-1/2} \ll \alpha(K) \ll 1$.

$$\tau_{\alpha(K)} = \inf\{t \geq 0 : \|X_x^K(t) - Y_x(t)\| > \alpha(K)\}$$

$$\frac{1}{K\alpha^2(K)} \log \tau_{\alpha(K)} \xrightarrow[K\to\infty]{P} \underline{V}$$ (E. Pardoux, 2019)

- Approximation gaussienne fonctionnelle du processus conditionné à survivre, de la loi quasi-stationnaire (cf travaux de Sylvie Méléard, Jean-René Chazottes, Pierre Collet, Servet Martinez)

- Approximation de fonctionnelles de la trajectoire (impact sanitaire global cumulé en temps d'une épidémie : nombre d'infectés, d'heures de traitement...)

- <u>Perspectives</u> : métastabilité en environnement changeant (ex : limite fluide = PDMP ergodique)